tica de construcción de conocimiento suele ser desarrollada en torno a un problema o a un juego, ¿Conoce usted alguna otra manera de iniciar una situación didáctica de construcción de conocimiento en el aula? Si su respuesta fúe afirmativa, describa como lo hace.

2) ¿Qué entiende usted por "enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas" y por "enseñanza de la resolución de problemas"?
3) ¿Considera usted importante que los niños aprendan a resolver problemas? Argumente su respuesta.
4) ¿Cuando los niños se enfrentan a la resolución de un problema por sus propios medios lo más seguro de esperar es que lo hagan librados al azar, al ensayo-error, y la recuperación de sus conocimientos previos. ¿Cree usted que el profesor debe enseñar a sus alumnos nociones sobre las manèras y medios de resolver problemas? Argumente su respuesta.
5) ¿Cómo cree usted que puedan enseñarse los procedimientos para la resolución de problemas?
6) ¿Qué procedimientos conoce usted para la resolución de problemas? Descríbalos brevemente en una lista, sugerencia: ¿Qué procedimientos para la resolución de problemas utilizó en la realización de la actividad 1.1.2.?

Actividades de desarrollo

La lectura de los artículos que corresponden a estas actividades deberá ser realizada antes de la verificación de la cuarta asesoría semiescolarizada. Su asesor deberá repartir las lecturas entre los distintos equipos o individuos.

En cada lectura, el profesor-alumno tendrá como tarea:

- Recuperar y registrar la respuesta o respuestas que el autor de la misma proporciona a las preguntas de la actividad previa 1.4.1. Se insiste aquí en el hecho de que en general ı todas las preguntas podrán ser contestad con base en la lectura de un sólo artículo.
- Registrar, y exponer en discusiones y deb tes, las ideas o propuestas recuperadas del ɛ tículo que le haya correspondido, que por importancia didáctica le parezcan valiosa: dignas de enriquecer el intercambio grupal la sesión semiescolarizada sabatina.

1.4.2. Lea el artículo "Introducción al estuc de la teoría de la enseñanza problemátic en su antología básica.

1.4.3. Lea el artículo "Condiciones psicoped gógicas de la enseñanza de la solución problemas matemáticos con texto" en su ɛ tología complementaria.

1.4.4. Esta actividad de desarrollo deberá : realizada durante el transcurso de la cua sesión semiescolarizada.

Tomando como base las preguntas de la acti dad previa 1.4.1. y los saberes recuperados la lectura de los artículos que les hayan corr pondido, los profesores-alumnos participaı en la discusión, análisis y debate del tema ' enseñanza problemática."

Actividad final 1.4.5.

Relea su actividad previa 1.4.1. Conteste nuevo dicho cuestionario incorporando en respuestas los cambios y resignificaciones sus concepciones iniciales atribuibles a la inf mación recabada de la lectura de los artícı propuestos y al intercambio y debate grupa

Actividad final 1.4.6.

Haga un cuadro comparativo del constructi mo y de la enseñanza problémica. Selecci como ejes de comparación aquellos que a parecer tengan mayor relevancia para la tra formación e innovación de su práctica doce

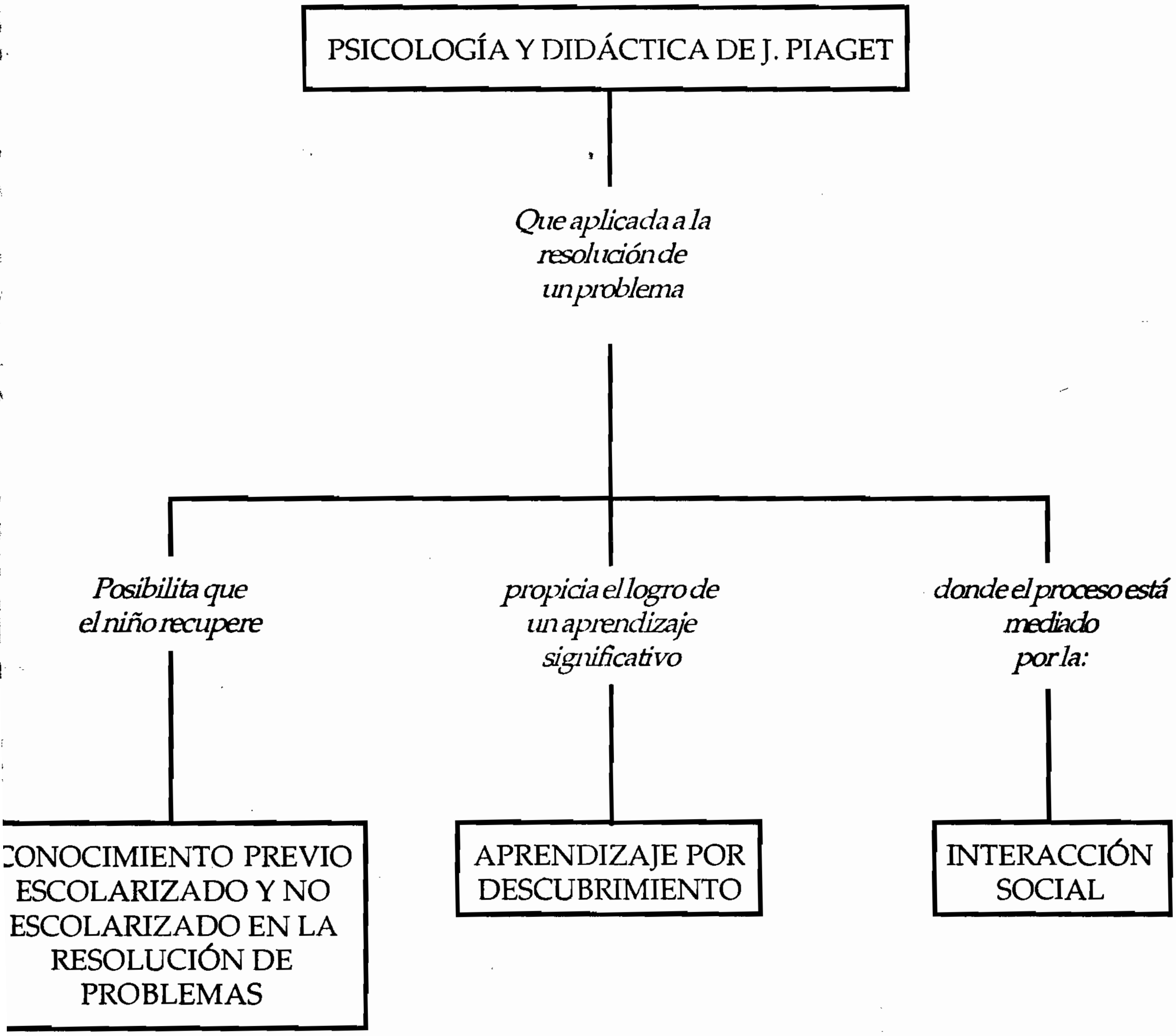
NIDAD 2. CONSTRUCTIVISMO Y ESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: SES PSICOPEDAGÓGICAS

PROPÓSITO

l profesor-alumno conocerá y se apropiará de n conjunto de bases psicopedagógicas que orta el constructivismo en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

RED CONCEPTUAL DE LA UNIDAD

Se estudian aportes del constructivismo tales como:



Tema 1. Psicología y didáctica de J. Piaget

Actividades de aprendizaje

Actividad previa

Como hemos visto, un aprendizaje significativo implica la recuperación de conocimientos previos. Estos saberes previos pueden tener un origen escolarizado o no escolarizado.

En la actividad previa que ahora propondremos asumiremos que las Teorías de J. Piaget han constituido una parte importante o un relevante antecedente en su formación educativa actual tanto fuera como dentro de nuestra Universidad.

Con la actividad que presentamos, pretendemos recuperar algunos conocimientos previos escolarizados del profesor-alumno.

Esta actividad deberá realizarse individualmente antes de la primera asesoría semiescolarizada correspondiente a la segunda unidad.

Actividad previa 2.1.1.

Tomando como referente sus antecedentes de formación y su experiencia docente actuales reflexione, y registre sus respuestas a las siguientes cuestiones.

1) ¿En qué consiste el constructivismo de J. Piaget?
2) ¿Que relaciones cree usted que existen entre la utilización de los problemas matemáticos en una situación didáctica de construcción de conocimiento y el constructivismo de Piaget?
3) En el diseño de una situación didáctica de construcción de conocimiento, el profesor o el diseñador de la situación, seleccionan un problema que está relacionado con la noción matemática por construir ¿Cómo cree usted que podría utilizarse el constructivismo de Piaget para lograr la relación problema-noción matemática por construir?
4) ¿Cree usted que las teorías de Piaget explican y apoyan todos los aspectos contemplados en el diseño de una situación didáctic de construcción de conocimiento?
5) ¿Cuáles son las principales críticas o limit ciones que podría usted señalar al constru tivismo de Piaget?

Actividades de desarrollo

Su asesor distribuirá entre los distintos equ pos de profesores-alumnos las lecturas qu más adelante se indican. Estos artículos deb rán ser leídos antes de la verificación de la pr mera asesoría semiescolarizada de la segunc unidad.

En la lectura que le haya correspondido el pr fesor-alumno deberá:

- Recuperar las respuestas que correspond en el artículo estudiado a las preguntas pla teadas en la actividad previa 2.1.1.
- Anotar, y posteriormente exponer en el i tercambio grupal, las propuestas, opini nes e ideas recuperadas del artículo cuestión, que le parezcan apropiadas, c dácticamente importantes y dignas de s socializadas.

2.1.2. Lea el artículo titulado "La constru ción de operaciones mediante la inve tigación por el alumno" en la antolog básica.

2.1.3. Lea el artículo "De qué hablamos cuan hablamos de constructivismo" en su anto gía básica.

2.1.4. Lea el artículo "Piaget y el desarrollo las estructuras cognitivas" en su antolo complementaria.

2.1.5. Tomando como base las preguntas de actividad previa 2.1.1. y los saberes recu rados de los artículos analizados, los pro sores-alumnos participaran en la discusi análisis y debate del tema "Psicología y dáctica de J. Piaget" durante el transcurso la primera asesoría semiescolarizada de segunda unidad.

Actividades finales

1.6. Relea y reelabore las respuestas a las preguntas de la actividad previa 2.1.1. Incorpore en las mismas los saberes asimilados como resultado de sus lecturas y de la interacción social.

1.7. Seleccione una noción matemática propia del curso a su cargo y proponga un problema que usted considere adecuado para la construcción en el aula de dicha noción. Argumente o explícite los criterios utilizados para realizar sus selecciones.

ma 2. Conocimiento previo, escolarizado o escolarizado en la resolución problemas

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 2.2.1.

a actividad deberá realizarse de manera individual y previamente a la verificación de la gunda asesoría semiescolarizada correspondiente a la segunda unidad.

Utilizando su formación y experiencia práctica docente actuales, conteste las cuestiones e a continuación se formulan:

Los conocimientos previos **no escolarizados** que posee el niño ¿podrán contribuir a que éste resuelva problemas de los grados superiores de la enseñanza primaria? (Por ejemplo quinto y sexto grados). Argumente su respuesta.

¿Cree usted que en el diseño de una situación didáctica de construcción de una cierta noción matemática deban tomarse en cuenta los conocimientos previos que sobre la misma posean los estudiantes? Explique.

¿Es posible que los niños puedan establecer relaciones o vínculos entre los saberes no escolarizados y los escolarizados?

Antes hemos considerado la importancia de lograr un aprendizaje significativo que satisfaga necesidades cognoscitivas del niño. Con respecto a lo anterior, ¿cree usted que las respuestas que la escuela proporciona a las interrogaciones del niño corresponden verdaderamente a las preguntas que los niños se plantean con respecto a los distintos objetos de conocimiento?

5) Según las autoras del artículo que a continuación estudiará, la recuperación y utilización de saberes previos acerca de una noción matemática, propicia un aprendizaje significativo durante la construcción de conocimiento asociado a la noción en cuestión, ¿cómo cree usted que se realice este proceso?
6) ¿Qué riesgos implica el enfrentar a los niños a la resolución de problemas sin haberles enseñado previamente a hacerlo?
7) ¿Cree usted que algunas nociones matemáticas (por ejemplo los números) puedan poseer por sí mismas, (ésto es, sin hacer referencia a sus aplicaciones o uso social) un interés cognoscitivo para los niños?
8) Reflexione en torno a su propia experiencia de recuperación de saberes previos realizada en la actividad 1.1.1. Exponga en un breve escrito sus observaciones y conclusiones.

Actividades de desarrollo

Las lecturas correspondientes a estas actividades deberán ser distribuidas por su asesor entre los distintos individuos o equipos.

Estas lecturas deberán ser estudiadas antes de la verificación de la segunda asesoría semiescolarizada de la segunda unidad.

Se previene al profesor-alumno sobre el hecho de que aunque las lecturas se refieren a los conocimientos previos asociados al sistema de numeración, la mayoría de las ideas expuestas son aplicables a otras nociones matemáticas.

De cada lectura el profesor-alumno:

- Registrará la respuesta que el artículo proporciona a algunas de las cuestiones de la actividad previa 2.2.1.
- Recuperará, para ser propuestas en el debate grupal, ideas y propuestas didácticamente interesantes contenidas en el artículo leído.

Actividades finales

2.1.6. Relea y reelabore las respuestas a las preguntas de la actividad previa 2.1.1. Incorpore en las mismas los saberes asimilados como resultado de sus lecturas y de la interacción social.

2.1.7. Seleccione una noción matemática propia del curso a su cargo y proponga un problema que usted considere adecuado para la construcción en el aula de dicha noción. Argumente o explícite los criterios utilizados para realizar sus selecciones.

Tema 2. Conocimiento previo, escolarizado y no escolarizado en la resolución de problemas

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 2.2.1.

Esta actividad deberá realizarse de manera individual y previamente a la verificación de la segunda asesoría semiescolarizada correspondiente a la segunda unidad.

Utilizando su formación y experiencia práctica docente actuales, conteste las cuestiones que a continuación se formulan:

1) Los conocimientos previos **no escolarizados** que posee el niño ¿podrán contribuir a que éste resuelva problemas de los grados superiores de la enseñanza primaria? (Por ejemplo quinto y sexto grados). Argumente su respuesta.
2) ¿Cree usted que en el diseño de una situación didáctica de construcción de una cierta noción matemática deban tomarse en cuenta los conocimientos previos que sobre la misma posean los estudiantes? Explique.
3) ¿Es posible que los niños puedan establecer relaciones o vínculos entre los saberes no escolarizados y los escolarizados?
4) Antes hemos considerado la importancia de lograr un aprendizaje significativo que satisfaga necesidades cognoscitivas del niño. Con respecto a lo anterior, ¿cree usted que las respuestas que la escuela proporciona a las interrogaciones del niño corresponden verdaderamente a las preguntas que los niños se plantean con respecto a los distintos objetos de conocimiento?
5) Según las autoras del artículo que a continuación estudiará, la recuperación y utilización de saberes previos acerca de una noción matemática, propicia un aprendizaje significativo durante la construcción de conocimiento asociado a la noción en cuestión, ¿cómo cree usted que se realice este proceso?
6) ¿Qué riesgos implica el enfrentar a los niños a la resolución de problemas sin haberles enseñado previamente a hacerlo?
7) ¿Cree usted que algunas nociones matemáticas (por ejemplo los números) puedan poseer por sí mismas, (ésto es, sin hacer referencia a sus aplicaciones o uso social) un interés cognoscitivo para los niños?
8) Reflexione en torno a su propia experiencia de recuperación de saberes previos realizada en la actividad 1.1.1. Exponga en un breve escrito sus observaciones y conclusiones.

Actividades de desarrollo

Las lecturas correspondientes a estas actividades deberán ser distribuidas por su asesor entre los distintos individuos o equipos.

Estas lecturas deberán ser estudiadas antes de la verificación de la segunda asesoría semiescolarizada de la segunda unidad.

Se previene al profesor-alumno sobre el hecho de que aunque las lecturas se refieren a los conocimientos previos asociados al sistema de numeración, la mayoría de las ideas expuestas son aplicables a otras nociones matemáticas.

De cada lectura el profesor-alumno:

- Registrará la respuesta que el artículo proporciona a algunas de las cuestiones de la actividad previa 2.2.1.
- Recuperará, para ser propuestas en el debate grupal, ideas y propuestas didácticamente interesantes contenidas en el artículo leído.

2.2.2. Lea la primera parte del artículo "El sistema de numeración: un problema didáctico" en su antología básica.
2.2.3. Lea la segunda parte del artículo "El sistema de numeración: un problema didáctico" en su antología complementaria.
2.2.4. Lea y recupere en un escrito las referencias al papel de los conocimientos previos en la resolución de problemas contenidas en **"El libro para el maestro"** del grado escolar que usted atiende.
2.2.5. Esta actividad deberá ser desarrollada durante el transcurso de la segunda asesoría semiescolarizada de la segunda unidad por todos los profesores-alumnos quienes participarán en el análisis, discusión y debate del tema "Conocimiento previo, escolarizado y no escolarizado en la solución de problemas" el cual se realizará con base en las preguntas de la actividad previa 2.2.1., la lectura de los artículos presentados y las propuestas e ideas didácticamente interesantes que de las mismas hayan rescatado los profesores-alumnos.

Actividades finales

2.2.6. Relea y reelabore su actividad previa 2.2.1. Incorpore en sus respuestas las modificaciones en sus concepciones previas atribuibles a las interacciones contenidos-compañeros-asesor.
2.2.7. Plantee un problema asociado a la construcción de una cierta noción matemática apropiada para los estudiantes del grupo a su cargo. Registre y analice en un breve escrito, los saberes previos que utilizaron los niños en la resolución del problema planteado.

Tema 3. Aprendizaje por descubrimiento

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 2.3.1.

Antes de la realización de la tercera asesoría semiescolarizada correspondiente a esta segunda unidad, el profesor-alumno deberá contestar de manera individual las preguntas del siguiente cuestionario.

1) ¿En qué consiste el aprendizaje por descubrimiento?
2) ¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por si mismos?
3) ¿Cómo debe intervenir el profesor en una situación de aprendizaje por descubrimiento?
4) ¿Qué papel desempeñan los materiales manipulativos concretos en el aprendizaje por descubrimiento según las teorías de Piaget?
5) ¿Qué papel desempeñan los "aparatos estructurales" (geoplanos, bloques aritméticos multibase, regletas de Cuisenaire, etc.) según la teoría de Gestalt?
6) Cree usted que los niños pequeños puedar advertir regularidades y patrones y hacei generalizaciones con base en sus experiencias particulares?
7) Uno de los propósitos generales de la educación matemática básica en la escuela primaria es "Que el niño desarrolle el pensamiento abstracto por medio de distinta formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias, ¿cómo cree usted que pue da lograrse este propósito en la primaria?
8) Además de los contenidos matemáticos, ¿cre usted posible que a nivel de escuela primaria pueda la matemática aportar tambié métodos que propicien la construcción de co nocimiento matemático escolar?
9) Si su respuesta fue afirmativa, describa método o métodos que según su opinión si ven a este propósito.

Actividades de desarrollo

Las lecturas que constituyen algunas de est actividades deberán ser distribuidas por su as sor entre los equipos o entre los profesores-alur nos y leídas antes de la verificación de la terc ra asesoría semiescolarizada correspondiente la segunda unidad.

De la lectura que le haya correspondido cada profesor-alumno deberá:

- Registrar las respuestas de la lectura que corresponden a algunas preguntas de la actividad previa 2.3.1.
- Recuperar y proponer para el debate grupal, ideas, opiniones y aseveraciones que le parezcan didácticamente importantes y que a su parecer puedan incidir en la transformación de su práctica docente.

2.3.2. Lea el artículo **¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por sí mismos?** en su antología básica.
2.3.3. Lea el artículo "Los propósitos generales de la Educación matemática básica en la escuela primaria y el método de la Inducción Empírica" en su antología básica.
2.3.4. Lea el artículo "Métodos no deductivos de construcción de conocimiento matemático en la escuela primaria" en su antología básica.
2.3.5. Lea el artículo "Aprendizaje por descubrimiento" en su antología complementaria.
2.3.6. Esta actividad de desarrollo consiste en una discusión, análisis, y debate grupal en torno al tema "Aprendizaje por descubrimiento" . Deberá realizarse durante el transcurso de la tercera asesoría semiescolarizada correspondiente a esta segunda unidad con base en:
- preguntas y respuestas a la actividad previa 2.3.1.;
- saberes rescatados de las lecturas propuestas.;
- ideas, opiniones, propuestas, etc., didácticamente interesantes.

Que fueron recuperados y propuestos por los profesores-alumnos.

Actividades finales

2.3.7. Relea y reelabore sus respuestas a la actividad previa 2.3.1. Incorpore los conocimientos asimilados en la lectura de los artículos y en los intercambios grupales.
2.3.8. Haga el registro de lo que sucede en una clase a su cargo, desarrollada con base en la utilización de material manipulativo concreto (estructural o no).

Tema 4. Interacción social

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 2.4.1.

Esta actividad deberá hacerse antes de la realización de la cuarta asesoría que corresponda a la segunda unidad.

En base a su formación, experiencia y práctica docente actuales, conteste las preguntas que a continuación se formulan:

1) ¿Qué papel cree usted que desempeña la interacción social en el desarrollo cognitivo del niño?
2) En el hipotético caso de que la interacción entre niños de similar desarrollo generara un conflicto socio-cognitivo ¿qué podría hacer el profesor para propiciar el éxito de la interacción?
3) ¿Cómo cree usted que pueda favorecerse el progreso cognitivo en la interacción adulto-niño?
4) ¿Cómo puede propiciarse que todos o la mayoría de los niños colaboren en la resolución conjunta de un problema?
5) ¿Cómo debe organizarse el grupo para propiciar la interacción en la en la resolución conjunta de problemas?
6) ¿Qué variables cree usted que deban tomarse en cuenta en la búsqueda del nivel óptimo de la colaboración entre los niños de modo que se favorezca su desarrollo cognitivo?
7) ¿Cree usted que la interacción social pueda influir en la capacidad de el niño para realizar un aprendizaje auto dirigido?
8) ¿Qué papel desempeña el lenguaje en el desarrollo cognitivo en el contexto de la resolución conjunta de problemas?

9) ¿Qué puede hacer el maestro para estimular la actividad mental de los niños mediante la interacción social?

NOTA - El reflexionar sobre su propia experiencia de interacción social en la actividad 1.1.1. podría ayudarle a pensar acerca de las cuestiones antes planteadas.

Actividades de desarrollo

La lectura de estos artículos deberá hacerse antes de la realización de la correspondiente asesoría semiescolarizada.

Su asesor deberá distribuir previamente los artículos a leer entre los equipos o entre los profesores-alumnos.

En base a la lectura del artículo el profesor-alumno deberá:

- Registrar la respuesta del autor a la correspondiente pregunta de la actividad 2.4.1.
- Recuperar y registrar las ideas o propuestas del artículo que le parezcan importantes para el debate grupal.

2.4.2. Lea el artículo "Conflicto, colaboración y comunicación" en su antología básica.

2.4.3. Lea el artículo "La importancia de la interacción social" en su antología complementaria.

2.4.4. Esta actividad de desarrollo deberá realizarse durante el transcurso de la cuarta asesoría de la segunda unidad.

Deberá realizarse una discusión, análisis y debate grupal del tema "Interacción social" en base a:

- preguntas y respuestas a la actividad previa 2.4.1.
- saberes recuperados de los artículos leídos
- propuestas de los profesores-alumnos

Actividades finales

2.4.5. Relea y reescriba sus respuestas a la actividad previa 2.4.1. Incorpore los saberes adquiridos por intercambios grupales o por lectura y análisis de los materiales de la antología.

2.4.6. Describa en un breve escrito los problemas que ha enfrentado en clase y las soluciones que ha desarrollado para los mismos cuando ha intentado promover la interacción social en el contexto de la resolución de problemas. Por citar un ejemplo: ¿Qué debe hacerse con los niños que sólo se limitan a copiar y no aportan al proceso grupal?

UNIDAD 3. RECURSOS DIDÁCTICOS Y METODOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS POR MEDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROPÓSITO

El profesor-alumno conocerá y aplicará un conjunto de recursos didácticos y metodológicos utilizados en la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas.

Tema 1. Cálculo mental y estimación en la escuela primaria

Actividades de aprendizaje

Actividad previa

3.1.1. Antes de la realización de la primera asesoría semiescolarizada de la 3a. unidad, el profesor-alumno deberá contestar individualmente las preguntas del siguiente cuestionario.

1) Describa su concepción de "cálculo mental"
2) Exprese su concepto de "cálculo estimativo"
3) ¿Porqué se enfatiza en la actualidad la enseñanza del cálculo mental en la escuela primaria?
4) ¿Qué relación tiene el cálculo mental con la capacidad para resolver problemas?

RED CONCEPTUAL DE LA UNIDAD

El aprendizaje de la resolución de problemas se facilita y sistematiza si se utilizan:

CÁLCULO MENTAL Y ESTIMACIÓN EN LA ESCUELA PRIMARIA

LA CALCULADORA EN LA ESCUELA PRIMARIA

LOS HEURÍSITICOS DE POLYA Y SCHOENFELD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Algunos de estos recursos y otros anteriormente estudiados se recuperan y ejemplifican en la lectura:

"RECUPERACIÓN DE ELEMENTOS CONCEPTUALES TEÓRICOS, METODOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN EJEMPLO ILUSTRATIVO"

5) ¿Qué relación guarda el cálculo mental con la construcción de nociones matemáticas?
6) ¿Qué relación tiene el cálculo mental con la recuperación de conocimientos previos por el niño?
7) ¿Qué técnicas o recursos didácticos conoce usted para el trabajo en el aula del cálculo mental?
8) ¿Qué métodos conoce usted para realizar cálculos estimativos?

Actividades de desarrollo

Las lecturas para estas actividades serán distribuidas por su asesor entre los equipos o entre los profesores-alumnos quienes deberán leerlas de manera previa a la realización de la primera asesoría de la cuarta unidad.

Los profesores-alumnos:

- Registrarán respuestas de la lectura, que correspondan a preguntas de la actividad previa 3.1.1.
- Recuperarán y propondrán para el debate grupal, aquellos puntos del artículo leído que a su parecer revistan interés y utilidad didáctica.

3.1.2. Lea el artículo "Cálculo mental en la escuela primaria" en su antología básica.

3.1.3. Lea el artículo "Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza" en su antología complementaria.

3.1.4. Los profesores-alumnos durante el transcurso de la primera asesoría de la tercera unidad realizarán un debate grupal del tema "Cálculo mental y estimación en la escuela primaria" para ello tomarán en cuenta:

- Preguntas y respuestas a la actividad previa 3.1.1.
- Conocimientos rescatados de los artículos leídos y discutidos.
- Puntos propuestos por los profesores-alumnos.

Actividades finales

3.1.5. Relea y reelabore las respuestas a su actividad previa 3.1.1. Incorpore en las mismas los saberes asimilados como resultado del estudio de sus lecturas y de la interacción social.

3.1.6. Utilice los saberes asimilados en el estudio de este tema para diseñar una situación didáctica apropiada al grupo a su cargo, y que se refiera al cálculo mental y la estimación.

Tema 2. La calculadora en la escuela primaria

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 3.2.1.

Esta actividad consiste en un cuestionario que deberá contestarse de manera individual antes de la realización de la segunda asesoría semiescolarizada de la tercera unidad.

Tomando como base su formación, experiencia y práctica docente actuales responda las cuestiones que se presentan a continuación:

1) ¿Porqué utilizar la calculadora en la escuela primaria?
2) ¿Cómo debe utilizarse la calculadora en la escuela primaria?
3) ¿Cree usted posible que a través del empleo de la calculadora el niño pueda por ejemplo obtener leyes o reglas para operar con los números? Explique su respuesta.
4) ¿Qué cree usted que deba impulsarse más en la escuela, el cálculo metal, el cálculo con papel y lápiz o el cálculo con calculadora?
5) ¿Cómo cree usted que pueda ser incorporada la calculadora al proceso colectivo de solución de problemas?
6) ¿Puede ser utilizada la calculadora en la realización de pequeñas investigaciones matemáticas que requieran de la formulación de hipótesis?
7) ¿Es posible utilizar la calculadora para propiciar el aprendizaje por descubrimiento?

Actividades de desarrollo

Algunas de estas actividades son lecturas que deberán realizarse antes de que se verifique la segunda asesoría semiescolarizada de la tercera unidad.

Su asesor se encargará de repartir las lecturas entre los distintos equipos o entre los profesores-alumnos.

En base a la lectura que le haya correspondido, el profesor-alumno:

- Registrará la respuesta que en la lectura corresponda a las preguntas de la actividad previa.
- Recuperará y registrará las ideas y propuestas del artículo que puedan enriquecer el debate grupal.

3.2.2. Lea el artículo "La calculadora en primaria: tres modalidades de uso en la resolución de problemas" en su antología básica.

3.2.3. Lea el artículo "Calculadoras" en su antología complementaria.

3.2.4. Durante el transcurso de la segunda asesoría de la tercera unidad los profesores-alumnos realizarán un análisis, discusión y debate en torno al tema "La calculadora en la escuela primaria" para realizar esta actividad se apoyarán en:

- Las preguntas y respuestas a la actividad previa del tema.
- Las lecturas realizadas en las actividades de desarrollo.
- Los puntos didácticos interesantes recuperados y propuestos por los profesores-alumnos.

Actividades finales

3.2.5. Relea su actividad previa. Elabore un escrito donde incorpore los cambios sufridos en las respuestas iniciales como producto de la lectura de antologías y de la interacción grupal.

3.2.6. En base a los saberes asimilados en este tema, diseñe una situación didáctica apropiada al nivel del grupo a su cargo que incorpore la utilización de calculadoras en la resolución de problemas.

Tema 3. Los heurísticos de Polya y Schoenfeld en la resolución de problemas

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 3.3.1.

El cuestionario que constituye esta actividad deberá contestarse individualmente y previamente a la realización de la tercera asesoría semiescolarizada correspondiente a la tercera unidad.

1) ¿Debe enseñarse a los niños a resolver problemas?
2) ¿Cómo enseña a sus niños a resolver problemas?
3) ¿Cree usted que existan estrategias solucionadoras de problemas que sean eficaces y tan generales que puedan ser aplicadas a una gran variedad de tipos de problemas?
4) ¿Cómo se asegura usted de que sus niños comprendan el problema planteado?
5) Enliste y describa los tipos de estrategias que usted y sus compañeros utilizaron en la resolución de los problemas de la actividad 1.1.1.
6) Una vez que sus niños han resuelto correctamente un problema, ¿termina aquí la didáctica asociada al proceso?
7) ¿Cree usted que los niños puedan aprender estrategias solucionadoras de problemas presentándoles ejemplos explicados de resolución de los mismos?

Actividades de desarrollo

Las lecturas asociadas a este tema deberán realizarse antes de la verificación de la tercera asesoría semiescolarizada de la tercera unidad.

Estas lecturas serán distribuidas entre los equipos o entre los profesores-alumnos por el asesor. En cada lectura se deberá:

- recuperar y registrar respuestas de la lectura a las correspondientes preguntas en la actividad previa,
- proponer asuntos de interés didáctico con base en la lectura del artículo para ser analizados, estudiados y debatidos en la sesión semiescolarizada.

3.3.2. Lea el artículo "La solución de problemas, la creatividad y la metacognición" en su antología básica.

3.3.3. Lea el artículo "La enseñanza heurística de Schoenfeld en la solución de problemas matemáticos" en su antología básica.

3.3.4. Lea el artículo "Resolución de problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas" en su antología complementaria.

3.3.5. Los profesores-alumnos realizarán un debate en torno al tema "Los heurísticos de Polya y Schoenfeld en la resolución de problemas". Para la realización de esta actividad se apoyarán en:

- las preguntas y respuestas a la actividad previa 3.3.1.
- las actividades de desarrollo 3.3.2.- 3.3.3. y 3.3.4.., y
- los asuntos de interés didáctico propuestos por los profesores-alumnos relacionados con el tema que nos ocupa.

Actividades finales

3.3.6. Relea y reescriba su actividad previa 3.3.1. de acuerdo a las mismas instrucciones que antes que se han proporcionado.

3.3.7. Haga una revisión de las estrategias que sus estudiantes han aplicado en sus procesos de resolución a los problemas que usted les ha planteado en clase. De esas estrategias, explicite y registre aquéllas que a su parecer correspondan a un heurístico de los propuestos por Poyla y Schoenfeld.

Tema 4. Recuperación de elementos conceptuales, teóricos, metodológicos y didácticos en la resolución de problemas: un ejemplo ilustrativo.

Actividades de aprendizaje

Actividad previa 3.4.1.

Relea todas las actividades finales realizadas durante el desarrollo del curso.

Actividades de desarrollo

3.4.2. Lea el artículo "La resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros" en su antología básica, subraye o recupere del mismo aquellos elementos que le resulten familiares como consecuencia de las actividades de aprendizaje desarrolladas durante el curso.

3.4.3. Realice un debate grupal en torno al tema "La resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros". Para la realización de esta actividad el profesor-alumno podrá apoyarse en:

- la actividad previa 3.4.1., y
- la actividad de desarrollo 3.4.2.

Actividad final

3.4.4. Diseñe una situación didáctica de construcción de conocimiento de alguna noción matemática propia del nivel del grupo escolar a su cargo.

Dicha situación deberá partir del planteamiento de un problema y en ella deberán recuperarse y explicitarse los elementos conceptuales, teóricos, metodológicos y didácticos estudiados en el curso.

Para la realización de este trabajo el profesor-alumno podrá auxiliarse de los trabajos parciales realizados durante el desarrollo del curso.

ESTRATEGIAS PARA EVALUAR PROCESOS Y PRODUCTOS DE APRENDIZAJE

En general, los procesos y productos correspondientes a temas, unidades o el curso, se evaluarán tomando como base o referente al "Modelo de evaluación para la Licenciatura en Educación, Plan 1994".

Algunos de los componentes o principios más relevantes de este modelo se reproducen a continuación.

1) Se asume una concepción constructivista del aprendizaje.
2) El aprendizaje está orientado hacia el análisis e innovación de la práctica docente.
3) El modelo de evaluación es aplicable a todas las modalidades de estudio.
4) El modelo no busca establecer uniformidad conceptual, sino proponer principios de congruencia entre la diversidad de prácticas eva-

luativas y el establecimiento de criterios que le orienten.

5) Se concibe a la evaluación como un medio de apoyo al proceso enseñanza-aprendizaje.
6) La evaluación incluye tanto a los sujetos que intervienen en el proceso enseñanza-aprendizaje, como a las condiciones institucionales en las que esta se desarrolla.
7) La evaluación combina criterios de obligatoriedad y de flexibilidad.
8) La evaluación debe constituirse como un proceso participativo y formativo para estudiantes y asesores.
9) La evaluación constituye una experiencia de aprendizaje, tanto para el estudiante como para el asesor.
10) La evaluación debe garantizar el dominio de los contenidos educativos formalizados en el plan de estudios.
11) La evaluación integra tanto aspectos cualitativos como cuantitativos buscando lograr una evaluación integral.

Como puede observarse, este modelo general de evaluación para la Licenciatura en Educación 1994 provee pautas que aportan flexibilidad dicho proceso y que permiten por tanto, que la evaluación pueda responder a la gran diversidad de circunstancias particulares de operación de las distintas unidades UPN (sedes y subsedes) en todo el país.

Por consiguiente, en congruencia con todas las pautas del modelo general de evaluación, y dentro del marco normativo institucional, los asesores y los profesores-alumnos, de manera participativa podrán, si así lo deciden, acordar actividades, procesos y productos que intervendrán en la evaluación del curso.

Dentro de está concepción general de la evaluación, se sugiere que las normas, criterios, indicadores, etc., asociados a los distintos procesos y productos sujetos a evaluación, sean explicitadas previamente por el asesor de la asignatura de manera tal que se propicie la objetividad al interior del proceso evaluativo.

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN DEL CURSO

Sin embargo, sin menoscabo de la flexibilidad provista por el modelo general de evaluación, para contribuir a facilitar, sistematizar y homogeneizar el proceso evaluativo, en esta guía se propone un conjunto (básico) de actividades de aprendizaje de tres tipos: previas, de desarrollo y finales, cuyos productos se utilizarán para evaluar los temas, unidades y el curso.

De ésta forma, para efectos de evaluación y acreditación, los profesores-alumnos deberán presentar a lo largo del curso, todos los productos resultantes de las actividades previas, de desarrollo y finales propuestas en la guía, a fin de que sean evaluadas por el asesor.

En la modalidad semi-escolarizada se evaluará además la aportación al trabajo grupal realizada por el profesor-alumno.

El resultado de las evaluaciones parciales de cada unidad será determinado por la entrega oportuna de los productos de las actividades propuestas.

Las evaluaciones parciales de cada unidad serán promediadas. Este promedio determinará la evaluación y acreditación global del curso previo acuerdo con el asesor de la asignatura.

Los profesores-alumnos que no hubieren realizado alguna de las actividades básicas en una o más unidades, podrán, realizarlas y presentarlas antes de la conclusión del curso, previo acuerdo con el asesor de la asignatura.

En éste último caso, el asesor determinará si se hace necesario además, la realización de un trabajo o algún examen adicional.

SUGERENCIAS DE AUTOEVALUACIÓN DEL CURSO

A manera de autoevaluación de éste curso el profesor-alumno podría:

- Comparar su situación inicial explicitada a través de las actividades previas, con la situación exhibida en su actividad final, y corroborar en ésta forma, si se logró o no el propósito general del curso.
- También podría comparar su actividad final, con las conclusiones y aportes que se presentan en el artículo "La resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros" de David Block et al.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

AEBLI, Hans. *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Buenos Aires, Kapelusz, 1958.
AUSUBEL, David, et al. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México, Editorial Trillas, 1991.
ÁVILA, Alicia. *Los niños también cuentan.* México, SEP, 1994.
BLOCK, David, et al. *Revista Educación Matemática, Vol. 7, No. 3.* México, Grupo Editorial Iberoamericana, 1995.
GARTON, Alison. *Interacción social y desarrollo del lenguaje y la cognición.* Barcelona, Paidós, 1994.
GÓMEZ, Carmen y César Coll. *Cuadernos de Pedagogía, No. 221.* Barcelona, 1994.
JIMÉNEZ, José R. *Revista Educación Matemática, Vol. 3, No. 1.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1991.
LABARRERE, Alberto. *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1987.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. *Seminario nacional a dirigentes, metodólogos de inspectores de las direcciones provinciales y municipales de educación.* La Habana, 1984.
NICKERSON, Raymond et al. *Enseñar a pensar.* Barcelona, Paidós. 1990.
ORTON, Anthony. *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Madrid, Ediciones Morata, 1990.
PARRA, Cecilia e Irma Sáiz. (Comps). *Didáctica de matemáticas.* Buenos Aires, Paidós, 1994.
POLYA, George. *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Editorial Trillas, 1978.
SAN MARTÍN, Oscar. *Memorias del XIII congreso nacional de enseñanza de las matemáticas.* Sinaloa, A.N.P.M., Universidad Autónoma de Sinaloa, Centro de Ciencias de Sinaloa, 1995.
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria.* México, 1993.
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. *La matemática en la escuela II.* México, SEP, 1988.
Matemáticas I. México, SEP, 1987.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

AUSUBEL, David, et al. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México, Trillas, 1991.
ÁVILA, Alicia. *Los niños también cuentan.* México, S.E.P., 1994.
DÍAZ, Juan. *Azar y probabilidades.* Síntesis, Madrid, 1991.
JUAN, Vincent y Juan Carlos Orero. *Cuadernos de pedagogía. No. 182.* España, 1990.
KAMIÍ, Constance. *El niño reinventa la aritmética.* Madrid, Visor, 1985.
LABARRERE, Alberto. *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1987.
– *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas.* La Habana, Editorial Pueblo t Educación, 1988.
MANCERA, Eduardo y Fortino Escareña. *Revista Educación Matemática. Vol. 5, No. 3.* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1993.
MOCHÓN, Simón y Josueth Vázquez. *Revista educación matemática. Vol. 7, No.3,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
PARRA, Cecilia e Irma Sáiz (Comps.) *Didáctica de matemáticas.* Buenos Aires, Paidós, 1994.
PALTIER, Marie-Lise. *Revista educación matemática, Vol. 5, No. 2.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.
RESNICK, Lauren y Wendy Ford. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* España, Paidós, 1990.
SANTOS, Luz Manuel. *Revista educación matemática, Vol. 7, No. 3.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.
THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Recopilación, organización e interpretación de datos. Cuaderno 16.* México, Editorial Trillas, 1970.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN GENERAL

Todas las didácticas de la matemática coinciden en atribuir gran importancia a la resolución de problemas matemáticos: por constituir una aplicación práctica de la matemática; por servir para la adquisición de habilidades; por contribuir al desarrollo de la creatividad; por su influencia en la formación de estudiantes críticos, reflexivos y dotados de independencia intelectual; por ayudar al estudiante a "aprender a aprender", etc.

Ha llegado a afirmarse que el resolver problemas constituye la única manera válida de "hacer matemáticas".

En los últimos años nuevas tendencias y corrientes educativas tales como el constructivismo, la psicología cognitiva, el estudio del pensamiento y de la creatividad, etc., han reafirmado e incrementado la importancia atribuida a los procesos de resolución de problemas.

En particular, los nuevos materiales educativos provistos por la SEP para la educación básica, enfatizan un enfoque didáctico constructivista y el aprendizaje de la matemática por medio de resolución de problemas.

En razón a las consideraciones anteriores, en ésta antología básica, se ha procurado integrar un abanico amplio de lecturas que refleje diversos aportes, enfoques y perspectivas actuales en lo relativo al campo de la resolución de los problemas matemáticos.

Dentro de esta multiplicidad de lecturas disponibles, se ha privilegiado la elección de aquellas que muestran una relación más directa con los propósitos del curso y de la Licenciatura, y con los nuevos Planes, Programas y materiales didácticos propuestos por la SEP.

El propósito central de este curso establece:

"Que el profesor-alumno conozca y adquiera habilidades y elementos conceptuales, teóricos, metodológicos y didácticos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas, mismos que propicien el análisis, resignificación, transformación e innovación de su práctica docente".

En la Antología Básica, las lecturas seleccionadas para el logro de éste propósito, se han distribuido en tres unidades como se indica a continuación:

UNIDAD 1. Marcos referenciales para el estudio de los problemas.
UNIDAD 2. Constructivismo y resolución de problemas. Bases psicopedagógicas.
UNIDAD 3. Recursos didácticos y metodológicos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas.

En la antología complementaria, además de éstas mismas tres unidades, se ha agregado un apéndice que contiene lecturas relacionadas con los ejes de "tratamiento de la información" y "predicción y azar" contenidos en el Plan y Programa de Educación Básica Primaria 1993 de la S.E.P.

Las lecturas recopiladas en la antología básica permitirán al profesor-alumno apropiarse de un panorama global, actualizado y coherente, de este amplio campo de estudio.

Estas lecturas constituyen, dentro de las limitaciones de tiempo y espacio asociadas al desarrollo del curso, lo que pudiera ser denominado "un mínimo de conocimiento académicamente aceptable" con respecto a los contenidos y propósito de la asignatura.

La antología complementaria presenta lecturas que muestran puntos de vista alternativos, en ocasiones coincidentes y en otras divergentes, para los correspondientes temas de la antología básica, o bien, contenidos que permiten profundizar o completar el tema correspondiente abordado en la antología básica.

En consecuencia, se recomienda al estudiante enriquecer, ahondar o completar su formación consultando la antología complementaria, ya que las lecturas que ésta contiene son de similar valor y calidad que aquellas presentadas en la antología básica.

MARCOS REFERENCIALES PARA EL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS

PRESENTACIÓN

Una primera aproximación al estudio de los problemas matemáticos en la escuela pudiera hacer pensar al profesor-alumno que la terminología, enfoques y conceptos asociados a este tema no ofrecen mayor dificultad, que "todo el mundo conoce lo que es un problema matemático; lo que significa resolverlo, cómo se resuelven, a qué se llama solución, para qué se utilizan los problemas en la escuela primaria, etc."

Sin embargo, como veremos en las lecturas correspondientes a esta unidad, el estudio sistemático de los problemas matemáticos en la escuela, requiere de una conceptualización y puesta previa en común de algunas nociones referentes a este objeto de estudio, ya que (por citar un ejemplo), el concepto de problema puede ser abordado desde diversos puntos de vista tales como el psicológico, el matemático, el de la enseñanza tradicional, el del constructivismo, el de la enseñanza problémica, etc.

Los escritos seleccionados para el estudio de la primera unidad están estructurados como a continuación se indica:

Las lecturas iniciales en el primer y segundo temas, que creemos son las más cercanas a la práctica docente actual de la mayoría de los profesores-alumnos, permiten establecer una caracterización de los problemas y sus componentes; de las nociones más importantes asociadas a los mismos y de las funciones que desempeñan al interior de la práctica docente, tal y como éstos se han presentado en la escuela tradicional.

En el tercer tema, se presentan los escritos de algunos autores que permiten introducir al profesor-alumno a la didáctica constructivista de la matemática, y que posibilitan comparar los conceptos y funciones de los problemas que previamente se habían establecido para la escuela tradicional, con aquellos correspondientes en la didáctica constructivista Francesa.

En el cuarto tema y en congruencia con la aseveración hecha en la presentación general de mostrar un abanico amplio de lecturas que reflejara diversos aportes, enfoques y tratamientos importantes existentes en el campo de la resolución de problemas matemáticos, se presenta un breve panorama general de la llamada "enseñanza problémica".

La versión aquí presentada de dicha corriente pedagógica (originada en Rusia y Polonia), es la que ha sido estudiada y desarrollada en Cuba a partir de la década de los sesentas.

Como más adelante veremos, la enseñanza problémica manifiesta algunas coincidencias con el constructivismo. Un ejemplo relevante de lo anterior lo constituye el hecho de que en ambas corrientes pedagógicas el proceso de construcción de conocimiento en la escuela se inicia con un problema o con una situación problémica.

La enseñanza problémica difiere del constructivismo en su metodología, en sus marcos teóricos y en el papel desempeñado por la llamada "ayuda pedagógica", esto es, en las funciones desempeñadas por el profesor dentro del proceso enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, la viabilidad o factibilidad de insertar o introducir una u otra pedagogía al interior de las antiguas prácticas docentes tradicionales, con el propósito de innovarlas, transformarlas o resignificarlas, resulta también diferente, precisamente por el distinto papel desempeñado por "la ayuda pedagógica" al interior del constructivismo y de la enseñanza problémica.

Concluimos ésta presentación explicitando el hecho de que no sólo la "ayuda pedagógica" propuesta teóricamente por una u otra corriente pedagógica incide en la puesta en práctica en la vida cotidiana del aula de los supuestos teóricos, sino que también una serie de condiciones relacionadas con los aspectos administrativos, laborales, burocráticos, socioeconómicos, padres de familia, evaluaciones para estímulos al trabajo docente, etc., también lo hacen, y debido a éstas razones, resulta conveniente presentar diversas posturas teóricas, para que el profesor, de acuerdo a sus circunstancias específicas, pueda construir propuestas viables de transformación e innovación docente que integren congruentemente aspectos teóricos y realidades específicas de su entorno laboral y social.

TEMA 1. *Saberes previos del profesor-alumno sobre problemas y resolución de problemas*

LECTURA: PROBLEMARIO*

PRESENTACIÓN

Con el propósito de recuperar los saberes previos del profesor-alumno con respecto a los problemas y su resolución, buscando con esto el propiciar un aprendizaje significativo de los contenidos que posteriormente se abordarán, en ésta lectura se presenta un conjunto de 10 situaciones problemáticas.

Los profesores-alumnos, utilizando todo recurso resolutivo o metodológico que puedan imaginar, deberán intentar resolver, trabajando en equipo, los citados problemas durante el transcurso de la primera sesión o la primera asesoría.

Debe enfatizarse aquí que con ésta actividad no se trata de lograr una competencia entre individuos o equipos que intenten resolver correctamente el mayor número de problemas.

Los fines primordiales de ésta tarea consisten en:

- *Hacerle reflexionar sobre las circunstancias y dificultades que sus propios alumnos experimentan al afrontar en clase los distintos problemas matemáticos.*
- *Propiciar el intercambio grupal de opiniones para el enriquecimiento de los conocimientos disponibles acerca de los problemas y su resolución.*
- *Como antes se dijo, recuperar y relacionar sus saberes previos acerca de la naturaleza, función y resolución de los problemas con los contenidos que se estudiarán en el curso.*

En la antología complementaria, para profundizar en el análisis de algunas nociones asociadas al estudio del tema, se presenta la lectura titulada "Problemas, maestros y la resolución de problemas" de Eduardo Mancera Martínez y Fortino Escareña Soberanes.

Esta lectura se encuentra fuertemente relacionada con la actividad que se ha propuesto para ser desarrollada en este tema.

PROBLEMARIO[1].

1 - *Las dos mecanógrafas.*

Se encargó a dos secretarias que copiaran un informe. Una de ellas hubiera hecho el trabajo en 2 horas y la otra en 3 horas. ¿En qué tiempo harán entre las dos el trabajo encargado?

2 - *Tres cuartas partes de hombre.*

A un capataz le preguntaron cuántos hombres tenía su cuadrilla. El respondió de un modo bastante confuso:

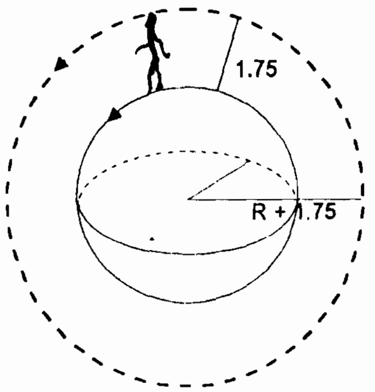
Los hombres no son muchos: tres cuartos de los que somos más tres cuartos de hombre, ésa es toda nuestra gente.

*Problemario UPN. "Conjunto de problemas seleccionados", en: *Matemáticas I.* Sistema de Educación a Distancia, México, UPN, SEP, 1987. pp. 21-40.

¿Podría usted decir cuántos hombres había en esta cuadrilla?

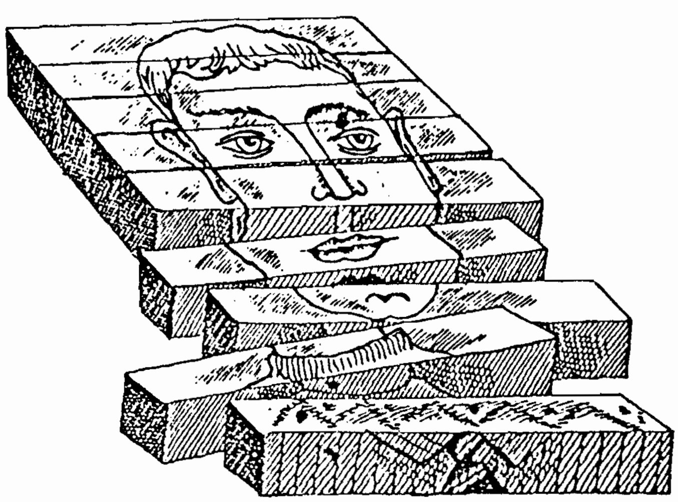
3 - Por el ecuador.

Si usted pudiera dar la vuelta a la Tierra por el ecuador, el punto más alto de su cabeza describiría una trayectoria más larga que la descrita por sus pies. ¿Sería muy grande la diferencia entre ellas?



4 - ¿Cuántos retratos?

Dibuje un retrato en un cartón y córtelo en tiras. Supongamos que lo corta en nueve tiras. Si sabe dibujar un poco, no le será difícil hacer otras tiras con las imágenes de las diversas partes de la cara, pero de tal modo que dos tiras contiguas, aunque pertenezcan a diferentes retratos, pueden aplicarse la una a la otra sin que se note discontinuidad en los trazos. Si para cada parte de la cara hace usted cuatro tiras diferentes tendrá 36 tiras, con las cuales juntándolas de nueve en nueve, podrá formar diversos retratos.



En los almacenes donde en un tiempo se vendían juegos de tiras para componer retratos, decían los dependientes que con las 36 tiras se podían obtener mil fisonomías distintas.
¿Es esto cierto?

5 - ¿Qué edad tienen?

— Hace 18 años Roberto era exactamente tres veces más viejo que su hijo.
— Espere; precisamente ahora, según mis noticias, es dos veces más viejo que su hijo.
— Y por ello no es difícil establecer cuántos años tiene Roberto y su hijo.
¿Cuántos años tienen si el hijo tiene ahora más de 30 años?

6 - Un rompecabezas.

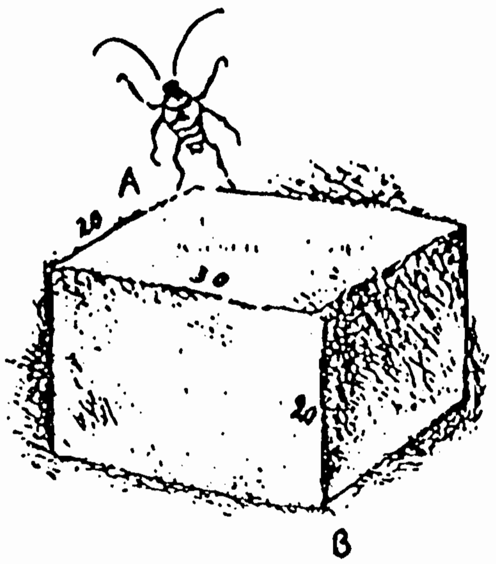
El rompecabezas será a base de cerillos. Tenemos tres montoncitos diferentes. En ellos hay en total 48 cerillos. No les digo cuántos hay en cada uno. Pero observen lo siguiente:

Si del primer montón paso al segundo tanto cerillos como hay en este último, luego del segundo paso al tercero tantos cerillos como hay en ese tercero, y por último, del tercero paso al primero tantos cerillos como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillos en cada montón. ¿Cuántos cerillos había en cada montón al principio?

7 - El camino del escarabajo.

Junto a la carretera hay un adoquín de granito de 30 cm de longitud, 20 cm de altura y 20 cm de ancho. En el ángulo A de dicho adoquín hay un escarabajo que quiere ir por el camino más corto al ángulo B.

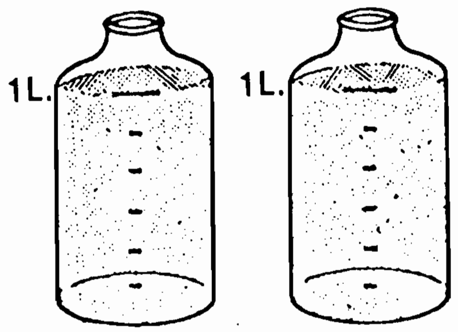
¿Por dónde pasa este camino más corto y cuál es su longitud?



8 - El agua y el vino.

En una botella hay un litro de vino, y en otra un litro de agua. De la primera a la segunda se transvasa una cucharada de vino, y después, de la segunda a la primera se transvasa una cucharada de la mezcla obtenida.

¿Qué hay ahora más, agua en el vino o vino en el agua?



Para poder responder pregúntese dónde está el agua que falta en la segunda botella y dónde está el vino que falta en la primera botella. Obsérvese que la diferencia entre el vino que había y el que hay actualmente, se ha llenado con agua.

9 - Adivine las edades.

Hace mucho tiempo un joven solicitó la mano de una de las tres hijas de un comerciante, a lo que éste le respondió:

— Obtendrás la mano de mi hija, si logras decirme sus edades. Para ello te informo que la suma de las edades de mis hijas es 17.

Se fue el joven a su casa y al otro día regresó con el comerciante alegando que no podía saber la respuesta. El viejo comerciante le dijo:

— El producto de las edades de mis hijas es 144.

Nuevamente el joven regresó con el comerciante informándole que no podía saber cuáles eran las edades de sus hijas. El comerciante le dijo:

— La menor tiene los ojos azules.

Al otro día regresó el joven con la respuesta y obtuvo permiso para casarse con la hija del comerciante.

¿Podría usted calcular cuáles eran las edades de las tres hijas?

10 - La distribución de nueces.

Un comerciante tiene 127 nueces y sólo dispone de 7 bolsas. ¿Cómo puede distribuir las nueces en las 7 bolsas de tal forma que cualquier cantidad (menor o igual a 127) que le pidan la pueda entregar con las bolsas que ya ha preparado, sin hacerles modificación alguna?

Notas de la lectura:

[1]Problemas seleccionados de "Matemáticas I", U.P.N. Sistema de Educación a Distancia, México, SEP, 1987. pp. 21-40.

TEMA 2. *Concepto y función de los problemas en la escuela*

LECTURA: LOS PROBLEMAS EN LA ESCUELA PRIMARIA*

PRESENTACIÓN

Para el logro de los propósitos asociados al estudio de este tema, se han seleccionado tres lecturas que en conjunto presentan diversos aspectos y puntos de vista complementarios con relación al asunto que nos ocupa.

En la antología básica, la lectura titulada "Los problemas en la escuela primaria" nos presenta elementos que permiten caracterizar el concepto de problema, y algunas nociones relativas a los mismos y a su resolución dentro de la óptica de la didáctica tradicional.

Inicialmente se presenta la errónea percepción que tienen los alumnos de primaria sobre lo que es un problema, se explican brevemente, las deficiencias e insuficiencias encontradas con base en los "papeles" desempeñados por profesores y estudiantes en sujeción al llamado "contrato didáctico" (Ver lectura de Grecia Gálvez en el siguiente tema).

Para desarrollar en el niño una nueva actitud para resolver problemas propone hacer explícita la existencia del "contrato didáctico" para modificarlo en un sentido positivo.

Para tratar de resolver varias de las dificultades asociadas a la resolución de "problemas clásicos" (lectura, memoria, maduración psicogenética, etc.) propone construir en el niño un nuevo concepto más amplio y flexible de problema.

Al ir presentando los elementos que constituyen el nuevo concepto de problema, la lectura va caracterizando y contrastando los problemas tradicionales con los problemas vistos desde una óptica constructivista.

Asimismo, la lectura va perfilando algunos componentes del constructivismo (se verán en el próximo tema) que intervienen en la resolución de problemas tales como: un manejo más libre y flexible de la información (los datos de un problema); la utilización de variados procedimientos de resolución; la comunicación y validación de resultados y procedimientos; la disponibilidad de conocimientos previos utilizables para la resolución; el trabajo en equipo, etc.

Para complementar el estudio de éste tema se recomienda la lectura del material que a continuación se enlista, mismo que se localiza en la antología complementaria.

"Reflexiones para la enseñanza". Alicia Ávila Storer.

"Sobre la formulación de problemas matemáticos por los escolares". Alberto F. Labarrere Sarduy.

*ERMEL del INRP. "Los problemas en la escuela primaria", en: *Aprendizajes matemáticos en la escuela primaria*. ERMEL DEL INRP, FRANCIA.

LOS PROBLEMAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

INTRODUCCIÓN

Decir que la resolución de problemas es un obstáculo grave para los alumnos de primaria es una banalidad. Y se sabe muy bien, que no es suficiente que sepan efectuar una división, por ejemplo, para que sepan reconocer los problemas en los cuales la división es una herramienta eficaz. Y tampoco es suficiente proponer numerosos ejemplos para acrecentar su capacidad de resolver problemas, etc.

La dificultad de un problema para un niño revela numerosos aspectos y estamos muy lejos de haber identificado todos los componentes en juego en la resolución y las relaciones que existen entre esos componentes.

Sin embargo, hemos logrado poner en evidencia en forma pragmática algunos puntos neurálgicos y proponer, en consecuencia, actividades que han resultado muy fructíferas para los niños.

Antes de evocar dos de estos puntos, es necesario reafirmar que un objetivo fundamental de la escuela primaria es enseñar a los niños a resolver los problemas.

Un primer punto se refiere a la percepción que tienen los alumnos del problema. Hace algunos años pedimos a alumnos de 2° y 3er. grado inventar problemas. Los textos presentados por los niños mostraban claramente que para ellos un problema no era lo que nosotros concebimos. En la mayor parte de los casos, los datos propuestos no tenían relación, incluso eran incompatibles, con la pregunta presentada. Los textos dados eran más parecidos a enigmas o a adivinanzas que a enunciados de problemas.

Ejemplos:

1. Hay 26 peatones que atraviesan la calle. ¿Cuántos autos hay en la calle?
2. Sobre la luna 27 astronautas encontraron 51 piedras y se hicieron 47 collares.

Es evidente, que estos niños tenían una representación errónea de lo que es un problema matemático.

Una encuesta más reciente[1] confirma esos resultados. Se propusieron a niños de 2° y 3er. grado y de 4° y 5°, problemas del tipo siguiente:

1. En una clase hay 12 niñas y 13 niños. ¿Cuál es la edad de la maestra?
2. En un corral hay 125 corderos y 5 perros. ¿Cuál es la edad del pastor?

Las respuestas obtenidas (7 clases de 2° y 3°, y 6 clases de 4° y 5°) muestran que la cuarta parte de los niños de 2° y 3° y la tercera parte de los de 4° y 5° encuentran la edad de la maestra o del pastor.

Muchos pensarán, que en estos casos extremos, se mete a los niños en una trampa y finalmente se recoge lo que se sembró. En efecto, se tiene el derecho de decir que la inteligencia de los niños no está en discusión. Un análisis de las respuestas dadas y las justificaciones en problemas de ese tipo, muestran que los niños no dicen cualquier cosa, y que sus errores son a menudo "inteligentes". El ejemplo citado en el artículo es significativo: un alumno que en el ejemplo 2 (corral) encontró 25 (125:5) explica que la división es la única operación que da un resultado plausible, las demás operaciones (125 + 5, 125 - 5) dan un resultado demasiado grande.

Si hay trampa, es justamente la trampa en la cual se ha encerrado a los niños; para ellos, "el problema de la escuela" tiene siempre una solución, esa solución se obtiene haciendo una o varias operaciones, hay que utilizar todos los números del enunciado, es indispensable dar una solución (decir que no se sabe sería confesar que no se buscó o que se es ignorante). Frente a un enunciado, los niños se preocupan únicamente por la operación que hay que hacer. Está claro que tal relación con el problema, sólo perturba e incluso impide la búsqueda de una solución racional o el desarrollo de un razonamiento lógico.

Un segundo punto se refiere a la convicción que tienen los niños de haber encontrado una buena solución y de sus posibilidades de justificarla. Se conoce bien cómo una pregunta del tipo ¿Estás seguro? es suficiente para hacer que los niños duden de lo que acaban de hacer o decir. Se trata aquí de comportamientos que desbordan ampliamente el cuadro de resolución de problemas en matemática. Pero nos parece que, por un lado, el problema de matemática es un lugar privilegiado para enseñar a los niños a justificar, a probar lo que dicen, y eso, es un lenguaje preciso, y por otro lado, el ciclo medio (4° y 5° grado) es el momento en la escuela primaria, en que se puede desarrollar fructuosamente la capacidad de argumentar en un lenguaje no ambiguo, dentro de actividades de comunicación y de intercambio.

En realidad, se puede hacer la hipótesis que estos dos puntos tienen un mismo origen; la naturaleza del contrato que se establece entre el maestro y los alumnos (en particular, en la ocasión de resolución de problemas). Este contrato, que está determinado ampliamente por las expectativas, a menudo implícitas del maestro, modela los comportamientos de los niños, influye sus respuestas: el niño se constituye una imagen de la resolución del problema según la cual debe, antes de todo, producir la respuesta que el maestro espera.

Se puede citar algunos elementos constitutivos de esta imagen: hay que encontrar rápidamente la operación para usar, no se debe dejar que el maestro piense que se ha dado (los alumnos borran sus ensayos, para encontrar la solución, o los escriben en un rincón de la hoja o sobre la mesa), hay que dar necesariamente una respuesta sino, se sospecha que no trabajó, sólo el maestro podrá decidir sobre la exactitud de la solución (cuántos niños, aunque no hayan sabido hacerlo, tienen una esperanza mágica en el veredicto del maestro...).

Para desarrollar en el niño la actitud para resolver problemas es necesario entonces, trabajar a nivel de ese contrato, para tratar de explicitarlo o de modificarlo en un sentido favorable.

En esa perspectiva, hemos definido, además de los objetivos nocionales, otros que llamamos objetivos metodológicos y hemos propuesto situaciones que permitan a los niños construirse *otra imagen del problema*.

Entre las múltiples direcciones de trabajo posibles, hacemos énfasis particularmente en: el análisis de datos iniciales, su naturaleza, su rol, su número, su forma (¿son numéricos o no?, ¿pertinentes o no?, ¿redundantes? incluidos en un enunciado, un gráfico, una tabla?... ¿qué se puede deducir?), la explicación de procedimientos y la justificación de los resultados.

Haciendo todo esto, somos conscientes que sólo tomamos en cuenta una parte de los factores que condicionan la aptitud para resolver problemas. Queda en suspenso una serie de interrogantes sobre los cuales no tenemos aún informaciones o sólo informaciones parciales.

Primera cuestión: la de la lectura.

Los problemas son generalmente textos escritos y se sabe que las dificultades varían según el orden elegido para presentar los datos, la sintaxis, los términos empleados, la longitud del texto, etc. "La mayoría de los "malos en matemática" está formada por alumnos que no aprendieron nunca a desarrollar un comportamiento de lectura pertinente frente a un escrito de ese tipo". (Bentolia en: Aprendizaje y práctica de la lectura en la escuela, Actas del coloquio de París 13/14 junio 79). Es entonces una idea muy generalizada que una de las dificultades de los niños en la resolución de problemas es que no saben leer.

Pero no se podría también decir, invirtiendo la proposición, que "¿la mayoría de los 'malos en lectura' está formada por alumnos que jamás aprendieron a desarrollar un comportamiento de tratamiento de informaciones pertinentes frente a un problema?" En esta hipótesis, dificultad de lectura y dificultad de tratamiento estarían íntimamente ligados y la capacidad de lectura de un enunciado de problema sería indisociable de la capacidad de tratamiento. Así, el que lea bien será el que lo sepa tratar. Entonces la lectura del texto no sería una fase independiente de la resolución de problemas, sino parte integrante.

Segunda cuestión: la de la memoria y de la multiplicidad de tareas.

La actividad de resolución de problemas se presenta en efecto como una actividad compleja que requiere la afectación mental y simultánea de un gran número de tareas: depósito, selección, organización de informaciones, búsqueda y aplicación de procedimientos, cálculos, etc.

Sin embargo, se observa que si una u otra de las tareas demanda una atención demasiado grande, el niño se encuentra en dificultad. Los maestros saben bien que para dificultar un problema, es suficiente, por ejemplo, alargar el texto del enunciado, multiplicar los datos, aumentar el tamaño de los números, cambiar la secuencia, agregar una pregunta, o reemplazar los números naturales por números decimales (2 problemas idénticos, uno de los cuales requiere una multiplicación del tipo 13 x 28 y otra 13.02 x 28.87 no se logran de la misma manera aún si los niños dominan las 2 técnicas), etc.

Cada una de esas modificaciones conduce al niño a un campo menos familiar, en un dominio en que los automatismos no se aplican más; el trabajo suplementario que está obligado a hacer para superar una dificultad local es muy costoso mentalmente y puede perturbar sus posibilidades de memorización. Sin embargo, las capacidades numéricas de los niños están lejos de ser ilimitadas y si se aumenta la dificultad de una tarea particular, tiene repercusión en la posibilidad de efectuar otras.

Si tradicionalmente, hay siempre en la clase algunos niños que no "atienden a nada"; la mayoría entre ellos, frente a una tarea compleja, no puede "atender a todo". Es suficiente ver que algunos niños eligen concentrarse sobre una tarea más que sobre otras. Cada maestro ha tenido la experiencia de niños que hacen mentalmente y sin equivocarse, una operación difícil y que localmente, cuentan con los dedos para encontrar por ejemplo, 8-5. Sucede como si los niños tuvieran la sensación de que no puede tomar todo en cuenta: eligen entonces no perder energía en los cálculos que saben que pueden hacerlo en forma económica (del punto de vista de carga mental).

Considerar un problema como una actividad donde intervienen tareas múltiples, conduce a pensar que esta actividad requiere una carga de trabajo mucho más elevada que en general, el maestro no sospecha, y que correlativamente, el aprendizaje de resolución de problemas pasa también por la educación de utilización de la memoria[2].

Tercera cuestión:

Otras cuestiones podrían discutirse por ejemplo, la de la maduración psicogenética del niño, la de los determinantes afectivos, socio-culturales, etc.

Aún si no se explicitan todos y siempre, estos factores se toman en cuenta en nuestra práctica y están presentes en la elección de las relaciones que proponemos establecer entre el maestro, los alumnos y la situación problema.

1. Los objetivos metodológicos

Para tratar de resolver cierto número de las dificultades señaladas anteriormente es necesario considerar una gama de problemas mucho más amplia que el problema clásico.

Llamemos clásico al tipo de problemas en que las preguntas ordenadas y cerradas estructuran la resolución, en el que las informaciones dadas son necesarias y suficientes, donde la intención es ejercitar a los niños a decodificar un enunciado y buscar entre los conocimientos aquellos que se aplican al problema presentado: no es cuestión aquí de negar el interés de tales "problemas de aplicación", pero hay que tomar conciencia de que sus objetivos son limitados y no permiten enseñar a los niños a reflexionar sobre los datos, a problematizar una situación, a justificar y validar los resultados obtenidos.

Le da a los niños una imagen completamente parcial de la resolución de problemas, que además está muy alejada de los problemas de la vida diaria; por ejemplo, los datos necesarios están siempre presentes, no hay datos inútiles; a menudo se dan en el orden en que hay que considerarlos para el cálculo, las dificultades están ordenadas (caso de los problemas con preguntas intermedias), la problemática está ya enteramente construida. En las situaciones de la vida diaria, a menudo es necesario empezar por la problemática: los datos que se deben tener en cuenta, los valores numéricos pertinentes, la organización de las informaciones, etc. Por todas estas razones, proponemos una gama de situaciones-problemas que desbordan ampliamente el problema clásico tanto en su forma como en su contenido, y en las modalidades de trabajo y comunicación que implican.

I.1. Problematizar-resolver

Buscar informaciones, organizarlas, tratarlas son objetivos indisociables de la resolución de problemas: la elección de los datos pertinentes necesita que ya se concibe un método de resolución e inversamente, en el curso del tratamiento a menudo aparecen nuevas cuestiones, o es necesario tomar en cuenta nuevas informaciones u organizar diferentemente los datos iniciales.

Sin embargo, si distinguimos a nivel de esta exposición algunos de estos aspectos, es porque a partir de la experiencia nos parece posible y fructuoso localizar el trabajo de los niños más sobre uno de los aspectos que sobre otro en un momento dado.

Consideraremos en particular situaciones problemas donde se deba:

a) Cuestionar a propósito de los datos, formular hipótesis e inferir un resultado.
b) Buscar informaciones pertinentes relativas a una pregunta.
c) Aplicar un procedimiento de resolución.

Estas situaciones no están definidas en función de una progresión. Su desarrollo estará en función de las dificultades que encuentren los niños; por ejemplo: dificultad para ordenarlas convenientemente (lo que conduce a los niños a resolver el problema refiriéndose a índices contextuales, palabras como: agregar, restar, o, a nociones que se acaban de aprender o de repasar, etc.). Nos propondremos retomar aquí cada uno de los 3 puntos evocados anteriormente asociándoles ejemplos donde intervienen más particularmente.

a. Plantearse preguntas a propósito de los datos. En los ejemplos siguientes, se trata de hacer tomar conciencia a los niños que las informaciones pueden ser relacionadas o combinadas, que dan lugar a nuevas informaciones y que permiten en general responder a varias preguntas:

—¿qué informaciones no contenidas en un documento pueden deducirse de las que si figuran? (tarifas diversas, programas de radio y televisión, tablas estadísticas, etc.);
—¿qué enunciado de problema puede construirse a partir de informaciones dadas, organizadas o no en tablas, gráficas, etc.?;

¿Cuáles son las preguntas a las cuales se puede responder una vez dado un enunciado bastante complejo y una lista de preguntas?

Inventar otras preguntas a las cuales se podría responder a partir de los datos del enunciado ¿cuáles son las informaciones que faltan para que se pueda responder a todas las preguntas de la lista?

b. Buscar informaciones
En los ejemplos siguientes, la actividad de los alumnos se dirige a la vez a la selección de los datos (a partir de tarifas, gráficos, maquetas, textos, etc.) y sobre la búsqueda de nuevos datos:

—determinar el presupuesto necesario para preparar una merienda. Los niños repartidos por grupos deben: definir su menú con eventualmente distintas posibilidades, determinar los precios correspondientes (por ejemplo, con una encuesta), tratar las informaciones obtenidas, hacer elecciones, presentar resultados;
—estudiar el crecimiento en talla y peso de los niños. Aquí los niños deberán:

- conducir una encuesta para obtener los datos en la misma escuela (empleo de balanzas), en sus casas, con sus padres, (conocimiento de la evolución de la tabla y peso en los primeros años);
- organizar sus datos en tablas geográficas.

Esta actividad permite también calcular promedios, emitir hipótesis a propósito de la linealidad del crecimiento...

Encuesta en diversas tiendas a fin de comparar los precios de ciertos artículos.

Explicitación de un documento (o texto) dado los alumnos tienen que responder a preguntas precisas de las cualidades, la respuesta puede ser obtenida por lectura directa. Por ejemplo, cada alumno dispone de una tarifa de correos y debe responder a preguntas del tipo:

—"envío una carta cuyo peso está comprendido entre 20 y 50 gr. ¿cuál es el precio para enviarla?";
—"envío una carta con tarifa urgente. Pago $ .80 ¿qué puede decir sobre el peso de esa carta?"

Resumir problemas tradicionales incompletos. Por ejemplo: los recursos de una cooperativa escolar provienen de cotizaciones mensuales de $ 1 dados por cada alumno y de donaciones que llegan a $ 183. con el dinero de su cooperativa, los alumnos quieren comprar un tornamesa de $ 350 y sus discos, ¿cuántos discos podrían comprar?

c. Aplicar un procedimiento de resolución
Aquí aparecen aún diferentes tipos de ejemplos de interés complementario:

Ejemplos en que los niños pueden pensar en una situación isomorfa más simple, que saben resolver. Se trata entonces de hacerles tomar conciencia que reduciéndolo a un problema del cual se pueden hacer una representación (mental, dibujada, materializada,...) pueden tener una idea de la solución.

Ejemplo 1. En la situación consistente en buscar cúantos cubitos de 1 cm de arista se pueden apilar en un gran cubo de 27 cm de arista, el alumno puede tratar primero de realizar cubos de distintas dimensiones con ayuda del material, antes de proponer una solución.

Ejemplo 2. La situación consiste en completar un patrón para que sea una pirámide, puede ser abordada calcando el comienzo del patrón para recordarlo y materializar la cara faltante y su posición.

Apoyándose en esta experiencia los niños pueden resolver el problema presentado.

Ejemplo 3. En un problema numérico, los niños podrán igualmente reemplazar los números propuestos por otros más pequeños de los cuales se pueden hacer una representación. Esto puede facilitar la estrategia de resolución.

Ejemplos donde varios procedimientos de resolución son posibles (con la ayuda del material: concretización, representaciones, manipulaciones, etc.) los alumnos pueden entonces comparar procedimientos, estudiar las ventajas respectivas, dominio de validez, convicción que aportan, en cuanto a los resultados obtenidos, simplicidad, economía, etc.

Ejemplo 1. Determinar el número de granos de arroz en un kg., los alumnos pueden determinar el número de granos en una muestra de masa (cuántos granos para hacer 10 gr.) o de volumen dado (cuántos granos en un vasito), etc.

Ejemplo 2. Determinar el número de segundos en un año. Los alumnos pueden calcular cuántos segundos en una hora y cuántas horas en un año, o cuántos segundos por semana o cuántas semanas en un año, etc. En forma general, numerosos problemas numéricos dan lugar a procedimientos de resolución diferentes. Para localizar la actividad de los niños sobre la descripción de los métodos utilizados, se les puede permitir que recurran a un "centro de cálculo" (grupo de niños cuya única tarea sea la de efectuar cálculos sobre pedido) o a una calculadora.

Ejemplos de situaciones que responden a los mismos procedimientos de resolución, pero presentados bajo aspectos diferentes.

Entonces se comparan los procedimientos y los niños pueden buscar otros ejemplos de situaciones del mismo tipo.

Adquirirán así la experiencia de que toda una clase de problemas puede resolverse con el mismo algoritmo.

Ejemplo: Isabel cuenta sus dulces; cuando los contó de a 3, le sobraron 2; cuando los contó de a 5, le sobraron 3 ¿cuántos dulces tiene?

Carolina dijo: "Este año mi edad es un múltiplo de 7, el año próximo mi edad será un múltiplo de 5 "¿Cuál es la edad de Carolina?"

I.2. Comunicar - validar

Comunicar los procedimientos y justificarlos no es, en general, una preocupación espontánea del alumno que cree haber llegado al resultado. Hay que elegir entonces, situaciones-problemas de tal forma que los alumnos tengan que comunicar informaciones o procesos, que, paralelamente, tengan que tener en cuenta las ideas emitidas por otros y susceptibles de hacer evolucionar su investigación, que puedan comparar sus soluciones con otras, a fin de colocarlos en posición de convencer a los demás de la validez de sus resultados.

Esto necesita, claramente, que el alumno se involucre en la situación propuesta, y que además, éste colocado en condiciones favorables para el intercambio. Hay que tener presente las dificultades de argumentación que existen entre alumnos y maestro: sus niveles de lenguaje son muy diferentes, el maestro tiene objetivos que escapan al alumno, etc.

Esto justifica la preferencia que le damos a las situaciones de comunicación entre alumnos o grupos de alumnos, que permitirá:

Elaborar un lenguaje, mejorarlo y ponerlo a prueba. Por ejemplo: los alumnos deben comunicar un procedimiento a otros, a fin de que estos últimos realicen una tarea fija. Se puede tratar de transmitir un procedimiento de construcción de una figura geométrica, de un poliedro, de un rompecabezas, etc.

Un grupo de alumnos (1) debe comunicarse a otro grupo (2) informaciones organizadas de tal forma que el grupo (2) pueda, a partir de esas informaciones, responder directamente a una pregunta.

El grupo (1) trabaja por ejemplo en la situación siguiente: "En un supermercado hay una promoción de jabones. Un jabón cuesta $ 3. Por cada compra de 3 jabones, el cuarto es "gratis".

El grupo (1) debe organizar esas informaciones (estableciendo listas, trazando un gráfico, indicando una fórmula, etc.) para que el grupo (2) pueda encontrar directamente (como lo podría hacer la cajera) el precio pagado por un número de jabones comprendido entre 10 y 20, por ejemplo (o entre 50 y 60).

Hay que anotar que si se aumenta el número de jabones y el tamaño del intervalo, ésto incitará a los alumnos a encontrar una fórmula más económica que una lista.

Validar los resultados y las previsiones hechas con un razonamiento. Por ejemplo: en una situación de construir una pirámide es posible saber si la solución encontrada es exacta sin tener que recurrir a la apreciación del maestro: la sanción está dada en poder o no construir un sólido.

Si tratamos de desarrollar la aptitud de los alumnos a expresar sus procedimientos, a justificar su razonamiento, por el lado de comunicarlo a otros niños, eso no significa que ya excluya la búsqueda y la redacción individual de la solución donde el alumno tiene la ocasión de ejercer y practicar su reflexión personal. Esta redacción puede, como en el caso del trabajo en equipo proponerse a otro alumno o a otros, para una explicación o una confrontación. Puede igualmente ser retomada después de la sugestión del maestro acerca de continuar la investigación. Notemos que se pueden utilizar esas redacciones individuales, en el trabajo colectivo, para comparar y clasificar los diferentes procedimientos empleados.

En la enseñanza tradicional, la resolución de problemas daba siempre lugar a una búsqueda y una presentación de la solución individual y estereotipada (solución, operaciones). El acento puesto sobre la presentación podía entonces conducir a un cierto número de niños a presentar bien una solución falsa con el sentimiento de haberlo hecho bien.

Si bien el ciclo medio (4° y 5°) más aún que el elemental (2° y 3°) es un momento privilegiado para desarrollar la reflexión personal, la explicación y la redacción individuales de los procedimientos, pensamos que es indispensable dar a los niños la ocasión de expresar sus soluciones y establecer la validez en formas variadas y adaptadas a cada uno. La exigencia permanente de una norma demasiado estricta en cuanto a la presentación, y la presentación única para toda la clase, impide a algunos niños dar cuenta de sus procesos, esclerosa su actitud y los conduce a "maquillar" las etapas de su búsqueda, a borrar los trazos de sus ensayos o sus pruebas. Además, una redacción así aceptizada, no permite al maestro localizar las razones profundas de las dificultades de los niños.

II. Objetivos nocionales

Además de las finalidades metodológicas, las actividades de resolución de problemas tienen evidentemente objetivos ligados directamente a los contenidos matemáticos, ya sea de construir una noción nueva o que se trate de controlar el dominio y la disponibilidad del conocimiento.

II.1. Justificar la construcción de nuevos conocimientos

Si se quiere que el niño tenga posibilidad de construir por sí mismo su saber matemático, si se piensa que todo nuevo aprendizaje debe realizarse en respuesta a una pregunta, es necesario que el maestro elija cuidadosamente y organice una serie de situaciones-problemas, en las cuales, las preguntas que aparezcan permitirán a los niños construir las nociones o los procedimientos que deben apropiarse.

El niño debe tener clara conciencia de lo que justifica la elaboración, de este nuevo conocimiento. Tendrá una conciencia tanto más clara, que, para responder, habrá tratado de utilizar las "herramientas" que adquirió anteriormente y se habrá dado cuenta de la inadecuación o la imperfección (longitud de utilización, complejidad, etc...). Si el niño está frente a una situación en la cual las nociones adquiridas anteriormente son inadecuadas, le resulta indispensable construir un modelo nuevo. Este modelo, que responde a una necesidad, adquiere también un significado: es, con ese espíritu, que se presentan las situaciones que permiten la introducción de los números decimales o números racionales, cuando se pide a los niños comunicar la posición de un punto sobre una recta graduada únicamente con naturales.

En otros casos, los medios con que cuenta permiten al niño aportar una respuesta a la pregunta presentada, pero son poco eficaces (por ejemplo, una situación de "división" se resuelve con estas sucesivas); por medio de obstáculos (condiciones que se deben cumplir) sucesivos (sobre la longitud de los procedimientos, sobre la previsión de resultados que es posible hacer, etc.) el niño es conducido a elaborar una nueva técnica, y luego a perfeccionarlas; así se construyó la serie de situaciones que llevan a la elaboración del algoritmo de la división de dos naturales.

En fin, algunos problemas tienen por finalidad llevar al alumno a utilizar más o menos implícitamente algunos procedimientos utilizado, por ejemplo, propiedades de las operaciones o de las funciones numéricas. Se puede pedir, entonces, a los niños explícitar o confrontar procedimientos que utilizaron para permitir a los otros adquirirlos o mejorarlos.

II.2. Controlar el dominio y la disponibilidad de un aprendizaje

A fin de controlar y orientar su acción pedagógica, el maestro debe darse la posibilidad de saber como las nociones (o algoritmos) enseñados son reutilizados por los niños.

Para eso propone situaciones que se presten a un tratamiento utilizando esas nociones, lo que le permite observar la relación que hay entre los procedimientos utilizados realmente y los modelos enseñados. Ese es el rol que se le asigna tradicionalmente a los ejercicios o problemas llamados de aplicación, entrenamiento o revisión.

A nivel del alumno, esos ejercicios tienen también por objetivo permitirle poner a prueba las nociones o procedimientos adquiridos, de extender el campo de significación, pero también de percibir los límites. Se constata también que la disponibilidad de una operación a un mismo alumno puede variar con el tamaño de los números que intervienen o aún con ciertos índices lingüísticos que figuran en un enunciado del problema.

Análogamente, se ve que un mismo problema no se percibe de la misma forma según que intervengan números enteros o números decimales; así tal alumno que sabe utilizar la multiplicación para calcular el precio de 4 kg. de queso a $ 28 el kg., no moviliza el mismo procedimiento para calcular el precio de 2.750 kgs. de queso... (aún si domina bien la técnica de multiplicación de dos decimales); la extensión del sentido (significado) de la operación no es inmediata. Por el contrario, es frecuente ver a niños utilizar las propiedades de linealidad para tratar situaciones no lineales. Sobre este punto, los autores del reporte de "Encuesta sobre la enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria" (hecha por el INRD) notan que: los alumnos de hoy día saben igual que hace 20 años hacer las operaciones y tienen además el dominio de útiles (recursos) que no conocían sus antepasados. Por el contrario, tienen dificultades para resolver problemas, se trata de aplicar sus saber-hacer técnicos en situaciones, en las cuales sean pertinentes. La débil disponibilidad de procedimientos, constituye la información más clara de los resultados... Lo cuestionable no son tanto los conocimientos matemáticos, sino más bien su disponibilidad en situaciones variadas".

Así aparecen claramente los dos tipos de objetivos que asignamos a los problemas:

- Recursos del maestro para controlar la forma en la cual los alumnos utilizan los aprendizajes anteriores, y ocasión dada al alumno para poner a prueba sus conocimientos. Ciertas precauciones deben tomarse si se quiere trabajar realmente en esta perspectiva.
- Si los ejercicios de ejercitación, a veces son necesarios, especialmente para lograr un buen dominio de algunas técnicas, la resolución de problemas-tipos, lo único que hará, sería ilusionar al maestro y a los alumnos sobre la capacidad de éstos para utilizar recursos matemáticos.

Los niños deben enfrentase a problemas variados tanto a nivel de la presentación (enunciados, tablas de datos, situaciones reales, situaciones representadas, etc.) como a nivel de datos (insuficientes o redundantes) o aún a nivel de las preguntas que están o no formuladas (las preguntas intermedias tienen a menudo el inconveniente de imponer al alumno un procedimiento de resolución determinado).

Para evitar el efecto de "acondicionamiento" es necesario presentar problemas contra ejemplos para los cuales, la noción que acaba de estudiarse no es un recurso satisfactorio.

Según el momento en que se propone el problema, según la interpretación que hace el niño y el dominio que tiene de los estudiados anteriormente, el problema será tratado utilizando diversos procedimientos. Así, consideremos el problema siguiente: debo hacer un viaje de 3,850 km; me propongo hacerlo por etapas de 350 km aproximadamente. ¿Cuántas etapas debo hacer? Puede ser resuelto por algunos utilizando una división, otros utilizando una multiplicación complementaria (350 x — = 3,850) o una suma, o aún con razonamientos del tipo: "en 10 etapas, hago 3,500 km, me quedan 350 km por recorrer, entonces serán necesarias 11 etapas". Se constata entonces, a pesar de que habitualmente se lo percibe como un problema de división, que tal problema no permite controlar necesariamente el dominio de esa operación.

III. Elementos para una aplicación pedagógica

III.1. El rol de la situación

Las actividades propuestas a los alumnos suscitarán su interés en la medida en que le permitan involucrarse, y en la medida en que mantengan su atención hasta encontrar una solución.

Para ello, deben presentar ciertas características ya evocadas en los objetivos generales y precisados en el caso de las situaciones que llevan a la construcción de un conocimiento nuevo.

Recordemos en particular:

La posibilidad para el alumno de percibir una dificultad que tiene deseos de superar, la posibilidad de emitir hipótesis, hacer anticipaciones, tener proyectos. Todo esto implica la disponibilidad de conocimientos anteriores utilizables o de un modelo de acción. Así, en la situación que consiste en terminar el patrón de una pirámide, el niño se involucrará e invertirá esfuerzos en la medida de sus conocimientos sobre la construcción de un sólido a partir de un patrón.

La posibilidad de efectuar ensayos tan necesarios de manera de probar todas las concepciones: así, en la situación de la construcción del sólido, la inversión (invertir esfuerzos) del alumno puede depender del hecho de que se disponga o no de diferentes copias del patrón, de un material complementario como: tijeras, resistol, etc.

La posibilidad de estimar la exactitud de un resultado sin intervención exterior, sin que sea necesario recurrir a la apreciación del maestro. Las calculadoras, por ejemplo, pueden servir para situaciones-problemas que tengan las características anteriores.

Aquí, el rol del maestro, no es de dar las indicaciones que permitan resolver los problemas, sino observar los procesos de los niños, percibir los modelos que utilizan y modificar entonces las situaciones, por ejemplo, para adaptarlas a las posibilidades de los alumnos, o, por el contrario para crear condiciones de desequilibrio que necesitan la construcción de nuevos conocimientos.

III.2. El rol de la comunicación

III.2.1. Comunicación y trabajo en grupos

Un aspecto tradicional del tratamiento de un problema consiste en una búsqueda individual seguida de una corrección colectiva. Tal actividad es sin duda necesaria para la clase (verificación de la adquisición de ciertas habilidades, por ejemplo). Sin embargo, esas situaciones en las que los alumnos no pueden comunicar sino durante la corrección, no son las más favorables al aprendizaje de la resolución de problemas.

Puesto en situaciones de investigación en equipos, después de una eventual investigación individual, el alumno puede encontrar en el trabajo de sus compañeros, no solamente, elementos que completen su propia investigación, sino elementos que desmientan sus propios resultados o expresen otros puntos de vista que puedan conducir a buscar conciliaciones. Además, un resultado obtenido y propuesto por un compañero en un trabajo en grupo no es percibido de la misma manera que una afirmación del maestro. Tal resultado puede ser falso, puede ser criticado y conducir entonces al que lo presentó o al que lo criticó a presentar una argumentación.

Esto tiene varias consecuencias:

a) El alumno está en circunstancias favorables para producir y exigir pruebas: los elementos presentados por autoridad o con gran elocuencia deben dejar su lugar a las demostraciones utilizando el material o el lenguaje en el seno del equipo y luego de la clase. Para que las pruebas de tipo matemático se intercambien efectivamente en el equipo, es necesario que los alumnos no se "especialicen" y que en forma general, tengan una imagen conveniente de la construcción de su saber, esa imagen depende de las expectativas que hayan percibido en el maestro.
b) Los diferentes puntos de vista expresados en el grupo y las dificultades de soluciones expuestas se confrontan y se comparan; los alumnos pueden, en particular, observar que un mismo procedimientos puede expresarse de formas diferentes, y eventualmente reducirse (abreviarse).
c) Los alumnos están en las mejores condiciones para dominar las situaciones en las cua-

les los caminos son relativamente variados y numerosos (situaciones "abiertas" concerniendo, por ejemplo, nuevos conocimientos por elaborar, como la introducción de los decimales o la homotecia). Tales situaciones son interesantes por la variedad de preguntas que los alumnos pueden hacerse, de conceptos que puedan poner a prueba y soluciones que pueden construir; pero también son las más difíciles de dominar en investigación individual (aún seguido de una síntesis general); en efecto, los niños que hayan encontrado elementos interesantes sólo pueden comunicarlos en el momento de la síntesis general que no presenta necesariamente las mejores condiciones de intercambios y de evolución (grupo-clase importante limita las preguntas de los alumnos que no han comprendido correctamente la información, por ejemplo). En investigación por equipo, por el contrario los alumnos que poseen elementos de solución pueden proponerlos, y eventualmente hacerlos compartir más fácilmente por sus compañeros.(...)

Notas de la lectura:

[1]Artículo del IREM de Grenoble: "¿Cuál es la edad del capitán?", en Boletín APMEP No. 323.

[2] Ver "L'attention" J.F. Richard PUF 1980.

TEMA 3. *Los problemas en el constructivismo*

LECTURA: APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

PRESENTACIÓN

En la lectura, el autor comienza señalando que las matemáticas se han construido como respuesta a preguntas que han sido traducidas en problemas, sin embargo, aconseja el uso prudente de situaciones constructivistas ya que el contexto escolar no es igual al contexto histórico.

Señala la importancia de que el conocimiento a construir esté cargado de significado, que tenga sentido para el alumno, y afirma que "haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas" permitirá a los alumnos construir con sentido.

Apoyándose en el concepto de "contrato didáctico" y en las relaciones que se establecen entre maestros-alumnos-saber describe tres modelos de aprendizaje, entre ellos el correspondiente al constructivismo.

Es importante enfatizar el importante hecho señalado por el autor de que "ningún docente utiliza exclusivamente uno de los modelos; que el acto de pedagógico en toda su complejidad utiliza elementos de cada uno de los modelos..." mismo hecho señalado por César Coll en su concepto de "andamiaje". (Ver Antología Básica de Corrientes Pedagógicas Contemporáneas, área básica, línea Psicopedagógica).

Afirma que para un análisis más completo de éstos modelos, habría que considerar tres ejes de estudio: los errores de los alumnos; la evaluación, y la resolución de problemas.

Resalta la importancia de éste último: ¿Qué es un problema para el maestro? ¿Cuándo utiliza problemas, en qué momentos del aprendizaje? ¿Con qué fin? (Cuestiones que antes hemos examinado).

Finalmente presenta una serie de argumentos apoyados en resultados de investigación, que pueden ayudar al profesor en la elección de un modelo de enseñanza-aprendizaje.

Para el estudio de este mismo tema se presenta en la antología complementaria las lecturas:

"La didáctica de las matemáticas" de Grecia Gálvez.

"Una visión general de las matemáticas en Francia" de M. L. Peltier.

Los contenidos de estas lecturas constituyen perspectivas complementarias y también enriquecedoras para el tema en cuestión, muestran también fuentes actuales donde encontrar otros elementos conceptuales, teóricos y metodológicos que podrían contribuir en la innovación de su práctica docente.

Resulta importante señalar en éste momento que una situación didáctica de construcción de conocimiento puede ser desarrollada en el aula, no sólo con base en un problema sino también mediante la utilización de un juego.

La historia registra el hecho de que el llamado "método de las construcciones geométricas con herramientas Euclidianas", que puede concebirse o interpretarse como un juego que era jugado con un compás, un borde rectilíneo para el dibujo de rectas y 2 sencillas reglas o normas y que fue desarrollado por los griegos desde aproximadamente el siglo VI A.C. propició la construcción de un vasto cuerpo de conocimiento matemático durante más de 2000 años.

Como originador de una situación didáctica de construcción de conocimiento, el juego recupera varios elementos característicos del diseño de tales situaciones, a saber:

- *Especificidad del tema objeto de construcción, esto es, existen o pueden diseñarse juegos específicos para el tratamiento didáctico de números, geometría, probabilidades, etc.*
- *La motivación implicada en una situación didáctica que utiliza un juego es intrínseca a la misma posee significatividad psicológica, apela a la satisfacción de necesidades afectivas, lúdicas o cognoscitivas.*

*Roland Charnay. "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en: PARRA, Cecilia y Sáiz, Irma (compiladoras). *Didáctica de matemáticas.* Buenos Aires, Ed. Paidós, 1994. pp. 51-63.

—El juego constituye un recurso que promueve la actividad, esto es, la interacción de los estudiantes con su entorno a través de los medios materiales asociados al desarrollo del juego. Está relacionado así con el periodo de las llamadas operaciones concretas de Piaget.

—El juego promueve la interacción social derivada de los conflictos, colaboraciones y comunicaciones que pueden surgir al interior de los mismos, y propicia por consiguiente, el desarrollo cognitivo asociado a dicha interacción.

En éste curso no se ha incluido el juego, debido esencialmente a dos situaciones:

—En sus diversos "paquetes didácticos" la SEP proporciona material relevante para éste tópico.

—Nuestro objetivo básico en éste curso lo constituye el estudio de lo concerniente a los problemas y su resolución, y el material asociado a estos temas resulta sumamente extenso.

APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[1]

Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo es construido.

BACHERLAD,
La formación del espíritu científico

¿LECCIONES DE LA HISTORIA?

La historia de la matemática, en la compleji dad de su evolución y de sus revoluciones, ilustra bien esta cita de Bachelard. Las matemáticas se han construido como respuesta a preguntas que han sido traducidas en otros tantos problemas. Estas preguntas han variado en sus orígenes y en sus contextos: problemas de orden doméstico (división de tierras, cálculo de créditos...); problemas planteados en estrecha vinculación con otras ciencias (astronomía, física...); especulaciones en apariencia "gratuitas" sobre "objetos" pertenecientes a las matemáticas mismas, necesidad de organizar elementos ya existentes, de estructurarlos, por ejemplo, por las exigencias de la exposición (enseñanza...), etcétera.

De más está decir que la actividad de la resolución de problemas ha estado en el corazón mismo de la elaboración de la ciencia matemática. "¡Hacer matemática es resolver problemas!" no temen afirmar algunos.

Pero esta elaboración no se realiza sin dificultad. Los problemas a menudo ofrecen resistencia; las soluciones son casi siempre parciales, aun sin destellos geniales provocan avances espectaculares... Que a veces no son reconocidos desde el principio "En el uso frecuente de textos originales y también en el de obras generales -suma de saberes históricamente acumulados en este domino- hemos descubierto un tejido complejo y difuso hecho de conjeturas, de dudas, de *gaffe*, de modelos concurrentes, de instituciones fulgurantes y también de momentos de axiomatización y síntesis", escriben A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffer en el prefacio de su libro.

¿Pueden estas consideraciones (muy esquemáticas) sobre el origen del conocimiento matemático y sobre las condiciones de su elaboración encontrar eco en una reflexión sobre la cuestión del aprendizaje matemático en el contexto escolar? La respuesta debe ser prudente y cuidadosa: las herramientas o nociones elaboradas en una época determinada lo han sido, en efecto, en un contexto cultural, socioeconómico..., que no es aquel en el que viven nuestros alumnos. Resta decir que son los problemas que les han dado origen (y los que ha planteado a continuación) los que han dado sentido a las matemáticas producidas. Esta es, tal vez, la principal lección que tener en cuenta en la enseñanza.

CONSTRUIR EL SENTIDO...

Uno de los objetivo esenciales (y al mismo tiempo una de la dificultades principales) de la enseñanza de la matemática es precisamente que lo que se ha enseñado esté cargado de significado, tenga sentido para el alumno..

Para G. Brousseau (1983),

> el sentido de un conocimiento matemático se define:
>
> —no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución,
> —sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.

Agreguemos que la construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles:

- un nivel "externo": ¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?
- un nivel "interno": ¿cómo y por qué funciona tal herramienta? (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?).

La cuestión esencial de la enseñanza de la matemática es entonces: ¿cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno?

El alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas.

Y es, en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí misma.

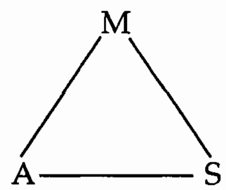
ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE

Se plantea entonces al docente la elección de una estrategia de aprendizaje. Esta elección (que cada uno hace al menos implícitamente) está influida por numerosas variables: el punto de vista del docente sobre la disciplina enseñada (¿qué es la matemática?, ¿qué es hacer matemática?), su punto de vista sobre los objetivos generales de la enseñanza y sobre aquellos específicos de la matemática, su punto de vista sobre los alumnos (sus posibilidades, sus expectivas), la imagen que el docente se hace de la demanda social o también de la de los padres...

Para describir algunos modelos de aprendizaje, se puede apoyar en la idea de "contrato didáctico", tal como Brousseau lo ha definido:

> conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumnos-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?...

Así, una situación de enseñanza puede ser observada a través de las relaciones que se "juegan" entre esos tres polos: maestro, alumno, saber:

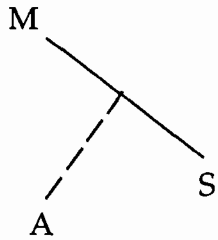


analizando:

—la distribución de los roles de cada uno,
—el proyecto de cada uno,
—las reglas del juego: ¿qué está permitido, qué es lo que realmente se demanda, qué se espera, qué hay que hacer o decir para "mostrar qué se sabe"...?

Muy esquemáticamente se describirán tres modelos de referencia:

1. *El modelo llamado "normativo" (centrado en el contenido)*

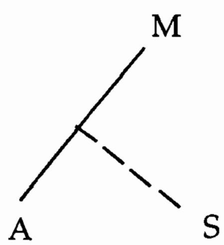


Se trata de aportar, de comunicar un saber a los alumnos. La pedagogía es entonces el arte de comunicar, de "hacer pasar" un saber.

— El maestro muestra las nociones, las introduce, provee los ejemplos.
— El alumno, en primer lugar, aprende, escucha, debe estar atento; luego imita, se entrena, se ejercita, y al final aplica.
— El saber ya está acabado, ya construido.

Se reconocen allí los métodos a veces llamados dogmáticos (de la regla a las aplicaciones) o mayeúticos (preguntas/respuestas).

2. *El modelo llamado "incitativo" (centrado en el alumno)*

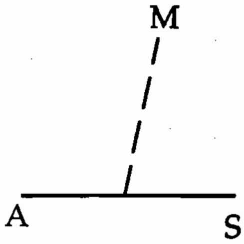


Al principio se le pregunta al alumno sobre sus intereses, sus motivaciones, sus propias necesidades, su entorno.

— El maestro escucha al alumno, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demanda, lo remite a herramientas de aprendizaje (fichas), busca una mejor motivación (medio: cálculo vivo de Freinet, centros de interés de Decroly).
— El alumno busca, organiza, luego estudia, aprende (a menudo de manera próxima a lo que es la enseñanza programada).
— El saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (la estructura propia de este saber pasa a un segundo plano).

Se reconocen allí las diferentes corrientes llamadas "métodos activos".

3. *El modelo llamado "aproximativo" (centrado en la construcción del saber por el alumno)*



Se propone partir de "modelos", de concepciones existentes en el alumno y "ponerlas a prueba" para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas.

— El maestro propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones), organiza las diferentes fases (investigación, formulación, institucionalización).
— Organiza la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (notaciones, terminología).
— El alumno ensaya, busca, propone soluciones, las confronta con las de sus compañeros, las defiende o las discute.
— El saber es considerado con su lógica propia.

Notemos que ningún docente utiliza exclusivamente uno de los modelos; que el acto pedagógico en toda su complejidad utiliza elementos de cada uno de los modelos..., pero que, a pesar de todo, cada uno hace una elección, consciente o no y de manera privilegiada, de uno de ellos.

Agreguemos que el estudio de estos modelos provee una buena herramienta de análisis de las situaciones didácticas y de reflexión para los docentes en formación.

Tres elementos de la actividad pedagógica se muestran privilegiados para diferenciar estos tres modelos y reflexionar sobre su puesta en práctica:

— El comportamiento del docente frente a los errores de sus alumnos: ¿qué interpretación hace de ellos?, ¿cómo interviene?, ¿para hacer qué?, ¿qué demanda, entonces a sus alumnos?
— Las prácticas de utilización de la evaluación: ¿de qué sirve la evaluación?, ¿en qué momen-

to interviene en el proceso de aprendizaje?, ¿bajo qué formas?

— El rol y el lugar que el maestro asigna a la actividad de resolución de problemas: ¿qué es para él un problema?, ¿cuándo utiliza problemas, en qué momentos del aprendizaje?, ¿con qué fin?

A continuación, nos interesamos esencialmente en este tercer punto. Para esto, proponemos un esquema, inspirado en un artículo de R. Champagnol (Revue Française de Pédagogie) *que resume las diversas posiciones respecto a la utilización de la resolución de problemas en relación con los tres modelos de aprendizaje descritos anteriormente.*

1) *El problema como criterio del aprendizaje* (modelo llamado "normativo")

mecanismos	• lecciones (adquisición) • ejercicios (ejercitación)
sentidos	• problemas (utilización de los conocimientos para el alumno, control para el maestro)

—lo que conduce a menudo a estudiar tipos de problemas: confrontado a un nuevo problema, el alumno busca si ya ha resuelto uno del mismo tipo.

— El modelo de referencia de numerosos manuales, siendo la idea subyacente que es necesario partir de lo fácil, de lo simple, para acceder a lo complejo, y que un conocimiento complejo puede ser, para el aprendizaje, descompuesto en una serie de conocimientos fáciles de asimilar y que, finalmente, todo aprendizaje debe ir de lo concreto a lo abstracto.

2) *El problema como móvil del aprendizaje* (modelo llamado "incitativo")

motivación	• situación basada en lo vivido
mecanismo	• aporte de conocimientos • práctica, ejercicios
resignificación	• problemas

— al principio, se desea que el alumno sea un "demandante activo, ávido de conocimientos funcionalmente útiles".

— pero las situaciones "naturales" son a menudo demasiado complejas para permitir al alumno construir por sí mismo las herramientas y, sobre todo, demasiado dependientes de "lo ocasional" para que sea tenida en cuenta la preocupación por la coherencia de los conocimientos.

3) *El problema como recurso de aprendizaje* (modelo llamado "apropiativo")

La resolución de problemas como *fuente, lugar* y *criterio* de la elaboración del saber.	acción	• situación-problema (el alumno busca un procedimiento de resolución)
	formulación validación	• formulación-confrontación de los procedimientos, puesta a prueba
		• nueva situación con diferentes obstáculos: nuevos procedimientos, etcétera.
	institucionalización	• nueva herramienta • ejercitación • síntesis, lenguaje convencional • problemas: evaluación para el maestro, resignificación para el alumno

— es principalmente a través de la resolución de una serie de problemas elegidos por el docente como el alumno construye su saber, en interacción con los otros alumnos.
— la resolución de problemas (y no de simples ejercicios) interviene así desde el comienzo del aprendizaje.

OPCIONES A FAVOR DE UNA ELECCIÓN

Esta opciones se apoyan en resultados de investigación y dependen, por una parte, de elecciones ideológicas. Ellas se basan en la pregunta "¿Cómo aprenden los alumnos?".

1) *Los conocimientos no se apilan, no se acumulan,* sino que pasan de estados de equilibrio a estados de desequilibrio, en el transcurso de los cuales los conocimientos anteriores son cuestionados. Una nueva fase de equilibrio corresponde entonces a una fase de reorganización de los conocimientos, donde los nuevos saberes son integrados al saber antiguo, a veces modificado (cf. Piaget).

Así, un nuevo saber puede cuestionar las concepciones del alumno originadas por un saber anterior: por ejemplo, el estudio de los decimales debería conducir al alumno a cuestionar la idea de que la multiplicación "agranda" siempre (idea que él ha podido elaborar estudiando los naturales).

Del mismo modo, un saber adquirido puede hacerse fracasar fácilmente aun ante mínimas modificaciones de las variables de la situación: así, G. Vergnaud (1981) ha mostrado que la "noción de adición" o las estructuras aditivas no son totalmente dominada hasta muy tarde...

2) *El rol de la acción en el aprendizaje*

Piaget también ha subrayado el rol de "la acción" en la construcción de conceptos. Por supuesto, se trata de la actividad propia del alumno que no se ejerce forzosamente en la manipulación de objetos materiales, sino de una acción con una finalidad, problematizada, que supone una dialéctica pensamiento-acción muy diferente de una simple manipulación guiada, tendiente a menudo a una tarea de constatación por parte del alumno... Hay que subrayar aquí el rol de la *anticipación*: la actividad matemática consiste a menudo en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permite anticipar el resultado de una acción no realizada todavía o no actual sobre la cual se dispone de ciertas informaciones.

3) *Sólo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver...*

...es decir cuando reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta. Aquí también podemos recurrir a Piaget, para quien el conocimiento no es ni simplemente empírico (constataciones sobre el medio) ni preelaborado (estructuras innatas), sino el resultado de una interacción sujeto-medio (cf. arriba punto 2). Lo que da *sentido* a los conceptos o teorías son los problemas que ellos o ellas permiten resolver.

Así, es la resistencia de la situación la que obliga al sujeto a acomodarse, a modificar o percibir los límites de sus conocimientos anteriores y a elaborar nuevas herramientas (idea de conflicto cognitivo). Habrá que tener esto en cuenta para la elección de las situaciones.

En la misma perspectiva, se tiende a preferir la motivación propia de la actividad propuesta (dificultad que se desea salvar, franquear) a la motivación externa (necesidades de la vida corriente, observaciones) cuyo interés, sin embargo, no se debe descartar: el problema es entonces percibido como un desafío intelectual.

4) *Las producciones del alumno son una información sobre su "estado de saber"*

En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia de saber sino, más bien, a una manera de conocer (que a veces ha servido en otros contextos) contra la cual el alumno deberá construir el nuevo conocimiento. El alumno no tiene jamás la cabeza vacía: no puede ser considerado como una página en blanco sobre la cual será suficiente imprimir conocimientos correctos y bien enunciados.

5) *Los conceptos matemáticos no están aislados*

Hay que hablar más bien de campos de conceptos entrelazados entre ellos y que se consolidan mutuamente: de ahí la idea de proponer a los alumnos campos de problemas que permitan la construcción de estas redes de conceptos que conviene elucidar previamente (tarea que pasa a ser fundamental...).

6) *La interacción social es un elemento importante en el aprendizaje*

Se trata tanto de las relaciones maestro-alumnos como de las relaciones alumnos-alumnos, puestas en marcha en las actividades de formulación (decir, describir, expresar), de prueba (convencer, cuestionar) o de cooperación (ayuda, trabajo cooperativo): idea de conflicto sociocognitivo, sobre todo entre pares.

EN EL TRIÁNGULO DOCENTE-ALUMNOS-PROBLEMA

Trataremos de precisar las características de estas relaciones en el cuadro de un aprendizaje que se apoya en la resolución de problemas.

Relación entre la situación-problema y los alumnos:

— La actividad debe proponer un verdadero *problema por resolver* para el alumno: debe ser comprendido por todos los alumnos (es decir que éstos puedan prever lo que puede ser una respuesta al problema).
— Debe permitir al alumno *utilizar los conocimientos anteriores...,* no quedar desarmado frente a ella.
— Pero, sin embargo, debe ofrecer una *resistencia suficiente* para llevar al alumno a hacer evolucionar los conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos (problema abierto a la investigación del alumno, sentimiento de desafío intelectual).
— Finalmente, es deseable que *la sanción (la validación) no venga del maestro, sino de la situación misma.*

Relación docente-alumno

¿Qué percepción tiene el alumno de las *expectativas del maestro*? Las relaciones pedagógicas deben conducir a los alumnos a percibir que les es más conveniente establecer ellos mismos la validez de lo que afirman que solicitar pruebas a los otros.

— Una distinción neta debe ser establecida entre *los aportes del docente y la pruebas que los alumnos aportan.*

Relación maestro-situación

— Le corresponde al maestro ubicar la situación propuesta en el cuadro del aprendizaje apuntado, *distinguir el objetivo inmediato de los objetivos más lejanos,* elegir ciertos parámetros de la situación (idea de "variables didácticas" de la situación).
— *El conocimiento considerado debe ser el más adaptado* para resolver el problema propuesto (desde el punto de vista de los alumnos).
— Le corresponde también observar las incomprensiones, *los errores significativos,* analizarlos y tenerlos en cuenta para la elaboración de nuevas situaciones.
— Le corresponde, en fin, *provocar o hacer la síntesis.*

¿QUÉ PROBLEMAS ELEGIR? ¿QUÉ PUESTA EN MARCHA PEDAGÓGICA?

Una precisión ante todo: *el término "problema"* utilizado aquí no se reduce a la situación propuesta (enunciado-pregunta). Se define, más bien, como una terna: situación-alumno-entorno. Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una determinada situación que "hace problema" para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar. Por fin, el entorno es un elemento del problema, en particular las condiciones didácticas de la resolución (organización de la clase, intercambios, expectativas explícitas o implícitas del docente).

Sin duda conviene diferenciar *los objetivos de la actividad de resolución de problemas:*

— Objetivos de orden "metodológico": es una palabra, "aprender a resolver problemas, a investigar". El objetivo está, de alguna manera, en la actividad misma (cf. práctica del "problema abierto" descrito por el IREM de Lyon);
— Objetivos de orden "cognitivo": se apunta a un conocimiento (noción, algoritmo) a través de la actividad de resolución de problemas. Se puede, entonces, desde este punto de vista, distinguir entre los problemas que se sitúan en la fuente de un nuevo aprendizaje y aquellos que se utilizan como problemas de resignificación.

Desde esta última óptica, se pueden considerar algunas cuestiones que se le plantean al maestro respecto de un conocimiento dado:

— Elección de enseñar una determinada concepción del conocimiento considerado (problema de transposición didáctica): ¿cuáles son las concepciones tomadas en cuenta (estado actual de este conocimiento, de su enseñanza, estados anteriores, evolución histórica, diferentes aspectos): cuestiones de epistemología; cuáles son las concepciones posibles con los alumnos de un determinado nivel de enseñanza en relación con los niveles precedentes y siguientes?, ¿de qué tipo de saber se trata (formal, descriptivo u operativo, funcional)?
— Elección de la situación o más bien de la serie de situaciones a proponer a los alumnos. La idea de obstáculo es aquí importante: sin los conocimientos anteriores adecuados para resolver el problema no hay interés por movilizar una nueva herramienta. La elección es difícil: es necesario no desmovilizar al alumno con una dificultad demasiado grande ni dar la impresión de "derribar puertas abiertas con una excavadora".
— Elección de una puesta en marcha pedagógica. No hay soluciones tipo, pero se puede anticipar con la mayor parte de los didáctas actuales una estrategia de referencia que comprenda varias etapas: investigar individualmente y/o en grupos, formular oralmente o por escrito, validar, institucionalizar (identificación del saber, convenciones para el lenguaje, las notaciones), evaluar, proceso que puede extenderse en varias sesiones e incluso utilizar varias situaciones problemas.

Nota de la lectura:

1. En *Grand* N, revista de matemática, ciencias y tecnología para los maestros de la escuela primaria y pre-primaria, nº 42, enero 1988, Documento CRDP, Grenoble, Francia. Traducción del francés de Santiago Ruiz en colaboración con Gema Fioriti y María Elena Ruiz, y publicado con autorización del CRDP (Centre Regional de Documentation Pédagogique).

TEMA 4. *La enseñanza problémica*

LECTURA: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA DE LA ENSEÑANZA PROBLÉMICA*

PRESENTACIÓN

Inicialmente deseamos enfatizar que en ésta lectura se presenta un breve panorama general que es sólo introductorio a la enseñanza problémica, ya que un tratamiento más completo de la misma podría requerir de un curso completo.

La enseñanza problémica intenta cambiar las actitudes pasivas y receptivas de los estudiantes por otras que manifiesten independencia intelectual, creatividad y acción.

Los autores expresan el concepto, significación y funciones de la enseñanza problémica y la contrastan con la enseñanza tradicional.

En congruencia con los propósitos del curso, de ésta lectura pueden estudiarse, analizarse y quizá recuperarse, algunos elementos teóricos, metodológicos, psicológicos y didácticos de la teoría de la enseñanza problémica.

En la exposición pueden advertirse semejanzas y diferencias de la enseñanza problémica con el constructivismo, en particular resulta interesante contrastar el papel desempeñado por la "ayuda pedagógica" dentro de las respectivas Pedagogías.

Concluimos ésta presentación señalando que la enseñanza problémica no es privativa de la asignatura de matemáticas y que puede ser utilizada también en otros cursos de la escuela.

En la antología complementaria se presenta un texto de Alberto F. Labarrere Sarduy titulado "Condiciones psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problema matemáticos con texto".

En ésta lectura se presentan algunos resultados de una investigación acerca de la enseñanza de la solución de problemas, y se muestran elementos que usualmente integran la "ayuda pedagógica" en un contexto de enseñanza problémica.

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA DE LA ENSEÑANZA PROBLÉMICA

INTRODUCCIÓN

Los elevados objetivos de la educación y la determinación, a partir de ellos, del nuevo contenido de la enseñanza, no garantizan automáticamente el cumplimiento de las exigencias que la sociedad hace a la escuela en cuanto a la formación multilateral de nuestros niños y jóvenes. Paralelamente, ha sido necesario llevar a cabo una ardua lucha por la eliminación de algunos criterios formales que han subsistido durante muchas décadas en torno a la aplicación de las categorías pedagógicas de "método" y de "organización de la enseñanza". (...)

Todo maestro debe estar consciente de que elevar la calidad de la enseñanza significa, entre otros aspectos importantes, la búsqueda constante de nuevas vías que conduzcan a la eliminación del tipo de enseñanza que promueve el aprendizaje dogmático y reproductivo, en que maestros y alumnos se contentan con la simple repetición de memoria, de definiciones, sin que exista la comprensión consciente del significado de éstos conceptos, lo que impide, por tanto, descubrir sus características esenciales, sus regularidades, los nexos con otros y su aplicación creadora.

Como es lógico, la memorización resulta importante en el proceso de aprendizaje, pero ésta tiene que transformarse cada vez más de mecánica en consciente. Este tipo de fijación tiene que lograrse a través de la participación activa e independiente del alumno en el descubrimiento del nuevo conocimiento, en la comprensión de

*Asela de los Santos Tamayo et al. "Introdución al estudio de la teoría de la enseñanza problémica", en: *Seminario Nacional a dirigentes, metodólogos e inspectores de las direcciones provinciales y municipales de educación.* La Habana, Cuba, Ministerio de Educación, 1984. pp. 385 - 423.

los elementos que le son característicos, en la revelación y superación de las contradicciones que surgen en el camino del saber. La fijación del contenido tiene que ser el resultado del desarrollo de las capacidades de: observar, analizar, sintetizar, clasificar, sistematizar y generalizar.

El maestro, consciente de su alta responsabilidad, tiene que luchar tesoneramente por penetrar cada vez más en la esencia del proceso de enseñanza que él debe dirigir, por evitar todo tipo de rutina y esquematismo en su labor cotidiana, por eliminar las dificultades que han sido características del tipo tradicional de enseñanza, y que conducen al aprendizaje netamente memorístico, que mata la iniciativa, el deseo de saber, la inteligencia y promueve el desinterés, la pasividad y la apatía.

Muy objetivamente caracterizó Martí estos vicios de la escuela, que observó en Nueva York a fines del siglo XIX, cuando expresó:

> "De memoria. Así rapan los intelectos como las cabezas. Así sofocan la persona del niño, en vez de facilitar el movimiento y expresión de la originalidad que cada criatura trae en sí; así producen una uniformidad repugnante y estéril y una especie de librea de las inteligencias".[1]

Y con respecto al camino a seguir para erradicar estos males, planteó:

> "El remedio está en cambiar bravamente la instrucción primaria de verbal en experimental, de retórica en científica, de enseñar al niño a la vez que el abecedario de las palabras el abecedario de la naturaleza... Hombres vivos, hombres directos, hombres independientes, hombres amantes, eso han de hacer las escuelas, que ahora no hacen esto"[2]

Todavía continúa siendo preocupación de los pedagogos trabajar por el perfeccionamiento de las formas que conduzcan a educar esos hombres vivos, amantes e independientes que nos planteó Martí. Muchas son las investigaciones que se llevan a cabo sobre las vías que se deben utilizar para cambiar la actitud puramente pasiva y receptiva del escolar por una actitud independiente, creadora y activa. Una de ellas es precisamente la enseñanza problémica.

1. Concepto, significación y funciones de la enseñanza problémica.

En la actualidad resulta cada vez más constante la aparición de numerosos artículos y publicaciones que abordan aspectos relacionados con la denominada enseñanza problémica.

Muchos didáctas y especialistas de las metodologías de las distintas disciplinas dirigen su trabajo investigativo hacia éste aspecto. Por la importancia de los resultados que se derivan de éstas investigaciones, es necesario que el maestro conozca el concepto y la significación de lo que para algunos autores constituye un nuevo tipo de enseñanza; para otros, un sistema de métodos y para algunos, un principio de trabajo permanente.

Lo importante es que nuestros maestros sepan que ésta dirección de la enseñanza encierra una calidad nueva que reúne la experiencia positiva acumulada por la ciencia pedagógica y se capaciten para aprovechar sus potencialidades instructivas y educativas, al dirigir el aprendizaje de sus alumnos, pero sin dejar de combinarlas con otras formas ya tradicionales de su quehacer diario. Por ello comenzamos con el análisis de su concepto y significación.

1.1 Concepto y significación de la enseñanza problémica.

La idea de desarrollar el pensamiento creador e independiente en los escolares no es nueva en la ciencia Pedagógica. Por ejemplo: Komenius (1592-1670), Pestalozzi (1746-1827), Diesterverg (1790-1866), Ushinski (1824-1870) y otros grandes pedagogos la expresaron en sus obras, aun cuando en ocasiones no pudieron mostrar la vía para alcanzarlo, pues la base gnoseológica en que fundamentaban la teoría de la enseñanza les impidió ver el carácter dialéctico de éste proceso. (...)

Desde la década del 60 en la Unión Soviética*, y en otros países socialistas se han publicado una serie de trabajos en los que se observa el incremento de los esfuerzos por que la actividad de aprendizaje tenga un carácter más creador e independiente, porque la enseñanza tenga en las circunstancias en que es recomendable y necesario un carácter más problémico.

La esencia de la enseñanza problémica consiste según Danilov "en que los alumnos guiados por el profesor, se introducen en el proceso de búsqueda de la solución de problemas nuevos para ellos, gracias a lo cual, aprenden a adquirir independientemente los conocimientos, a emplear los conocimientos antes asimilados y a dominar la experiencia de la actividad creadora.[3]

Al emplearse éste tipo de enseñanza, se revela al alumno el camino para la obtención del concepto, las contradicciones que surgen en éste proceso y las vías para su solución.

El alumno es partícipe directo en la adquisición del conocimiento. Este tipo de enseñanza contribuye a que el alumno, de objeto de influencias pedagógicas, se convierta también en sujeto activo de éste proceso.

Majmutov nos define también el concepto de aprendizaje problémico, de la manera siguiente:

> "El aprendizaje problémico es la actividad docente cognoscitiva de los alumnos, encaminada a la asimilación de conocimientos y modos de actividad mediante la percepción de las explicaciones del maestro, en las condiciones de una situación problémica, el análisis independiente (o con ayuda del maestro) de situaciones problémicas, la formulación de problemas y su solución mediante el planteamiento (lógico e intuitivo) de suposiciones e hipótesis, su fundamentación y demostración, así como mediante la verificación del grado de corrección de las soluciones. Todo éste trabajo mental de los escolares se realiza bajo la dirección del maestro, y garantiza la formación de una personalidad intelectualmente activa (...)".[4]

Para dirigir un aprendizaje como el que ha sido descrito anteriormente resulta necesario que el maestro sea un creador y no un simple expositor que toma a sus alumnos como objetos pasivos de sus influencias pedagógicas. El maestro tiene que ser el guía que estimula a sus alumnos a aprender, a descubrir y sentirse satisfechos por el saber acumulado. Tiene que dirigir su actividad de forma tal que sus educandos se conviertan en sujetos activos del proceso pedagógico. (...)

1.2 Funciones de la enseñanza problémica.

Las ideas planeadas hasta aquí sobre el concepto y la significación de la enseñanza problémica, constituyen una condición previa necesaria y esecial para poder precisar las funciones que este tipo de enseñanza debe cumplir en la escuela (...). Entre las funciones fundamentales que la enseñanza problémica debe cumplir se encuentran:

a) Garantizar que paralelamente a la adquisición de conocimientos, se desarrolle un sistema de capacidades y hábitos necesarios para la actividad intelectual. (...)
b) Propiciar la asimilación de conocimientos al nivel de su aplicación creadora y que no se estanque en el nivel reproductivo.
c) Enseñar al alumno a aprender, al pertrecharlo de los métodos del conocimiento y del pensamiento científico.
ch) Contribuir a capacitar al educando para el trabajo independiente, al adiestrarlo en la revelación y solución de las contradicciones que se presentan en el proceso cognoscitivo.
d) Promover la formación de motivos para el aprendizaje y de las necesidades cognoscitivas.
e) Contribuir a la formación de convicciones, cualidades del carácter, hábitos y normas de conducta (...).

f) Crear en el alumno cualidades como la perseverancia, la tenacidad, el afán por lograr un objetivo, el deseo de investigar, de saber y de demostrar la veracidad del conocimiento adquirido (...).

El cumplimiento de éstas funciones resulta vital en la etapa actual de desarrollo de la revolución científico-técnica, en la que es característico el ritmo acelerado en que se producen los descubrimientos científicos y su aplicación práctica casi inmediata a los procesos productivos. Ello exige pertrechar al ciudadano (...), no sólo de conocimientos, sino también de los métodos y de la técnicas de la actividad mental que le permitan aprender por si mismo.

La escuela no puede dar a los alumnos el gran volumen de conocimientos acumulados por la humanidad. Los planes de estudio, programas y libros de texto se estructuran de forma que los alumnos puedan asimilar las bases esenciales de las ciencias. Por eso es una tarea primordial del maestro prepararlos para la vida, para el autodidactismo, para que en su actividad profesional sean capaces de continuar profundizando en el saber acumulado y de incorporar cada día a su experiencia laboral los nuevos avances y descubrimientos científicos. (...)

2. Base metodológica de la teoría de la enseñanza problémica.

La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico e histórico constituye la base metodológica de la teoría de la enseñanza problémica, (...)

Según sea la base gnoseológica (teoría del conocimiento), así será en última instancia la teoría de la enseñanza. Una teoría idealista del conocimiento siempre fundamenta una teoría idealista de la enseñanza, aunque a veces ésta relación no se haga evidente.

La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico es un fundamento verdaderamente científico de la teoría de la enseñanza, y con ello, por supuesto, de la enseñanza problémica.

Para analizar acertadamente el proceso de aprendizaje, resulta decisivo el estudio de ésta teoría, y para poder avanzar en la comprensión del proceso interno de obtención de conocimientos, es particularmente importante el estudio profundo de las categorías de "reflejo" y de "contradicción", entre otras.

En el marco de éste tema es imposible llevar a cabo un análisis semejante, pues no podría realizarse con la profundidad requerida. No obstante, el maestro debe conocer la necesidad de estudiar detenidamente ambas categorías.

La enseñanza como fenómeno de la realidad objetiva es un proceso que se desarrolla dialécticamente. Este proceso se subordina a todas las leyes de la dialéctica. Es un proceso internamente contradictorio, en el cual existen aspectos que se contraponen: la enseñanza y el aprendizaje, la forma y el contenido, la esencia y el fenómeno, lo particular y lo general, lo viejo y lo nuevo.

Sólo deseamos destacar en éste tema dos ideas importantes:

La primera se refiere a la crítica que es necesario hacer a los análisis simplistas, que realizan algunos pedagogos, de la teoría leninista del reflejo. En algunos casos, el fenómeno del reflejo se relaciona fundamentalmente con la naturaleza del conocimiento sensorial. En éste sentido no siempre se considera de la forma debida que el reflejo humano puede ser tanto directo (sensorial) como indirecto (lógico).

Majmutov señala al respecto:

> "El reflejo psíquico del mundo por el hombre durante el proceso del conocimiento, es anticipado y transformador. No obstante, el nivel del reflejo y el grado de transformación se diferencian en las distintas etapas del conocimiento. La creatividad y el reflejo creador de un distinto nivel, pueden ponerse de manifiesto, tanto en la etapa del conocimiento sensorial, como en el proceso de la actividad práctica del hombre.[5]

Como se observa, la esencia del reflejo humano es su carácter creador. Este aspecto de la creatividad en las diferentes etapas y los distintos niveles del reflejo creador, tiene que considerarlo el maestro para aprovechar en todas las etapas del proceso cognoscitivo las potencialidades de la enseñanza problémica.

Además debe considerarse que la base del conocimiento es el reflejo, que se caracteriza por ser psíquico y anticipado. Este reflejo de la realidad determina una importante función de la conciencia: la determinación del objetivo. Esta función es precisamente la diferencia, la conducta del hombre de la de los animales. Al final del proceso del trabajo se obtiene un resultado que ha sido representado por el hombre desde el inicio del proceso, de manera ideal. Por consiguiente, el reflejo psíquico anticipado de la realidad constituye el fundamento de la determinación del objetivo y de la actividad creadora y transformadora de la personalidad.

La segunda idea se refiere a la necesidad de que el maestro nunca pierda de vista que la enseñanza como fenómeno de la realidad objetiva es un proceso que se desarrolla dialécticamente. En él se manifiestan, entre otras, las contradicciones que existen entre los nuevos conocimientos y las habilidades que adquiere el alumno y las que ya posee, entre el nivel de contenido de los programas y las posibilidades reales que poseen los alumnos para su asimilación; entre los conocimientos teóricos y la capacidad para aplicarlos en la práctica; entre las explicaciones del maestro y su comprensión por los alumnos.

Danilov llegó a la conclusión de que la contradicción que constituye la fuerza motriz del proceso docente es precisamente la que se manifiesta entre las tareas prácticas y docentes que se plantean al alumno durante el proceso de enseñanza y el nivel real de los conocimientos, capacidades y habilidades, y los restantes componentes de su personalidad.

El propio Danilov señala que para que ésta contradicción se convierta realmente en la fuerza motriz del aprendizaje, el alumno tiene que comprender las dificultades y la necesidad de superarlas; éstas dificultades tienen que estar en correspondencia con sus posibilidades cognoscitivas y lo que es muy importante, la contradicción que constituye la fuerza motriz de la enseñanza, tiene que ser descubierta e interiorizada por el propio alumno, lo que lo impulsa a la búsqueda de su solución.

El conocimiento es un complejo proceso de naturaleza contradictoria. En la enseñanza se deben utilizar las contradicciones dialécticas como fuerzas motrices para el proceso de aprendizaje. Saber hallar las contradicciones y ver en lo común lo singular es una manifestación muy importante del espíritu creador. Es necesario capacitar al alumno para revelar las contradicciones que surgen en el proceso cognoscitivo y para buscar las vías de superarlas. Para ello resulta imprescindible la creación de situaciones problémicas que analizaremos de forma general en el punto 4.

3. Bases psicológica y pedagógica de la teoría de la enseñanza problémica.

En los últimos años se han desarrollado distintas teorías psicológicas dirigidas a aumentar la activación del proceso de aprendizaje y llevar a efecto una enseñanza desarrolladora. Ejemplos de ella son: la teoría de la elevación del nivel de dificultades de los escolares de la escuela primaria desarrollada por el psicólogo soviético L.E. Zankov, gracias a la cual se han podido introducir en los programas de los primeros grados contenidos que antes se consideraban imposibles de asimilar por éstos alumnos; la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales desarrolladas por P. Ia. Galperin y N.F. Talizina muy utilizada en la enseñanza de la matemática; la teoría de la enseñanza diferenciada estudiada por N.A. Menshiskaia, que plantea atender a las particularidades individuales de los alumnos en el proceso de enseñanza, y la propia teoría de la enseñanza problémica desarrollada por M.I. Majmutov. Todas éstas teorías tienen como objetivo activar el proceso de aprendizaje como planteamos al inicio.

La enseñanza problémica tiene su fundamento psicológico en la concepción sobre la naturaleza social de la actividad del hombre y en los procesos productivos del pensamiento creador. El concepto de proceso productivo se introduce en la Psicología, en oposición a la representación tradicional y asociativa del pensamiento como proceso reproductivo.

Los procesos del pensamiento reproductivo tienden a que el alumno reproduzca los conocimientos, es decir, asimilar el contenido presentado ante él ya elaborado, acabado, de ahí que estos procesos reproductivos se identifiquen comúnmente con la memoria.

El pensamiento productivo se caracteriza por la capacidad del hombre para apropiarse de lo nuevo, de lo desconocido, por lo tanto, desarrollar éste tipo de pensamiento implica lograr un aprendizaje basado en la búsqueda, en la solución de problemas, y no en la simple apropiación de los conocimientos ya elaborados por el profesor.(...)

Desde el punto de vista pedagógico, la enseñanza problémica se fundamenta en la enseñanza desarrolladora, cuya esencia radica en la necesidad de desarrollar las capacidades cognoscitivas de los alumnos.

Esta función desarrolladora que se da a través de la relación maestro-alumno (carácter bilateral de la enseñanza), desde el punto de vista de la escuela tradicional sólo permitía la transmisión de conocimientos elaborados. La escuela actual, como ya expresamos, se plantea organizar el aprendizaje de modo que, de forma activa y creadora, los alumnos se apropien de los nuevos conocimientos. Justamente en ésto consiste la particularidad nueva de la enseñanza problémica. (...)

4. Situación problémica y problema.

(...) En el presente trabajo, se analizarán únicamente las categorías "situación problémica" y "problema" con el objetivo de que los maestros se familiaricen con el contenido de ambas.(...)

4.1 Concepto de situación problémica y problema.

Analicemos la siguiente tarea que puede plantear el profesor de Física al estudiar la estructura molécular de las sustancias:

Mezcla de 1 dm. cúbico de agua con 1 dm. cúbico de alcohol.

Observa el volumen de la mezcla contenida.

En el proceso de la realización de ésta tarea el alumno se encuentra ante algo incomprensible; el volumen de la mezcla obtenida, contrariamente a lo que él había supuesto resulta menor que 2 dm. cúbicos. Ello lo asombra y estimula a vencer la dificultad que ha surgido. El trabajo hábil del maestro en la dirección del proceso de aprendizaje ha logrado situar al alumno ante un estado de tensión intelectual, que bien aprovechado, promueve el interés por el estudio y desarrolla una disposición emocional positiva por la investigación y el razonamiento.

Este maestro no se ha conformado con dar a sus alumnos una conclusión ya hecha, sino que le ha creado una situación problémica.

La situación problémica significa que, durante el proceso de la actividad, el hombre tropieza con algo incomprendible, que lo alarme, que lo asombre.

La situación problémica es un estado psíquico de dificultades que surge en el hombre cuando, en la tarea que está resolviendo, no puede explicar un hecho nuevo mediante los conocimientos que tiene, o realizar un acto conocido a través de los procedimientos que desde antes conoce, y debe, por lo tanto, buscar un procedimiento nuevo para actuar.

Marta Martínez, Profesora del I.S.P. "Enrique J. Varona" en su trabajo "Fundamentos lógico-gnoseológicos de la enseñanza problémica en la Filosofía, explica que la situación problémica es la primer etapa de la actividad cognoscitiva independiente del estudiante, pues hace surgir la contradicción que lleva a la dificultad intelectual, y la define como la relación entre el objeto y el sujeto del conocimiento en el proceso docente, que surge a modo de contradicción, cuando aquel no puede entender la esencia del fenómeno estudiado, porque carece de los elementos necesarios para el análisis y que sólo mediante la actividad creadora puede resolver.

El maestro tiene que considerar que la necesidad de pensar creadoramente surge del enfrentamiento con las nuevas condiciones, en que no se pueden utilizar los procedimientos y conocimientos anteriores, sino que se deben buscar elementos nuevos para actuar. Ello pone al sujeto ante situaciones problémicas que están condicionadas, como se puede apreciar en el ejemplo antes descripto, por un estado psíquico de dificultad, que alarma y estimula a encontrar la solución.

Ahora bien, es necesario considerar también que la actividad intelectual que surge durante la situación problémica conduce al planteamiento del problema. Durante el proceso de análisis de la situación problémica hay que determinar el elemento que provocó la dificultad. Este elemento se considera el problema.

Retomemos el ejemplo de Física. La actividad intelectual del alumno no puede detenerse en éste estado psíquico de inquietud que provocó el resultado obtenido y que lo situó ante la contradicción que surgió entre éste resultado y lo que supuestamente esperaba, a partir de los conocimientos que hasta ese momento tenía. El maestro tiene que estimularlo a definir la esencia de lo que conoce, a que interiorice qué es lo desconocido, a que formule el problema. En nuestro ejemplo, la contradicción que se debe resolver es la investigación de las causas de por qué el volumen de la mezcla obtenida es menor que la suma de los dos volúmenes mezclados.

Este es el problema que se debe solucionar, que conduce al planteamiento de hipótesis, a la búsqueda de su demostración y con ello a la solución misma del problema.

El problema tiene que ser interiorizado por el alumno como tal.

"El problema es la contradicción dialéctica asimilada por el sujeto en el proceso de estudio del material. Esta contradicción debe resolverla a través de los medios que encuentre, bajo la dirección directa o no del profesor y en correspondencia con los objetivos de la asignatura y con el movimiento dialéctico del conocimiento hacia la verdad (...)" "La capacidad para plantear y resolver problemas es la característica más clara del pensamiento creador"[6]

Majmutov considera el problema docente, como un reflejo (forma de manifestación) de la contradicción lógica-psicológica del proceso de asimilación, la que determina el sentido de la búsqueda intelectual, despierta el interés hacia la investigación de la esencia de lo desconocido, y conduce a la asimilación de un concepto nuevo o de un modo nuevo de acción.

La solución de cualquier problema comienza con su planteamiento, o al menos, con la toma de conciencia de la formulación ya hecha.

Aunque en el marco de éste trabajo, no se analiza la etapa de solución del problema, si resulta imprescindible que el maestro considere que en definitiva, el fin último de la creación de la situación problémica y de la formulación del problema es precisamente la solución de éste. (...)

Es importante destacar que existen distintos tipos de situaciones problémica. El ejemplo descripto corresponde al tipo mas divulgado. En éste grupo se incluyen las situaciones problémicas que surgen cuando los alumnos toman conciencia de que los conocimientos anteriores son insuficiente para explicar el hecho nuevo.

También existen otros tipos de situaciones problémicas, por ejemplo, las que surgen cuando existe una contradicción entre el resultado alcanzado prácticamente en la realización de una tarea docente y la falta de conocimientos de los alumnos para dar su fundamentación teórica.

Un ejemplo que ilustra éste tipo de situación puede ser el siguiente: se propone a cada alumno que dibuje un triángulo y mida los ángulos interiores con un semicírculo (transportador) y sume sus valores.

Es sorprendente para ellos que independientemente de la forma del triángulo dibujado, de la longitud de sus lados, etc., la suma de sus ángulos interiores es aproximadamente 180 grados en todos los casos. Esto los sitúa ante una situación problémica. De ella se desprende la necesidad de formular el problema correspondiente, que en éste caso sería encontrar la demostración matemática del teorema: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados". (...)

4.2 Recomendaciones al maestro para propiciar la creación de situaciones problémicas

Ante todo, es necesario considerar que la creación de una situación problémica depende de la signatura, del nivel de conocimientos, de las edades y las particularidades individuales de los alumnos, del grado de preparación que estos poseen para formular y resolver problemas docentes y, por supuesto, de la habilidad del maestro para dirigir la enseñanza problémica.

El pleno dominio de los objetivos y del contenido por parte del maestro resulta una condición indispensable para la creación exitosa de **situaciones problémicas**; pero también es imprescindible saber determinar con acierto el **método** que ha de aplicarse.

Para la creación de situaciones problémicas el maestro tiene que conocer y lograr el cumplimiento de los objetivos didácticos siguientes:

a) Atraer la atención del alumno hacia la pregunta, la tarea o el tema docente, para despertar el interés cognoscitivo y otros motivos que impulsen su actividad.
b) Plantear al alumno una dificultad cognoscitiva, pero que resulte **asequible**, ya que con su superación va intensificado su actividad intelectual.
c) Descubrir ante el alumno la **contradicción** que existe entre la necesidad cognoscitiva que ha surgido en él y la imposibilidad de satisfacerla mediante los conocimientos, las habilidades y los hábitos que posee.
ch) Ayudar al alumno a determinar la tarea cognoscitiva en la pregunta o en el ejercicio y a trazar el plan para hallar las vías de solución de la dificultad, lo que lo conduce a una actividad de búsqueda.

Por último, es necesario destacar que, para la elaboración de situaciones problémicas en la enseñanza, es básica la capacidad de creación que tenga el maestro. El éxito de cualquier actividad docente depende en buena medida del maestro, que es quien directamente, organiza y dirige el proceso pedagógico.

Los alumnos de los maestros que trabajan creadoramente, desarrollan esta capacidad, experimentando un elevado placer por la actividad intelectual. De este modo la creatividad engendra creatividad y conduce al aprendizaje consciente.

Con respecto a ello, Enrique J. Varona planteó que los maestros debían ser "...hombres dedicados a enseñar cómo se aprende, cómo se consulta, cómo se investiga; hombres que prorroguen y ayuden al trabajo del estudiante; no hombres que den recetas y fórmulas al que quiere aprender en el menor tiempo la menor cantidad de ciencia, con tal que sea lo más aparatosa...". "Hoy un colegio, un instituto, una universidad deben ser talleres donde se trabaje, no teatros donde se declame"[7]

5. Métodos de la enseñanza problémica

Antes de explicar los distintos métodos problémicos, consideramos conveniente ubicar estos en el sistema de los métodos generales de enseñanza.

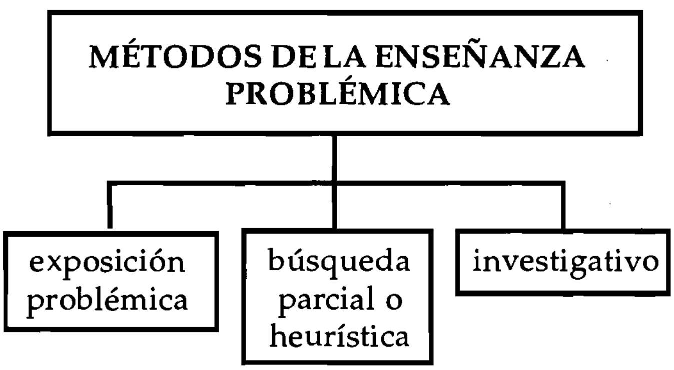
La literatura pedagógica conoce distintas clasificaciones de los métodos de enseñanza, que van desde las más tradicionales, como es la que se basa en la fuente de adquisición de los conocimientos, hasta la más reciente, que utiliza como criterio de clasificación el grado de la actividad cognoscitiva desarrollado por los alumnos.

La clasificación de los métodos por la fuente de adquisición de los conocimientos jugó un papel importante en la historia y desarrollo de la escuela; surgió como protesta contra las vías formales y dogmáticas seguidas en la enseñanza. Semejante clasificación tiene un objetivo fundamentado en el propio proceso de enseñanza, que constituye una vía análoga a la que caracte riza al conocimiento humano: de la contemplación viva, al pensamiento abstracto y de este a la práctica.

La unión de estas fuentes: la palabra del maestro, el ejemplo y la práctica, es muy importante para la asimilación de los conocimientos. Sin embargo, la utilización tradicional de estos métodos, lamentablemente muy generalizada, hace que los mismos se caractericen por el hecho de que el maestro presenta conocimientos ya preparados y se limita al desarrollo del pensamiento reproductivo. (...)

Los métodos problémicos constituyen indiscutiblemente etapas en el proceso de desarrollo de la actividad totalmente independiente y creadora. A este nivel no es posible llegar de inmediato, sino que es un proceso de aproximación gradual, en el cual los resultados de determinada etapa de la enseñanza son premisas para alcanzar un mayor nivel de independencia, de pensamiento productivo. De esta manera debemos ver los métodos problémicos como un subsistema dentro del sistema de métodos de enseñanza, el cual exige que el profesor tenga en cuenta la interrelación y procedencia en su aplicación.

Existen distintos puntos de vista para la clasificación de los métodos de la enseñanza problémica. **M.A. Danilov distingue los métodos: exposición problémica, búsqueda parcial o heurística e investigativo.**



5.1 La exposición problémica

En la exposición problémica se aplican algunos elementos de la enseñanza problémica. La esencia de este método radica en que el profesor, al trânsmitir los conocimientos muestra la vía para solucionar determinado problema.

Esto último se logra cuando el profesor, al partir de una situación problémica y de un problema, muestra la veracidad de los datos, descubre las contradicciones presentes en la situación objeto de estudio, en fin, muestra la lógica del razonamiento para solucionar el problema planteado.

La exposición problémica se relaciona con el método explicativo-ilustrativo, ya que en ambos casos la palabra del maestro juega un papel fundamental, pero se diferencia de este último en que descubre ante los estudiantes la forma de razonamiento, al posibilitar su relación con los métodos de las ciencias.

La exposición problémica es posible conceptuarla como el diálogo mental que se establece entre el profesor y los estudiantes. Decimos que el diálogo es mental porque estos no tienen que responder necesariamente a las preguntas del profesor, ya que sólo las formula para mostrar la vía del razonamiento. Por ejemplo, en una clase de Historia el profesor que utilice el método expositivo para explicar las rebeliones campesinas en la Edad Media, se limitará a narrar: –los campesinos luchaban aisladamente, sin tener una clara conciencia de sus objetivos; sólo comprendían que había que destruir la explotación feudal. El programa de las distintas capas de campesinos no fue homogéneo, por lo que, en dependencia de su situación social, fueron más o menos radicales en sus exigencias–. Por último, expone uno de los programas de exigencias y establece sus nexos con la situación social de aquellos que lo proclamaban.

Sin embargo, en este mismo tema el profesor que utilice la exposición problémica, se conducirá de esta otra manera: –Sabemos que las rebeliones campesinas de la Edad Media se caracterizan por que sus fuerzas estaban dispersas, no existiendo una unidad de objetivos y de acción. Esto, consecuentemente, supone que las exigencias de los distintos grupos de campesinos no se correspondían; entonces, ¿qué divergencias encontramos en las demandas de las rebeliones de campesinos? Analicemos los dos programas que contienen las exigencias de la rebelión de Wat Tyler.

Comparando las demandas de los programas vemos que son semejantes en cuanto a las exigencias de supresión del régimen de servidumbre, pero uno exige la abolición de la propiedad de la tierra de los señores feudales y de la iglesia, y el otro solo reclama que la renta de la tierra sea más barata. ¿Qué evidencian estas diferencias? Que uno de los programas expresaba los intereses de determinado grupo de campesinos que carecían de tierras o tenían pocas, y otro reflejaba los intereses de los campesinos que eran propietarios de tierra y que no querían pagar altos intereses por su arriendo. Ahora bien, ¿cómo estar seguro de esto? Es necesario investigar la situación de los campesinos que hicieron uno y otro planteamiento–.

Esta forma de exponer los conocimientos por parte del profesor proporciona a los estudiantes un aprendizaje consciente, en el cual no solo conocen el hecho histórico, sino que también se relacionan con el método de análisis científico de una situación dada, lo que hará que la clase resulte más interesante y atrayente para los alumnos.

¿Cuáles son entonces las ventajas pedagógicas de la exposición problémica de los conocimientos, en comparación con la exposición habitual basada en la transmisión de información?

En primer lugar, hacer la exposición más segura y los conocimientos más comprensibles, contribuyendo por ello a convertir los conocimientos en convicciones.

En segundo lugar, la exposición problémica enseña a pensar científicamente y dialécticamente y ofrece a los alumnos un patrón para la búsqueda científica.

En tercer lugar, la exposición problémica es más emocionante y por lo tanto eleva el interés para el estudio.

Se ha demostrado que la exposición que refleja situaciones contradictorias y la búsqueda de soluciones, entusiasma más a los estudiantes que la simple transmisión indiferente y sin conflicto de los conocimientos preparados.

Es evidente que llevar a los alumnos hasta este nivel superior de asimilación de los conocimientos no puede ser de golpe, es necesario llevarlos poco a poco a través de sencillas tareas cognoscitivas de búsqueda (creadora) introducidas en las distintas etapas del proceso de enseñanza.

5.2 Método de búsqueda parcial o heurístico

El método de búsqueda parcial o heurístico se caracteriza porque el profesor organiza la participación de los estudiantes para la realización de determinadas tareas del proceso de investigación. De esta manera, el estudiante en un caso podrá relacionarse con la formulación de la hipótesis, en otros con la elaboración del plan de la investigación, en otro momento con la observación o con la experimentación, etcétera.

La idea del acercamiento gradual al método investigativo está presente en la propia denominación de este método. El término "búsqueda parcial o heurístico" subraya su semejanza con el método investigativo y también su diferencia: el estudiante se apropia solo de etapas, de elementos independientes del proceso del conocimiento científico.

Esto último hace que el método heurístico sea más sencillo que el método investigativo y su utilización sea más asequible a los alumnos que el trabajo de investigación, lo que favorece su aplicación en todas las disciplinas. Sin embargo, es necesario plantear que la utilización del método de búsqueda parcial no sustituye al método investigativo en la enseñanza, pues es necesario que el estudiante llegue a utilizar todas las etapas del conocimiento de manera integral y esto solo lo proporciona el método investigativo.

Veamos un ejemplo. El profesor de Historia plantea: Ya nosotros hemos estudiado la rebelión de Wat Tyler y comprobamos que durante ese tiempo los campesinos establecieron dos tipos de demandas. Yo les he traído los dos documentos donde se plantea estas demandas, ustedes deben extraer los puntos esenciales de cada uno de ellos y compararlos, señalando las exigencias, las que resulten semejantes y las diferentes. Nosotros después estableceremos las causas de estas diferencias.

Como se aprecia, esta forma de proyectar la enseñanza se acerca al método de búsqueda parcial o heurístico.

5.3 El método investigativo

(...) El método investigativo refleja el nivel más alto de asimilación de los conocimientos. El valor pedagógico de este método consiste en que no solo permite dar a los estudiantes una suma de conocimientos, sino que al mismo tiempo los relaciona con el método de las ciencias y con las etapas del proceso general del conocimiento, así como desarrolla el pensamiento creador. El método investigativo se presenta en los distintos tipos de actividad de los estudiantes: observación, trabajo con los textos y documentos, experimentación, etc. No obstante estas diferentes formas de manifestación externa de la investigación, la esencia del método en todos los casos es una: la actividad de búsqueda independiente de los estudiantes dirigida a resolver determinando problema.

El método investigativo es complejo. Su mayor desventaja es el tiempo considerable que exige, así como el despliegue de fuerza y tenacidad por parte de los estudiantes. Sin embargo, esto no nos debe llevar a la consideración de que no es posible utilizar este método en la escuela, ya que este puede asumir la forma de sencillas tareas docentes dirigidas a dar solución a un problema resuelto enmarcado en el programa escolar. A este método pedagógico se le denomina investigativo, no porque conduzca a un descubrimiento científico en toda la extensión de la palabra, sino porque los estudiantes utilizan las distintas fases del método científico. Por eso, un requisito del método es que los estudiantes tengan que seguir todas o la mayor parte de las etapas del proceso de investigación. Los autores I. Ya. Lerne y M.N. Skatkin plantean las etapas siguientes:

a) Elaboración y estudio de los hechos y fenómenos.
b) Esclarecimiento de los fenómenos sujetos a investigación, que no resulten claros ni comprensibles (planteamiento del problema).
c) Hipótesis.
ch) Confección del plan de la investigación.
d) Ejecución del Plan.
e) Formulación de la solución.
f) Comprobación de la solución hallada.
g) Conclusiones.

Retomemos el ejemplo de Historia. Esta vez el profesor propone a los estudiantes como actividad extraclase analizar los documentos que contienen las exigencias o demandas de los campesinos y llegar a conclusiones. Para esto deben formular las preguntas que surjan en el curso del análisis de los documentos y a los cuales no se les dan respuestas y hacer el plan para la búsqueda de las mismas. Después de realizar el trabajo los estudiantes exponen sus conclusiones fundamentándolas.

Hasta aquí se ha caracterizado cada uno de los métodos problémicos de la clasificación objeto de estudio. Se ha tomado un mismo contenido para ilustrar la aplicación de los diversos métodos. En este aspecto resulta importante que todos los maestros reconozcan que para la utilización de los métodos problémicos no es necesaria la elaboración de nuevos programas. Muchas de las temáticas de los programas vigentes pueden ser tratadas de las formas descritas en este epígrafe.

Por último, hay que insistir en que el mejor criterio sobre la efectividad de la enseñanza, lo constituye la capacidad de los alumnos para el trabajo independiente y creador que se manifieste en la solución de las tareas docentes y en las que la sociedad les plantee, y a ello, brindan una gran contribución los métodos problémicos. No obstante, es necesario destacar que será improcedente universalizar determinado método. La utilización racional de ellos exige concebirlos como un sistema.

RESUMEN

— La enseñanza tradicional, por dar a los alumnos un sistema de conocimientos y desarrollar su memoria, no forma el sistema de motivos necesarios para el aprendizaje como base para el desarrollo del pensamiento creador. Por eso, en el ámbito internacional, los pedagogos buscan soluciones para elevar la efectividad del aprendizaje. Una de ellas la constituye la enseñanza problémica.

— La enseñanza problémica resume la experiencia positiva acumulada por la ciencia pedagógica. Ella no puede universalizarse, sino que debe combinarse con otras formas del quehacer diario del maestro.

— La esencia de la enseñanza problémica consiste en que los alumnos, guiados por el maestro, se introducen en el proceso de búsqueda de la solución de problemas nuevos para ellos, gracias a lo cual, aprenden a adquirir independientemente los conocimientos, a emplear los conocimientos antes asimilados y a dominar la experiencia de la actividad creadora.

— La enseñanza problémica, entre otros aspectos importantes, garantiza que paralelamente a la adquisición de conocimientos, se desarrolle un sistema de capacidades, habilidades y hábitos necesarios para la actividad intelectual (...); propicia la asimilación de conocimientos al nivel de su aplicación creadora; enseña al alumno a aprender y lo capacita para el trabajo independiente; promueve la formación de motivos para el aprendizaje y las necesidades cognoscitivas; contribuye a la formación de convicciones, cualidades del carácter, hábitos y normas de conducta (...).

— La enseñanza problémica tiene su fundamento psicológico en la concepción sobre la naturaleza social de la actividad del hombre y en los procesos productivos del pensamiento creador.

— Desde el punto de vista pedagógico, la enseñanza problémica se fundamenta en la enseñanza desarrolladora cuya esencia radica en la necesidad de desarrollar las capacidades cognoscitivas de los alumnos.

— Entre las categorías fundamentales de la enseñanza problémica, se encuentran la de situación problémica, problema y los métodos.

— La situación problémica significa que durante el proceso de la actividad, el hombre tropiece con algo incomprensible, que lo alarme, que lo asombre. La situación problémica es un estado psíquico de dificultad, que surge en el hombre cuando en la tarea que está resolviendo, no puede explicar un hecho nuevo mediante los conocimientos que tiene o realizar un acto conocido a través de los procedimientos que desde antes conoce, y debe, por lo tanto, buscar un procedimiento nuevo para actuar.

— Durante el proceso de análisis de la situación problémica, hay que determinar el elemento que provocó la dificultad, este elemento se considera el problema. El problema es la contradicción dialéctica asimilada por el sujeto en el proceso de estudio del material.

— Los métodos productivos por su esencia son los que más contribuyen a lograr el desarrollo del pensamiento creador. En este contexto se ubican los métodos problémicos, como manifestación concreta de éste tipo de enseñanza. Esto constituye etapas en el proceso de desarrollo de la actividad totalmente independiente y creadora.

Notas de lectura:

[1] Martí, José. Escritos sobre educación. Nueva York en Otoño. Editorial de Ciencias Sociales. La Habana, 1976. pág. 152.

[2] Escritos sobre educación. Ob. cit.; pág. 154.

* Este escrito se publicó en 1984, cuando aún existía la Unión Sovietica.

[3] Danilov, M.A. Skatkin, M.N. Didăctica de la Escuela Media, Editorial Libros para la Educación, La Habana, 1978, pág. 184.

[4] Majmutov, M.I. La enseñanza problémica, III parte. Traducción Centro de Documentación (sin editar), pág. 483.

[5] Majmutov, M.I. La enseñanza problémica, T.I. Traducción Centro de Documentación (sin editar), pág. 65.

[6] Martínez, Marta. Tesis de grado Fundamentos Lógico-gnoseológicos de la enseñanza problémica en filosofía.

[7] Varona, Enrique José. Las reformas en la enseñanza superior. Objeto y principios de la reforma. La Habana, Comisión Nacional Cubana de la UNESCO 1961, pág. 131 (trabajos sobre educación y enseñanza).

CONSTRUCTIVISMO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. BASES PSICOPEDAGÓGICAS

PRESENTACIÓN

En esta unidad, un conjunto básico de 7 lecturas presentan al profesor-alumno una serie de bases psicopedagógicas asociadas al proceso de solución de problemas cuando éste se realiza desde una perspectiva constructivista.

La solución de problemas se concibe como un medio a través del cual los alumnos construyen en el aula conocimientos matemáticos específicos, que con la ayuda del profesor son ubicados y relacionados con el saber escolar propuesto en los planes y programas de estudio.

El conjunto de bases psicopedagógicas que desde el constructivismo apoyan el trabajo del profesor en el campo que nos ocupa es muy amplio, y ésto nos ha obligado a seleccionar lecturas en base a 3 características de las mismas:

— Su relación específica con los procesos de solución de problemas.
— Su reconocida importancia dentro del constructivismo.
— Su explícita relación con la labor del profesor, tal y como ésta se describe en los paquetes didácticos de la SEP.

En el primer tema, un artículo de H. Aebli nos presenta la utilización de los problemas matemáticos de manera acorde al constructivismo de Piaget y una lectura de C. Gómez y C. Coll nos explica la naturaleza, alcances y limitaciones del constructivismo del mismo autor.

En el mismo tema se presenta una investigación de D. Lerner y P. Sadovsky acerca del papel y recuperación de los saberes previos del estudiante para su aprovechamiento en el diseño de situaciones constructivistas.

Esta investigación recupera, explícita e implica el principio constructivista del aprendizaje significativo de D.P. Ausubel.

En el tercer tema, considerando que la solución de problemas al interior de la didáctica constructivista ofrece al estudiante una oportunidad de realizar un aprendizaje significativo por descubrimiento, se ha seleccionado una lectura de A. Orton que contiene referencias a elementos conceptuales, teóricos y metodológicos relacionados con la posibilidad de que los alumnos puedan realizar un aprendizaje por descubrimiento en Matemáticas.

Se presenta además un artículo de O. San Martín Sicre donde se ejemplifica un método de resolución de problemas dentro de un contexto de descubrimiento guiado, y una segunda lectura del mismo autor donde se presentan 3 métodos relativamente generales de resolución de problemas y que son de naturaleza tal que:

— propician el descubrimiento,
— enfatizan la manipulación asociada a las operaciones concretas,
— son métodos de carácter no-deductivo.

En el cuarto tema se retoma la importancia otorgada por el constructivismo a las relaciones interpersonales en los procesos cognitivos y se presenta un artículo de A.F. Garton que describe los propósitos y resultados de algunas investigaciones acerca de la interacción social y el desarrollo cognitivo que fueron desarrolladas en base a las teorías al respecto de J. Piaget y L. Vygotsky.

TEMA 1. *Psicología y didáctica de J. Piaget.*

LECTURAS: "LA CONSTRUCCIÓN DE LAS OPERACIONES MEDIANTE LA INVESTIGACIÓN POR EL ALUMNO"

PRESENTACIÓN

Entre los sustentos psicológicos básicos del constructivismo se encuentran las teorías de J. Piaget.

En ésta lectura se presenta una propuesta didáctica fundamentada en Piaget que incorpora la utilización sistemática de los problemas en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Es importante señalar que en ésta lectura, H. Aebli utiliza el término Piagetiano de "operación" en un sentido relativamente restringido que posibilita su utilización en referencia a contenidos, temas o problemas específicos tal y como es propio del constructivismo.

En la lectura, se señala como tarea del maestro la de crear situaciones para que el niño pueda construir las operaciones que debe adquirir, para ello el profesor debe tomar en cuenta:

– Las operaciones implícitas que existen detrás de las nociones a construir.

– La historia o génesis de la operación, para que a partir de esquemas anteriores pueda ser construida por el niño.

– La presentación de material adecuado para la realización de la actividad intelectual.

El escrito describe la insuficiencia de los métodos de la didáctica tradicional para la formación de nociones y operaciones en el niño.

Posteriormente reafirma que la investigación debe estar dirigida por un problema que desde el principio anticipe el curso de la misma.

El problema debe ser de naturaleza tal que:

– Posea un adecuado grado de dificultad, esto es, no debe parecer tan simple que sugiera que puede resolverse por ejemplo adivinando, o bien que resulte tan complejo que parezca que sólo el profesor lo entienda.

– Debe posibilitar que los estudiantes puedan encontrar por sí mismos la solución.

La lectura "De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo" se ha incluido esencialmente porque ayuda a entender y situar las aportaciones de las teorías de Piaget al constructivismo, así como también las presuntas insuficiencias explicativas de las mismas.

Para complementar el estudio de éste mismo tema, se ha incluido en la antología complementaria la lectura titulada "Piaget y el desarrollo de las estructuras cognitivas" de Resnick y Ford.

Se ha seleccionado ésta lectura porque en ella, además de explicarse de manera accesible y sencilla las aportaciones y métodos de investigación de Piaget, se incorporan algunas interpretaciones actualizadas alternativas del desarrollo intelectual de los niños según autores Neo-Piagetianos y algunos anti-Piagetianos

*Hans Aebli. "La construcción de las operaciones mediante la investigación por el alumno", en: *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Buenos Aires, Ed. Kapelusz, 1958, pp. 90-98.
*Carmen Gómez Granell y César Coll Salvador. "De qué habla-

LA CONSTRUCCIÓN DE LAS OPERACIONES MEDIANTE LA INVESTIGACIÓN POR EL ALUMNO

1. La enseñanza debe tender a la construcción de las operaciones por el alumno

La aplicación a la didáctica de la psicología de Piaget, debe arrancar de la tesis fundamental según la cual el pensamiento no es un conjunto de términos estáticos, una colección de "contenidos de conciencia", de imágenes, etc., sino un juego de operaciones vivientes y actuantes. *Pensar es actuar,* trátese de asimilar los datos de la experiencia sometiéndolos a los esquemas de actividad intelectual o de construir nuevas operaciones mediante una reflexión en apariencia "abstracta", es decir, operando interiormente sobre objetos imaginarios. La imagen no es el elemento fundamental del pensamiento; constituye más bien su soporte, útil con frecuencia, sin duda, pero no indispensable. Además, en su naturaleza íntima, la propia imagen constituye un acto real y no un residuo de sensación: es una reproducción de los trazos principales de la exploración perceptiva que tuvo lugar durante la percepción de su modelo. De esta tesis puede extraer el didacta una clara visión de los fines intelectuales que la enseñanza debe lograr. Decir que el alumno debe conocer determinadas asignaturas es decir que debe aprender a ejecutar determinadas operaciones. Siempre son las operaciones las que definen a las nociones y es su ejecución lo que debe provocar la enseñanza, efectivamente primero y bajo forma "interiorizada" o representativa después.

Antes de abordar el problema de la realización práctica de una unidad de enseñanza, el maestro debe buscar, pues, qué operaciones están en la base de las nociones que se propone hacer adquirir a sus alumnos. Supongamos que quiera hacer adquirir la noción de *ángulo*. Debe preguntarse cuál es la operación que define a esa noción. Halla entonces que un ángulo es o una *rotación* parcial de un radio alrededor de su origen, o bien determinada relación (comprobada primitivamente por la operación de *relacionar*) entre dos lados de un triángulo (rectángulo en la convención de las matemáticas) que contienen el ángulo en cuestión. o bien admitamos que los alumnos deben aprender a conocer el número π. La operación base de esta noción consiste en *relacionar* 3,14... veces el diámetro del círculo con la circunferencia. Supongamos finalmente que en la enseñanza de la geografía debe tratarse de las curvas de nivel: a éstas las engendra el *corte* de una montaña en capas de igual espesor.

Interpretadas las asignaturas en términos de operaciones, el maestro debe preguntarse cómo puede provocar su adquisición por el alumno. Hemos mostrado que no puede tratarse de un proceso de impresión como lo había supuesto la didáctica tradicional. Una tesis fundamental de la psicología de Piaget da la base para la solución de este problema: *todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de reacciones anteriores y más primitivas*. Cada operación tiene su historia. A lo largo de la génesis del pensamiento infantil, puede observarse cómo las operaciones se diferencian poco a poco a partir de esquemas de acción elementales para formar sistemas cada vez más complejos y más móviles, capaces de captar finalmente al universo entero. La tarea del maestro consiste entonces en crear situaciones tales como para que el niño pueda construir las operaciones que debe adquirir. Debe apelar a los esquemas anteriores de que el niño dispone y a partir de ellos desarrollar la nueva operación. De presentar el material adecuado a esta actitud intelectual y velar por que la búsqueda de la nueva operación se oriente en la dirección deseada. Todas las páginas que siguen están dedicadas al desarrollo de estas medidas didácticas. Pero antes de abordar el examen detallado, observemos cuánto importa que el maestro se proponga el fin preciso de llevar a los alumnos a construir por sí mismos las nuevas operaciones.

2. La presentación intuitiva de la enseñanza tradicional

La posición de la didáctica tradicional es ambigua respecto del principio de la construcción de las operaciones por el niño. Por un lado, razones extrapsicológicas (oposición a la pedagogía dogmática de la Iglesia) llevaron a los didáctas de los siglos XVIII y XIX a formular el principio de que el niño debe descubrir y elaborar por sí mismo las nociones. Por otro, la psicología sobre la que se fundaba esta metodología era incapaz de justificar este principio y de mostrar su mejor realización. El principio de la psicología empirista es admitir un sujeto pasivo que sufra las impresiones que le vengan del exterior. La forma de enseñanza que más estrechamente corresponde a esta psicología es la *presentación intuitiva* que hace el maestro. Se presentan imágenes a la clase por considerárselas el fundamento mismo del conocimiento. Pero pues que esto no basta para provocar en los alumnos las adquisiciones deseadas, el maestro acompaña con sus comentarios los objetos e imágenes presentados. De esto resulta una presentación intuitiva. Se admite que la presentación (explicación, análisis razonamiento, etcétera), así como la imagen, se imprimen en el espíritu del alumno. Pero en realidad este proceso no se cumple totalmente, pues la vida psíquica no conoce la adquisición pasiva de una nueva reacción. Si el alumno adquiere una noción o una operación es porque arribó a construirla aunque sólo se haya tenido el propósito de imprimirla en su espíritu. Pero puesto que la didáctica tradicional no encara conscientemente la construcción de las imágenes por el alumno, esa construcción se efectúa en circunstancias psicológicas a menudo muy desfavorables.

Un rasgo característico de la construcción de las operaciones en la enseñanza tradicional, es que se la dirige rígidamente. El caso extremo es aquel en que la nueva idea es simplemente "dada" mediante una exposición. El maestro comienza por hacer un breve llamado a las anteriores nociones conocidas por el alumno y, en seguida, desarrolla la idea nueva teniendo en cuenta la estructura lógica de la asignatura. Para ayudar a los alumnos a representarse las operaciones en cuestión, traza croquis en el pizarrón o presenta cuadros escolares ya preparados. El alumno debe ceñirse a esa explicación. Si lo logra, el proceso de formación se produce y la clase comprende la lección. Pero observemos con algún detenimiento las condiciones de este logro. Inicialmente se plantea la cuestión preliminar de saber si el alumno sigue verdaderamente la exposición que se le hace. La tentación de seguir sus propios pensamientos en lugar de "atender", es frecuentemente muy fuerte. Escuchar una explicación es siempre menos interesante que descubrirla por sí mismo y es común que sean los alumnos bien dotados los que atienden mal las lecciones *ex cathedra* pues no les proporcionan bastantes oportunidades de actividad. Pero supongamos que los alumnos quieran atender la exposición del maestro. ¿Se detiene éste suficientemente en las nociones básicas? ¿Son tales nociones familiares a los alumnos o la exposición se basa en datos que algunos han asimilado mal? El ritmo de la construcción de la nueva operación ¿se adapta a las posibilidades intelectuales de los alumnos? ¿Se insiste bastante en los puntos en que el niño tropieza con más dificultades y se evidencian las articulaciones decisivas para la comprensión? En la parte psicológica de esta obra hemos advertido que las imágenes no constituyen sino instantáneas referidas a las operaciones. Si el maestro se contenta con ilustrar las operaciones con cuadros ya preparados ¿podrán los alumnos imaginar la operación? Y si se muestra la operación misma a la clase ¿el alumno será capaz de seguirla interiormente? Todas estas condiciones pueden ser cumplidas en algunas lecciones y entonces los alumnos formarán, probablemente, la noción deseada. Para que el maestro sea capaz de adaptar así su presentación a la naturaleza del pensamiento infantil, debe conocerlo exactamente. No apelando a la colaboración activa de los alumnos, se priva de la posibilidad de aprender a conocer su manera pensar y entonces grande es su atención de concebir el pensamiento del niño como análogo al suyo que es adulto y acabado. En estas condiciones el maestro no llega jamás a adaptar su enseñanza a la mentalidad del niño. Hasta el que cuente con buena intuición no puede prever siempre cómo los alumnos reaccionarán ante un nuevo problema. Para poder ayudarles últimamente, debe haberlos visto trabajar por sí mismos en su solución.

3. La mayéutica tradicional y la investigación por el alumno

La tentativa de dirigir directamente la formación de las nociones en el niño, no puede llevar a conclusiones satisfactorias. Es preciso que le dejemos una gran libertad para desarrollar su pensamiento. Este postulado se cumple cuando se conduce al alumno a construir sus nociones y operaciones mediante la acción personal. La investigación es, en efecto, esa actividad del espíritu que trata de construir una nueva reacción. El primer problema didáctico que tenemos que resolver será, por consiguiente, precisar cómo puede ser provocada la investigación por el niño, y después orientada hacia su fin.

Pero la didáctica tradicional ¿no conoce ya el postulado de la investigación personal del niño? Éste es, efectivamente, el caso. Durante los siglos XVIII y XIX, varios grandes didáctas formularon el principio de que el niño debe forjar por sí mismo sus nuevos conocimientos. En todo caso, la realización práctica dada a este principio por la escuela tradicional no puede ya sernos satisfactoria. Mediante el *método mayéutico* (el procedimiento socrático, dialogado, heurístico o dirigido por preguntas) se pensaba provocar la investigación personal por el niño. Lo propio de esta forma de enseñanza es dividir lo que se va a enseñar en una multitud de elementos que el alumno debe hallar en respuesta a preguntas hábilmente hechas por el maestro. De ello resulta un diálogo entre el alumno y la clase en que alternan regularmente las preguntas del maestro y las respuestas de los alumnos. Por una especie de razonamiento colectivo, el maestro conduce a la clase hacia el resultado que se propuso lograr. Como los alumnos son quienes hallan la respuesta de cada problema parcial, se creyó poder decir que ellos son quienes descubren el conjunto del complejo de ideas.

Pero los resultados del método mayéutico exigen algunas observaciones. Pese a que los alumnos efectúen por sí mismos cada uno de los pasos del razonamiento bajo la dirección del maestro, sucede con frecuencia que no asimilan la estructura de conjunto. Supongamos que se trata de un desarrollo matemático para lograr una fórmula. Los alumnos realizan cada operación parcial, pero cuando se les pide que rehagan por sí mismos el razonamiento completo, no son capaces de hacerlo. Tal hecho permite suponer que dirigiendo la búsqueda de los alumnos, el maestro provee por sí mismo un elemento del complejo operatorio que no captan necesariamente los alumnos: la organización total del complejo de ideas, en oposición a la suma de todos los elementos. Esta observación se confirma con un hecho psicológico fundamental, puesto en evidencia por muchas escuelas contemporáneas de psicología, a saber: que la estructura de conjunto de una reacción psíquica es más que sus partes aisladas tomadas en conjunto. Los representantes de la "Gestalt psychologie" (psicología de la forma) han demostrado en particular que una percepción se organiza siempre en una "forma" total, la cual es más que la suma de sensaciones; y en el otro extremo de la jerarquía de las reacciones psicológicas, las operaciones no pueden ser comprendidas sino como miembros integrantes de sistemas operatorios más vastos: las agrupaciones y los grupos.

Si nos proponemos, pues, hacer adquirir al niño no sólo todos los elemento parciales sino también la estructura de conjunto de un complejo operatorio, no basta que provoquemos en él todos los pasos particulares del razonamiento. El niño debe ser conducido a establecer las principales relaciones que rigen un complejo de operaciones y a insertar en ellas las operaciones parciales. Es preciso efectuar la investigación según un plan que desde el comienzo oriente su organización de conjunto y confiera significación a todas las tareas emprendidas en el curso de su realización. Así pues, ese agente director de la investigación no puede estar constituido sino por un *problema* muy vivo en el pensamiento del alumno. La psicología de Piaget nos enseña, en efecto, que un problema constituye un "esquema anticipador", es decir, un bosquejo esquemático de una operación a hallar, solidario de un sistema de conjunto de operaciones. En el curso de la investigación, ésta se estructura entonces y adquiere sus articulaciones precisas. Si así se logra conducir al niño a construir una operación partiendo de un problema claramente concebido, se puede suponer que ha comprendido no sólo todos los elementos del nuevo acto intelectual, sino también su estructura de conjunto.

Un ejemplo precisará esta diferencia entre el método mayéutico tradicional y la investigación propiamente dicha del alumno. Supongamos que se trata de introducir la operación por la cual, de la superficie de un rectángulo y de uno de sus lados, se infiere la longitud del otro. Por el método mayéutico, el maestro hace hallar la solución de este problema de la siguiente manera: luego de indicar que la superficie de un rectángulo es, por ejemplo, de 36 dm^2 y que su altura es de 4 dm, dice: *"Dibujo el rectángulo como si ya conociésemos todas sus dimensiones"*. Se hace el dibujo y el maestro comienza por formular estas preguntas: *"¿Cuál es, pues, la superficie de este rectángulo?"* "La superficie de este rectángulo es de 36 dm2". *"¿Y cuál es su altura?"* "La altura es 4 dm". *"Bien. ¿Cuántos dm^2 se hallan unidos a esta altura?"* "Cuatro decímetros cuadrados están unidos a la altura". (El maestro los dibuja). *"¿Qué forman estos 4 dm^2?"* "Forman una banda". *"Bien. ¿Cuántas bandas contiene el rectángulo?"* Si los alumnos no saben responder, el maestro simplifica la pregunta diciendo: *"¿Cuántas bandas de 4 dm^2 contiene el rectángulo de 36 dm^2?"* "Nueve bandas de 4 dm^2". Si algunos alumnos no comprenden, el maestro formula las preguntas siguientes: *"¿Cuál es el ancho de una banda?"* "El ancho de una banda es 1 dm". *"Si el rectángulo se compone de nueve bandas, ¿cuál es, pues, su base"?* "Su base es de 9 dm". Después, la operación de división del contenido que los alumnos acaban de realizar se repite y se resuelven otros problemas de esta clase. Se ve qué entendemos cuando decimos que aplicando el método mayéutico el maestro dirige estrechamente la reflexión de los alumnos, y que es él quien determina la organización de conjunto de la investigación, y que los alumnos, aún respondiendo cada pregunta particular, no han captado, sin embargo, con seguridad, la arquitectura total del razonamiento. Fácil es imaginar ejemplos análogos en cualquier otro campo de la enseñanza.

Por el contrario, cuando se quiere presentar un problema que anticipa esquemáticamente todo el curso de la investigación y que permite al niño construir por sí mismo la operación, se puede, por ejemplo, proceder del modo siguiente: damos a equipos de dos a cuatro alumnos, 36 cuadrados de cartón de 1 dm^2. Por experiencia efectiva, buscan entonces cuál será la base de un rectángulo de 4 dm de altura construido con 36 dm^2. Todas las articulaciones de la operación que el maestro debería dar en la lección tradicional precedentemente descrita, resultan entonces naturalmente descubiertas por los alumnos cuando realizan el proyecto de investigación contenido en el problema. Para construir un rectángulo de 4 dm de altura, comienzan por presentar una banda de 4 dm^2. En seguida continúan agregando bandas hasta que los 36 dm^2 quedan integrados. Ven que han puesto 9 bandas y, teniendo a la vista el resultado concreto de la operación, advierten también que la base del rectángulo es de 9 dm. De este modo la solución representativa (expuesta con símbolos únicamente) se prepara del mejor modo posible.

Si lo que se busca es conducir a los alumnos a descubrir por investigación personal el conjunto de un sistema de operaciones y no solamente las operaciones parciales de ese sistema, hay que orientar la actividad presentando cuidadosamente el problema.

Puede suceder que el maestro deba intervenir todavía durante la investigación, pero su intervención, que puede tener la misma apariencia que el método mayéutico tradicional, adquirirá entonces otro significado psicológico: no conduce el razonamiento de los alumnos en dirección sólo conocida por él, sino que los ayuda a resolver un problema vivo en su espíritu y a realizar un proyecto de investigación que comprenden pero cuya realización tropieza con algunas dificultades que exceden a sus recursos personales.

El problema que sirva de base a la libre investigación del alumno debe tener una amplitud tal que anticipe una operación *significativa* y no lo reduzca simplemente a un acto de pensamiento parcial, del que únicamente el maestro reconoce el sentido en el conjunto del razonamiento y del que el alumno, al contestar "adivinando", confíe en que logrará algo significativo. Pero, por otra parte, es evidente que la aptitud del niño para la investigación libre no debe ser sobrevalorado. El niño no es un hombre de ciencia, capaz de trabajar con miras a un fin remoto hacia cuya realización orienta una multitud de operaciones parciales. En cuanto la distancia a recorrer entre los esquemas anteriores y la nueva operación sobrepasa determinado límite, la clase se pierde en el curso de la investigación. De aquí surge la regla aplicable al planteamiento de problemas de investigación; reducir la amplitud del problema lo bastante como para permitir a la clase que encuentre por sí misma la solución, sin que por ello deje de alcanzar el límite de los problemas significativos. Cuando introducimos el cálculo de superficie, no pretendemos mediante un solo problema hallar la unidad de superficie, la división del rectángulo en bandas y en cuadrados, y la multiplicación de la base por la altura. Un primer problema, ciertamente significativo, será el de hallar que pueden medirse superficies cubriéndolas con cuadrados de medición y contándolos. Luego, se podrá hacer medir de esta manera gran número de rectángulos. Se verá a los niños proponer por sí mismos la simplificación del procedimiento y llegar a la multiplicación de la base por la altura.

Presentar un problema de manera clara y viva es, pues, la condición *sine qua non* para la investigación personal el alumno. Si esta condición no se cumple, será siempre el maestro quien deberá incitar a la actividad y orientar su progreso ora mediante una mayéutica cerrada, ora haciendo él mismo las demostraciones, análisis, etc. Por el contrario, el problema bien comprendido por la clase actúa como autorregulador de la investigación: anticipando en forma general la operación que constituirá la meta, permite a la clase apreciar por sí misma si las hipótesis y proposiciones sirven para llegar al fin previsto. La anticipación esquemática de la solución contenida en todo problema, tiene así a evocar los actos necesarios para su solución.

Al decir formación del *pensamiento* se dice formación de *operaciones*, y al decir formación de operaciones se dice *construcción* de operaciones. La *construcción de las operaciones* se efectúa durante el curso de la *investigación*, y toda investigación parte de un *problema*. *Todos* estos procesos constituyen en el fondo un solo y único complejo de fenómenos psicológicos, complejo del que nos hemos limitado a aislar algunos aspectos para su análisis.

LECTURA: DE QUÉ HABLAMOS CUANDO HABLAMOS DE CONSTRUCTIVISMO*

Quizás uno de los hechos más relevantes y llamativos de los últimos años, en lo que a las teorías del conocimiento y el aprendizaje se refiere, sea la emergencia de un creciente consenso alrededor de la concepción constructivista.

Tanto desde la epistemología de las diferentes disciplinas, como desde la psicología cognitiva y las teorías del aprendizaje y la psicología de la instrucción o de la educación, se han abandonado progresivamente las concepciones epistemológicas realistas o empíricas y las teorías del aprendizaje asociacionistas.

Estudios procedentes de todos estos campos coinciden en afirmar que el conocimiento no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino de un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente que va construyendo progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos y potentes. Conocemos la realidad a través de los modelos que construimos para explicarla, siempre susceptibles de ser mejorados o cambiados.

En nuestro país existe también, como sabemos, un amplio consenso entre psicólogos de la educación, didáctas y docentes, alrededor de la concepción constructivista, que ha sido propuesta además como marco teórico y metodológico de referencia para la reforma del currículum (Coll, C.: "los ejes de la Reforma es su dimensión cualitativa", *Cuadernos de Pedagogía, 185, -octubre* 1990)

Este amplio acuerdo es importante, en primer lugar, por el hecho de que autores que representan tendencias de pensamiento e investigación, a veces muy diferentes, asuman la concepción constructivista. Esto avala su coincidencia como principio explicativo de los procesos de adquisición del conocimiento. Pero, sobre todo, porque abre un importante campo para la indagación teórico y práctica, que se enriquecerá desde esas múltiple perspectivas.

Sin embargo, este mismo fenómeno de la coincidencia e integración de diferentes enfoques en un marco teórico de referencia común implica lógicamente el hecho de que bajo el término *constructivismo* se agrupen concepciones, interpretaciones y prácticas bastante diversas.

Recientemente se celebró en Barcelona un encuentro cuyo objetivo era propiciar un debate en torno a las relaciones entre psicología de la educación y didáctica específicas. No es el objetivo de este artículo entrar en dicha temática,[1] pero sí que quisiéramos referirnos brevemente a uno de los aspectos que estuvo presente en ponencias y debates, y que está en relación con el significado y alcance del término *constructivismo*. en dicho seminario, se pudo de manifiesto que la asunción de la concepción constructivista era una tendencia compartida por psicólogos de la educación y didáctas. Tanto en las ponencias como en los debates, ambos colectivos dieron por asumido el constructivismo como marco de referencia de sus propuestas. Sin embargo, a lo largo del seminario también se pusieron de manifiesto dos hechos:

— Que las diferentes ponencias y propuestas dejaban traslucir claramente formas diferentes de entender el constructivismo, tal y como señala Coll (1993) en el capítulo dedicado a las conclusiones del encuentro.
— Que entre los asistentes se detectaba una cierta desconfianza o cansancio ante el término. No porque no se asumiera el constructivismo como marco teórico de referencia, sino porque la diversidad de enfoques y propuestas que se autodefinen como constructivistas ha-

mos cuando hablamos de constructivismo", en: *Cuadernos de Pedagogía*. Barcelona, No, 221, enero de 1994. pp. 8-10.

cen que el *constructivismo* cumpla una cierta función de *comodín* dentro del cual cabe casi todo. De ahí que frases como: "Decir constructivismo es como no decir nada": "Y ahora que todos somos constructivistas, ¿qué?"; "Pero, ¿de qué constructivismo se habla?... porque parece que hay muchos constructivismos"; "Piaget, ¿era o no era constructivista?"; "No hay que hablar tanto de constructivismo, sino de propuestas concretas para mejorar la práctica en el aula", etc., empiecen a oírse cada vez con mayor frecuencia.

Desde luego, excede a las posibilidades e intenciones de este artículo ofrecer una explicación exhaustiva sobre las diferentes teorías cognitivas del aprendizaje y la instrucción, y su posición en relación al constructivismo. Pero desearíamos profundizar un poco en algunas de las distintas significaciones que ha ido adoptando el término, para ver cómo se ha ido modificando y enriqueciendo, qué acepciones del constructivismo coexisten en la actualidad, y qué implicaciones tiene cada una de estas acepciones para el problema de la relación o integración teoría-práctica.

El constructivismo según Piaget

Hasta principios de siglo, las concepciones epistemológicas realistas o empiristas y consecuentemente las teorías del aprendizaje asociacionistas, eran dominantes en la epistemología y la psicología. Sin embargo, durante el presente siglo ha ido creciendo, tanto a nivel epistemológico como psicológico, una fuerte corriente de oposición a dicha concepciones.

Como es bien sabido, uno de los autores que se opuso con más fuerza a los planteamientos empiristas y asociacionistas fue Piaget. Tanto a nivel epistemológico como psicológico. Piaget defiende una concepción constructivista de la adquisición del conocimiento que se caracteriza por lo siguiente:

— Entre sujeto y objeto de conocimiento existe una relación dinámica y no estática. El sujeto es activo frente a lo real, e interpreta la información proveniente del entorno.

— Para construir conocimiento no basta con ser activo frente al entorno. El proceso de construcción es un proceso de reestructuración y reconstrucción, en el cual todo conocimiento nuevo se genera a partir de otros previos. Lo nuevo se construye siempre a partir de lo adquirido, y lo trasciende.

— El sujeto es quien construye su propio conocimiento. Sin una actividad mental constructiva propia e individual, que obedece a necesidades internas vinculares al desarrollo evolutivo, el conocimiento no se produce.

Es, pues, evidente que muchos de los principios asumidos hoy por el constructivismo estaban ya presentes en la teoría piagetiana. Sin embargo, la concepción constructivista piagetiana implica algunas limitaciones importantes que conviene señalar.

En primer lugar, la teoría piagetiana se ha ocupado fundamentalmente de la construcción de estructuras mentales y ha presentado una escasa o nula atención a los contenidos específicos. Los trabajos de Piaget y sus colaboradores se han centrado en la génesis de estructuras y operaciones de carácter lógico (conservación, clasificación, seriación, reversibilidad, etc.), cada vez más complejas y potentes, que dotan al individuo de una mayor capacidad intelectual y, por lo tanto, le permiten una mayor aproximación a objetos de conocimiento más complejos. Piaget estaba interesado en identificar, describir y explicar principios y procesos generales de funcionamiento cognitivo (asimilación y acomodación, equilibración, toma de conciencia, etc.), y en estudiar cómo estos principios y procesos intervienen en la construcción de las categorías lógicas del pensamiento racional (espacio, tiempo, causalidad, lógica de las clases y las relaciones, etc.). Las situaciones particulares, los contenidos concretos utilizados para investigar unos y otras, son casi siempre un recurso metodológico, y rara vez devienen objeto de estudio en sí mismos.

En segundo lugar, para Piaget el proceso de construcción del conocimiento es un proceso fundamentalmente interno e individual, basado en el proceso de equilibración, que la influencia del medio sólo puede favorecer o dificultar. El diálogo se establece entre sujeto y objeto, y la mediación social no constituye un factor determinante, ya que la construcción de estructuras intelectuales progresivamente más potentes obedece, en último término, a una necesidad interna de la mente.

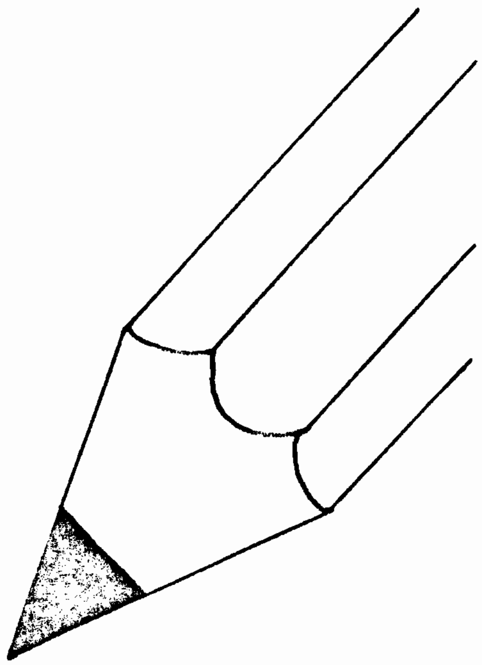
Estos dos hechos, fundamentalmente, han conducido a que las propuestas pedagógicas basadas en la teoría del Piaget presenten a menudo algunos graves inconvenientes, ya puestos de manifiesto y criticados en numerosas ocasiones como cuando se propone lo siguiente:

- Que el objetivo de la enseñanza es favorecer la construcción de estructuras de pensamiento (clasificación, conservación, seriación, etc.), ya que es el dominio de dichas estructuras lo que permite la comprensión de los diferentes contenidos.
- Que los alumnos y alumnas deben construir su propio conocimiento a través de un proceso de *descubrimiento* relativamente autónomo, en el que el papel del profesor es proponer experiencias y situaciones que ayuden a ese proceso.

En suma, las propuestas pedagógicas inspiradas en el constructivismo piagetiano se caracterizan frecuentemente por la poca atención prestada a los contenidos y a la interacción social (y, como consecuencia, a la instrucción).

La construcción del significado y el papel del contenido

Desde diferentes posiciones, la idea de que los procesos de aprendizaje están vinculados a dominios y contenidos específicos ha sido dominante en los últimos años en la investigación psicológica y didáctica. Algunos trabajos realizados desde el marco mismo de la orientación piagetiana (Ferreiro y Teberosky 1979; Vergnaud, 1981; Gómez-Granell, 1985, etc.) sobre el al aprendizaje de la lectoescritura o de diferentes nociones matemáticas; la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel; los numerosos estudios sobre las ideas previas o las concepciones alternativas de los alumnos y alumnas; los estudios de la psicología de la instrucción sobre resolución de problemas o sobre comparación del conocimiento de sujetos novatos y expertos en determinados contenidos; las concepciones que defienden la modularidad de la mente, etc., coinciden en señalar que, sin que ello implique que no se construyan capacidades de índole general, el conocimiento se adquiere de forma específica en diferentes dominios (lenguaje, notación matemática, biología, física, etc.), que presentan características diferenciadas. Lo que el sujeto construye con significados, representaciones mentales relativas a esos contenidos.



En el caso concreto de la investigación realizada en el campo de la didáctica o la psicología de la instrucción, este hecho, junto con la aceptación del principio básico constructivista de que todo conocimiento nuevo se construye a partir de otro anterior, ha dado como resultado el que hoy poseamos una abundante información sobre las ideas o concepciones de los alumnos y alumnas acerca de los diferentes contenidos escolares, así como sobre las representaciones de los sujetos en los diferentes dominios del conocimiento.

La idea fundamental que subyace a la mayoría de estos trabajos, con independencia de que hayan sido realizados en el marco de la investigación didáctica o de la psicológica de la educación o la instrucción, es la de que el conocimiento de las ideas y las representaciones de los alumnos y alumnas sobre los contenidos que son objeto de aprendizaje escolar es sumamente importante para mejorar la enseñanza de dichos contenidos y la práctica educativa en general.

Sin duda, todos estos trabajos han contribuido a poner de relieve la importancia del contenido en los procesos de aprendizaje y han aportado una abundante información sobre las concepciones e ideas de los alumnos y alumnas. Pero de la misma manera que no basta con conocer procesos generales de aprendizaje para enseñar matemáticas o lengua, tampoco parece que la exhaustiva descripción de dichas ideas y concepciones sea suficiente para conseguir uno de los objetivos más importantes de todo proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, cómo cambiarlos para que se ajusten progresivamente a las ideas y concepciones del conocimiento científico que intentamos enseñar a nuestros alumnos y alumnas. Sabemos mucho acerca de las ideas de los alumnos, pero muy poco acerca de cómo cambiarlas. Y sin embargo, sabemos también que uno de los retos fundamentales del constructivismo es el de explicar cómo se produce el cambio cognitivo, la adquisición de nuevos conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

Hacia una integración de lo individual y lo social

Como señala J.I. Pozo (1993), el carácter excesivamente descriptivo de los trabajos sobre concepciones alternativas y el mayor interés de la investigación psicológica por describir procesos cognitivos subyacentes al pensamiento, que a los procesos de enseñanza y aprendizaje, hacen que el problema del cambio cognitivo siga constituyendo *la asignatura pendiente* de la concepción constructivista.

Desde nuestro punto de vista, una da las razones fundamentales que subyacen a esta dificultad será el olvido del componente sociocultural y el contextual de la construcción del conocimiento. Al igual que hiciera Piaget, la mayor parte de la investigación psicológica y didáctica ha seguido centrada en una perspectiva individual, olvidando el hecho de que cualquier conocimiento se genera en un contexto social y culturalmente organizado, tal y como señaló Vigotsky hace ya bastantes años.

Tradicionalmente, tanto en la investigación psicológica como en la práctica pedagógica, se ha considerado que el conocimiento es independiente del contexto en el que se adquiere, y que una vez adquirido un determinado conocimiento, éste puede ser aplicado a cualquier situación. Así por ejemplo, si un alumno sabe sumar y restar, deberá poder resolver cualquier problema de suma y resta que se le presente en cualquier situación, sea ésta escolar o de la vida real. Sin embargo, numerosos trabajos en el campo de la investigación sociocultural han puesto de manifiesto, por ejemplo, que las mismas personas que fracasan en tareas y pruebas clásicamente escolares de matemáticas pueden ser muy competentes en situaciones de actividad cotidiana que implican cálculos matemáticos idénticos. Lo que muestran estos y otros trabajos es que todo conocimiento se construye en estrecha interrelación con los contextos en los que se usa, y que, por lo tanto, no es posible separar los aspectos cognitivos, emocionales y sociales presentes en el contexto en el que se actúa. Como afirman Newman, Griffin y Cole (1991), el cambio cognitivo constituye tanto un proceso social como individual.

Todos estos planteamientos están teniendo claras repercusiones en el replanteamiento del paradigma constructivista. Por un lado, y como señala J.I. Pozo (1993), deberíamos desestimar la idea de que el cambio conceptual consiste en cambiar o sustituir una idea por otra mejor consistentemente aplicable a cualquier situación. La investigación sobre el cambio cognitivo debería orientarse hacia el estudio de las formas en que las personas concluyen, usan o activan sus conocimiento en función del contexto. Posiblemente, como afirma Wertsch (1191), en un mismo sujeto coexisten distintas formas de actividad mental, de forma que manifiesta unas o otras en función del contexto.

Por otro lado, la perspectiva contextual implica la idea de que los procsos de cambio cognitivo deben ser estudiados en el contexto en que se producen. De acuerdo con Resnick, "la idea de que el pensamiento es independiente del contexto [...] subyace a la tradición psicológica experimental de la investigación sobre el aprendizaje y el pensamiento. Solamente si se piensa que el pensamiento se comporta de la misma manera en diferentes entornos, se puede esperar aprender algo acerca del mismo, observando la conducta en un entorno muy restingido y a menudo artificial" Resnick, 1989:11). Es obvio decir que la escuela constituye un entorno, un contexto específico en el que los procesos de enseñanza y aprendizaje se producen de una determinada manera y obedecen a metas específicas.

Desde una concepción constructivista que aboga por la importancia del contexto, el estudio de la actividad constructiva de los alumnos y alumnos se trasladaría del laboratorio al aula. En el aula, el conocimiento se construye gracias a un proceso de interacción entre los alumnos y alumnas, el profesor o profesora y el contenido. Estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el contexto del aula implica, pues analizar estos tres componentes *de forma interrelacionada y no aislada*. Es necesario analizar no sólo la actividad constructiva de los alumnos y alumnas (ideas previas sobre el contenido, predisposición o motivación para el aprendizaje del mismo, etc.), sino también los mecanismos de influecia o de ayuda pedagógica (Coll y otros, 1992; Gómez-Granell y Moreno, 1992) que les permiten construir y actualizar sus conocimientos.

Es evidente que esta forma de abordar el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje es complicada y presenta muchos problemas. Uno de ellos, por ejemplo, el de que al igual que tenemos abundantes descripciones de las concepciones de los alumnos y alumnas, pasemos a tener exhaustivas descripciones de la vida en las aulas. Para evitarlo, será necesario introducir elementos de control que permitan extraer resultados con un cierto grado de validez y fiabilidad, y asegure un cierto grado de generalización.

Como contrapartida, este enfoque permite una mayor aproximación e integración entre teoría y práctica. No se trata de explicar los procesos cognitivos subyacentes a la adquisición de ciertos contenidos, y aplicar estos resultados al aula, sino de explicar el proceso constructivo en el lugar en el que se produce. Creemos que ello puede contribuir de forma esencial a una mejor explicación de las formas de adquisición y construcción del conocimiento en la escuela y en las aulas.

Nota de la lectura:

[1] Las ponencias y debates de este seminario han sido publicadas en un número monográfico de la revista *Infancia y Aprendizaje; 62-63*; Coll, C. y Gómez-Granell, C. (eds.) (1993): "Psicología y Didácticas", pp. 52-243.

TEMA 2. *Conocimiento previo, escolarizado y no escolarizado en la solución de problemas*

LECTURA: EL SISTEMA DE NUMERACIÓN: UN PROBLEMA DIDÁCTICO*

PRESENTACIÓN

La recuperación de los conocimientos previos, (escolarizadoso no), para la construcción de nuevos saberes y significados por ell alumno, es uno de los fundamentos psicopedagógicos del diseño de situaciones didácticas constructivistas.

En esta lectura, las autoras nos presentan el desarrollo de una investigación que busca averiguar como se aproximan los niños al conocimiento del sistema de numeración.

Las investigadoras parten del hecho de que la numeración escrita existe también fuera de la escuela y entonces los niños poseen sabores previos no escolarizados, con respecto al sistema de numeración, que han sido construidos por ellos mismos antes de su ingreso a la institución escolar.

Expresan las autoras que para el diseño de situaciones didácticas de tipo constructivista, en su trabajo se hizo imprescindible averiguar:

— *Los aspectos del sistema de numeración que los niños consideraban relevantes.*
— *Las ideas que habían elaborado acerca de los números.*
— *Los problemas que se habían planteado.*
— *Las soluciones que habían encontrado.*
— *Los conflictos entre las conceptualizaciones de los niños y las características del objeto que intentaban comprender.*

En la lectura se analiza también lo que ocurre cuando los niños intentan relacionar sus saberes previos con los conocimientos aprendidos en el áula.

Sostienen las autoras que los resultados obtenidos en el desarrollo de esta investigación, son suficientes para cuestionar la didáctica que hasta ahora se ha utilizado en la enseñanza del sistema de numeración y para mostrar la pertinencia de utilizar otras modalidades pedagógicas que puedan resultar más eficaces.

Concluimos la presentación de ésta lectura indicando al profesor-alumno el hecho de que áunque el contenido específico del artículo presentado se refiere al sistema de numeración, el propósito de su inclusión en la antología, es el de que propicie la recuperación de ideas y métodos generales aplicables a otros contenidos específicos presentes en su práctica cotidiana.

Por la importancia didáctica que revisten las estrategias parar la recuperación del saber previo, y por presentar en forma clara explícita y sencilla los procedimientos desarrollados en la investigación, en la antología complementaria se presenta la segunda parte de ésta misma lectura.

Debe señalarse que en la misma se describen problemas, enfoques, decisiones y soluciones desarrolladas durante el transcurso de la investigación, así como también nuevas interrogantes que pudieran dar origen a nuevas investigaciones.

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN: UN PROBLEMA DIDÁCTICO

I

De cómo y por qué se inició la investigación que es objeto de estas páginas

Había que encontrar una respuesta. A pesar de los diversos recursos didácticos puestos en juego, el acceso de los niños al sistemade numeración seguía constituyendo un problema. a pesar de nuestros esfuerzos por materializar la noción de agrupamiento –no sólo en base diez, sino también en otras bases–, la relación entre esas agrupaciones y la escritura numérica seguía siendo un enigma para los niños.

*Delia Lerner y Patricia Sadovsky. "El sistema de numeración: un problema didáctico", en: PARRA Cecilia y Saiz Irma (compiladoras). *Didáctica de matemáticas.* Buenos Aires, Ed. Paidós, 1994, pp. 96-140.

Pero la cuestión era más grave aún: al entrevistar niños con los que no trabajábamos didácticamente, constatamos una y otra vez que los famosos "me llevo uno" y "le pido al compañero" –ritual inherente a las cuentas escolares– no tenían ningún vínculo con las *unidades, decenas y centenas* estudiadas previamente. Esta ruptura se manifestaba tanto en los niños que cometían errores al resolver las cuentas como en aquellos que obtenían el resultado correcto: ni unos ni otros parecían entender que los algoritmos convencionales están basados en la organización de nuestro sistema de numeración (Lerner, D., 1992).

Estas dificultades, lejos de ser una particularidad de los niños con los que hemos trabajado, fueron detectadas y analizadas en el marco de estudios realizados en otros países (Kamii, C. y Kamii M., 1980/1988; Sellares, R. y Bassedas, M., 1983; Bednarz B. y Janvier, B., 1982). Al constatar que los niños no comprenden cabalmente los principios del sistema, diversos investigadores proponen alternativas didácticas también diferentes. De este modo, Kamii sugiere postergar la enseñanza de las reglas del sistema de numeración, en tanto que Bednarz y Janvier intentan perfeccionar el trabajo sobre el agrupamiento explicitándolo a través de distintas materializaciones y planteando situaciones en las que agrupar resulte significativo por ser un recurso económico para contar rápidamente cantidades grandes.

Ninguna de estas dos propuestas toma en cuenta un hecho que la didáctica constructivista no puede ignorar: dado que la numeración escrita existe no sólo dentro de la escuela sino también fuera de ella, los niños tienen oportunidad de elaborar conocimientos acerca de este sistema de representación desde mucho antes de ingresar en primer grado. Producto cultural, objeto de uso social cotidiano, el sistema de numeración se ofrece a la indagación infantil desde las páginas de los libros, las listas de precios, los calendarios, las reglas, los talonarios de la panadería, las direcciones de las casas...

¿Cómo se aproximan los niños al conocimiento del sistema de numeración? Averiguarlo era un paso necesario para diseñar situaciones didácticas que dieran oportunidad a los chicos de poner en juego sus propias conceptualizaciones y confrontarlas con las de los otros, que les permitieran elaborar diversos procedimientos y explicitar argumentos para justificarlos, que los llevaran a descubrir lagunas y contradicciones en sus conocimientos, que brindaran elementos para detectar los propios errores, que –en suma– los obligaran a cuestionar y reformular sus ideas para aproximarse progresivamente a la comprensión de la notación convencional.

Era necesario entonces –antes de elaborar una propuesta didáctica y someterla a prueba en el aula– emprender un estudio que permitiera descubrir cuáles son los aspectos del sistema de numeración que los niños consideran relevantes, cuáles son las ideas que han elaborado acerca de ellos, cuáles son los problemas que se han planteado, cuáles son las soluciones que han ido construyendo, cuáles son los conflictos que pueden generarse entre sus propias conceptualizaiciones o entre éstas y ciertas características del objeto que están intentando comprender.

Las entrevistas clínicas que realizamos con parejas de niños de cinco a ocho años[1] no sólo confirmaron nuestras expectativas –al poner de manifiesto la relevancia de los conocimientos construidos por los chicos sobre la numeración escrita–, sino que además nos depararon una agradable sorpresa: desde un principio fue posible establecer regularidades al analizar los datos que obteníamos.

La aparición y reaparición de ciertas respuestas –ideas, justificaciones, conflictos– fue el disparador que nos llevó a esbozar, antes de lo previsto, posibles líneas de trabajo didáctico. Es por eso que, mientras continuábamos realizando entrevistas clínicas, empezamos a poner a prueba en el aula algunas actividades. Como suele suceder, cuando llevábamos a la práctica cada una de estas actividades, la propuesta se iba ajustando y enriqueciendo: por una parte, nosotros descubríamos nuevos problemas que era necesario resolver; por otra parte, los chicos establecían relaciones y nos sorprendían con preguntas o con procedimientos que abrían nuevas perspectivas para el trabajo didáctico.

Queda mucho camino por recorrer: es necesario dar respuesta a nuevos interrogantes –surgidos a partir de lo que ahora sabemos– sobre el proceso de apropiación de la numeración escrita; es imprescindible también que la propuesta diseñada sea objeto de una investigación didáctica rigurosa que permita elaborar conocimiento válido sobre la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración en el contexto escolar.

De todos modos, los resultados ya obtenidos son suficientes para poner en tela de juicio el enfoque que hasta ahora se ha dado a la enseñanza del sistema de numeración y para mostrar la eficacia de otra modalidad de enseñanza que favorece una comprensión mucho más profunda y operativa de la notación numérica.

II

Donde se cuenta la historia de los conocimientos que los niños elaboran sobre la numeración escrita

¿Qué conclusiones podrían extraer los chicos a partir de su contacto cotidiano con la numeración escrita? ¿Qué información relevante podrían obtener al escuchar a sus padres quejarse del aumento de los precios, al tratar de entender cómo sabe su mamá cuál de las marcas de un producto es la más barata, al ver que su hermano recurre al almanaque para calcular los días que aún faltan para su cumpleaños, al alegrarse porque en la panadería "ya van por el treinti" y su papá tiene el treinta y cuatro, al preguntarse qué tiene que ver la dirección que escribió su mamá (Córdoba 4859) con la indicación que le está dando a su hermana ("tenés que bajar al cuatro mil ochocientos")...? Dicho de otro modo: ¿qué podrían aprender los chicos al presenciar situaciones en las que los usuarios del sistema de escritura que los rodean nombran, escriben y comparan números? Preguntas como éstas nos hacíamos antes de iniciar la investigación.

Suponíamos que los niños construían tempranamente criterios para comparar números; pensábamos que –mucho antes de sospechar la existencia de centenas, decenas y unidades– alguna relación debían establecer entre la posición de las cifras y el valor que ellas representan; creíamos que los chicos detectaban regulidades al interactuar con la escritura de fragmentos de la serie. Algunas producciones no convencionales que habíamos visto reinteradamente en las aulas nos llevaron a formular dos suposiciones: que los chicos elaboran criterios propios para producir respresentaciones númericas y que la construción de la notación convencional no sigue el orden de la serie, aunque ésta desempeñe un papel importante en esa construcción.

Para verificar –y también para precisar– estas suposiciones, diseñamos una situación experimental centrada en la comparación de números y otra centrada en la producción.

La primera era una variante del juego de la guerra: utilizamos un mazo de veinte cartas con números comprendidos entre el 5 y el 31 y con un único dibujo en cada carta –el que identificaba el palo–. y de tal modo que la comparación se basara exclusivamente en la escritura numérica. al finalizar cada mano, pedíamos a los niños que justificaran las decisiones tomadas durante el juego.

La consigna que daba inicio a la segunda situación era: "Piensen un número muy alto y escríbanlo". Comenzaba luego una discusión en la que los niños opinaban sobre la escritura del compañero y decidían cuál de los dos había escrito un número mayor. Lo que ocurría después dependía mucho de las respuestas y argumentos proporcionados por los chicos y, aunque tomaba la apariencia de un "dictado de cantidades", se trataba de un dictado cuya característica central era el debate sobre las escrituras producidas.

Los datos que recogiamos mostraron una alentadora coincidencia con los obtenidos en el marco de la investigación que están realizando Bressan, Rivas y Scheuer, y nos permitieron delinear el recorrido de los chicos en su intento por conocer el sistema de numeración. Intentamos explicitar los aspectos esenciales de ese recorrido.

Cantidad de cifras y magnitud del número o "Este es más grande, ¿no ves que tiene más números?"

Las afirmaciones de los niños entrevistados muestran que ellos han elaborado una hipótesis que podría explicarse así: "Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número".

Veamos alguos ejemplos:

— Alina (6 años, primer grado), al justificar sus decisiones en el juego de la guerra, afirma que 23 es mayor que 5 "porque éste (23, pero ella no lo nombra porque desconoce su denominación oral) tiene dos números y tiene más, y éste (5) tiene un solo número".

— Loli (6 años, primer grado) afirma –en la misma situación– que 12 es mayor que 6 "porque tiene más números".

— Alan (6 años, primer grado) pone en evidencia que la hipótesis referida a la cantidad de cifras que constituyen un número es mucho más fuerte que cualquier otra consideración vinculada al valor absoluto de cada cifra:

(El experimentador hace una contrasugestión que estaba prevista en el diseño de la situación y que fue rechazada por todos los niños cuando se comparaban números de una y dos cifras).

Experimentador	*Alan*
A mí me dijo un chico el otro día que el más grande era éste (9), porque acá había un dos y un uno, y el nueve era más grande que el dos y el uno.	(Se ríe) ¿Cuántos años tiene?
Después te cuento. Vos primero decíme qué pensás de lo que dijo.	Nada que ver. Un año.
¿Por qué?	¡Porque qué tienen que ver el dos y el uno! *Se forma un número solo.*
¿Se forma un número solo?	Y sí, por ejemplo, *algo de cien son tres números y forman un número solo.*

— En el caso de Jonathan y Sebastián (primer grado), la hipótesis que vincula la cantidad de cifras a la magnitud del número no se refiere sólo a los números de una y dos cifras, sino que se ha generalizado a la comparación de números más grandes:

Experimentador	*Jonathan*	*Sebastián*
Ahora les voy a pedir a los dos que escriban el mil cinco.	(Ambos escriben convencionalmente 1005)	
(A Sebastián.) Fijáte cómo lo escribió Jonathan.		Lo escribimos los dos igual.
¿Y por qué se escribe así el mil cinco?	No sé	
Si se lo tuvieran que explicar a otro chico, ¿qué le dirían?	Le diría que es con un uno, un cero, otro cero y un cinco.	

Experimentador	*Jonathan*	*Sebastián*
El otro día un nene me dijo que el mil cinco se escribía así: 1000 5 mil cinco		Porque éste (1000) es mil y éste es cinco
¿Te parece que está bien así? ¿Por qué?		No. Porque el cinco tiene que ir acá (señala el último cero de 1000)
¿Por qué tiene que ir acá?		Porque en vez del cero va el cinco.
¿Y éste (10005) entonces?	Es otro número	Sí
¿Y es más o menos que 1005?		Es más
¿Cómo te das cuenta?	Porque tiene más números, tiene un cero más	Porque tiene más
¿Los que tienen más números son más grandes?	Sí	Sí

Como se puede observar en las últimas líneas del ejemplo anterior, el criterio de comparación que los chicos han construido funciona aun cuando ellos no conozcan la denominación oral de los números que están comparando[2]. Se trata entonces de un criterio elaborado fundamentalmente a partir de la interacción con la numeración escrita y en forma relativamente independiente del manejo de la serie de los nombres de los números. Se trata también de una herramienta poderosa en el ámbito de la notación numérica, ya que permirá comparar cualquier par de números cuya cantidad de cifras sea diferente.

Ahora bien, esta herramienta –que era manejada ya por todos los niños entrevistados para establecer comparaciones entre números de una y dos cifras y que muchos de ellos utilizaban también para comparar números compuestos por más cifras[3] no se generaliza de forma inmediata a todos los casos.

Fue uno de nuestros sujetos el que nos mostró algunas de las dificultades por las que debe atravesar esta generación: Pablo (6 años, primer grado), después de haber afirmado –como los niños anteriormente citados– que es mayor "el que tiene más números" siempre que se trataba de comparar un número de una cifra con otro de dos y también en algunas situaciones donde se comparaban números de dos y tres cifras (824 y 83, 138 y 39, etc.), hace afirmaciones contradictorias cuando se trata de comparar 112 y 89. En efecto, él dice en primer término que 112 es mayor que 89 (señalándolos, no conoce las denominaciones) "porque tiene más números", pero luego cambia de opinión: "No, es más grande éste (89), porque 8 más 9 es 17, y entonces es más".

Dado que en los otros casos Pablo no había apelado para nada a la suma de los valores absolutos de las cifras y había tomado la cantidad de cifras como criterio único para establecer la comparación, pensamos que es la gran diferencia entre los valores absolutos de las cifras de ambos números lo que lo lleva a poner en tela de juicio el criterio de comparación que había utilizado consistentemente en todos los casos anteriores, a renunciar a él y a elaborar otro específico para esa situación. Cabe preguntarse por qué Pablo no apela explícitamente al valor de los dígitos que componen esos números, sino al resultado que se obtiene al sumarlos[4].

Aunque Pablo fue el único de los sujetos entrevistados que puso en juego otro criterio de comparación además del basado en la cantidad de cifras, considerámos significativa la información que él aporta porque confirma que –como ocurre con otros objetos de conocimiento– la generalización está lejos de ser inmediata. Además, el criterio alternativo utilizado por Pablo da cuenta de un problema que probablemente se planteen todos los chicos en determinado momento de la construcción: ¿cómo se puede explicar que un número cuyas cifras son todas "bajitas" (1110, por ejemplo) sea mayor que otro formado por cifras "muy altas" (999, por ejemplo)?

Si bien es necesario profundizar en el estudio del proceso a través del cual se construye este criterio de comparación –cómo se concibe, cómo se generaliza, qué conflictos debe afrontar–, es indudable que su elaboración constituye un paso relevante hacia la comprensión de la numeración escrita.

La posición de las cifras como criterio de comparación o "el primero es el que manda"

Al comparar numerales de igual cantidad de cifras, los niños esgrimen argumentos a través de los cuales se evidencia que ellos ya han descubierto que la posición de las cifras cumple una función relevante en nuestro sistema de numeración:

- Lucila (5 años, preescolar), después de afirmar que 21 es mayor que 12, lo justifica así: "Porque el uno (en 12) es primero y el dos es después; porque (en 21) el dos es primero y el uno es después".
- Nadia (6 años, primer grado) no consigue explicar cómo se da cuenta de que 31 es mayor que 13. Se le pregunta entonces cómo se lo explicaría a otro chico, y ella responde: "Que se fije dónde está el 3 y dónde está el 1, o dónde está el 1 y dónde está el 3".
- Alina, y sobre todo Ariel (6 años, primer grado), son más explícitos:

Experimentador	*Alina*	*Ariel*
¿Por qué ganó éste? (21)		
(El experimentador pide justificación de la decisión que ellos tomaron cuando los números comparados eran 12 y 21.)		Porque éste (21) es más alto que éste (12).
Pero son los mismos números.	Sí, pero al revés...	Al revés.
¿Al revés? ¿Y eso qué tiene que ver?		Tiene que ver mucho. Éste (el 2 de 21) es más alto que éste (el 1 de 12) y se diferencia por el primero.
¿Y por qué será que se diferencia por el primero?		Porque sí.
¿No hay una razón?		¡Yo qué sé!
¿Vos sabés qué número es éste?		Veintiuno.
¿Y éste?		Doce.

Experimentador	*Alina*	*Ariel*
¿Y de ahí podés sacar algo para darte cuenta de cuál es el más alto?	Sí, porque éste (21) está después y éste (12) está primero.	
¿Dónde está primero?		Hacemos la cuenta. Mirá: uno, dos, tres... (sigue contando hasta doce) acá está el doce... trece, catorce... (sigue contando hasta veintiuno) veintiuno ¿Viste? ¿Hicimos la cuenta?
De acuerdo. Ahora me convenciste.	(Luego, al comparar 21 y 23, Ariel dice que este último es mayor, porque tres es más que uno y, ante una pregunta del experimentador, aclara que en este caso se fija en el segundo número "porque en el primero hay un dos y un uno".)	

Otros sujetos explicitan con mayor claridad aún cómo debe aplicarse el criterio de comparación basado en la posición de las cifras. Veamos cómo lo expresa Guillermo:

Guillermo	*Yael*
	(Ya decidió que 21 es mayor que 12.)
	Tienen los mismos números. Nada más que acá el dos está adelante y acá está atrás.
El que más valor tiene es el de adelante	Los dos tienen valor.
Sí, los dos tienen valor. Podés fijarte en el de atrás. *Pero primero fijáte en el de adelante.* [...] Si el primer número de una carta es igual al primer número de la otra y el segundo es uno más alto que el otro, sí importa el segundo.	

Los niños citados han descubierto ya –además de la vinculación entre la cantidad de cifras y la magnitud del número– otra característica específica de los sistemas posicionales: el valor que una cifra representa, lejos de ser siempre el mismo, depende del lugar en el que esté ubicada con respecto a las otras que constituyen el número. Saben también que, si se comparan dos números de igual cantidad de cifras, será necesariamente mayor aquel cuya primera cifra sea mayor y por eso pueden afirmar –como lo hicieron muchos de los sujetos entrevistados– que "el primero es el que manda". Saben además que, cuando la primera cifra de las dos cantidades es la misma, hay que apelar a la segunda para decidir cuál es mayor.

Llama la atención el hecho de que para muchos niños los argumentos estrictamente referidos a la numeración escrita tengan prioridad sobre los vinculados a la serie numérica oral. Alina y Ariel, por ejemplo, justifican originalmente sus afirmaciones apelando a la posición de las cifras en los números escritos ("Están al revés", "Se diferencia por el primero"), y sólo aportan argumentos referidos a la serie oral ("Sí, porque éste (21) está después y éste (12) está primero") cuando el experimentador los insta a hacerlo.

Ahora bien, tal como lo observáramos en relación con la hipótesis referida a la cantidad de cifras, el criterio de comparación basado en la posición de las cifras está lejos de construirse de una vez y para siempre, ya que su generalización requiere también la superación de algunos obstáculos. Es lo que nos muestra Alina, quien –a pesar de haber aplicado consistentemente este criterio en casi todos casos– tropieza con una dificultad cuando se trata de comparar 25 y 16:

(La situación se produce durante el juego. La carta de Alina tiene el número 25, la de Ariel el número 16.)

Experimentador	*Alina*	*Ariel*
¿Quién ganó?	Ganó Ariel.	No, ganó ella.
	Él, porque éste (25) tiene un dos y un cuatro (!), y éste (16), un uno y un seis [...] Éste (25) tiene un número menos, y éste (señalando el 6 de 16), un número más.	¡No! Pero se cuenta con el primero.

Alina parece sostener aquí que es mayor el número que contiene la cifra más alta, independientemente del lugar en que ella esté ubicada. Parece que, también en este caso, el valor absoluto de los números puede hacer dudar de la validez de un criterio que se consideraba válido para muchos otros casos.

Por otra parte, como lo muestran claramente algunas respuestas de Ariel ("Porque sí", "¡Yo qué sé!"), el conocimiento que los niños tienen sobre la variación del valor de las cifras en función del lugar que ocupan no va acompañado –ni mucho menos precedido– por el conocimiento de las razones que originan esta variación. Estos niños no sospechan aún que "el primero es el que manda" porque representa grupos de 10 si el número tiene dos cifras, de 10 2 si tiene tres... en tanto que las siguientes representan potencias menores de la base 10.

Todavía no han descubierto la regla del sistema (la agrupación recursiva en base 10), pero esto no les impide en absoluto elaborar hipótesis referidas a las consecuencias de esa regla –la vinculación entre la cantidad de cifras o su posición y el valor del número– y utilizarlas como criterios válidos de comparación de números. A partir de estas hipótesis, ellos podrán sin duda plantearse –y el maestro podrá plantearles– interrogantes que los conducirán, a través de aproximaciones sucesivas, a descubrir las reglas del sistema.

En efecto, en tanto que Ariel no intenta justificar su afirmación –contesta con un lacónico "porque sí" cuando se le pregunta por qué "se diferencia por el primero"–, otros niños han encontrado ya una explicación de ese criterio que ellos mismos han elaborado. Es lo que nos muestra, por ejemplo, Guillermo (6 años, primer grado), quien se ve obligado a explicitar su argumentación para convencer a su compañera:

Experimentador	*Guillermo*	*Yael*
¿Cuál es más alto? (se están comparando 25 y 31).	Éste (31).	A mí me parece que éste (25), porque tiene un dos y un cinco y éste (31) tiene un tres y un uno. Más altos son estos números (señalando las cifras de 25).
	Éste (31) es más alto. ¿Por qué? Porque mirá: no tiene	

Experimentador	*Guillermo*	*Yael*
	nada que ver el segundo número con el primero, porque acá *tres* y acá (2 de 25) *dos*. Dos es menos que tres. Ésto es *treinti*uno y ésto es *veinti*cinco, no *treinti*cinco.	
(A Yael) ¿Qué te parece lo que él dice? ¿Lo entendés?		No (riéndose)
Explicále mejor, Guillermo.	Mirá, primero viene el diez y segundo saltás diez, diez, diez, así ¿no? Entonces se cuenta, diez, veinte, treinta... entonces al treinta le *sacamos* cinco y nos queda veinticinco y acá (31) al treinta le *agregamos* uno, nos queda treinta y uno.	

Guillermo no ha oído aún hablar de "decenas" (acaba de ingresar en primer grado); ni siquiera afirma que la primera cifra de un número de dos cifras se refiere a "dieces". Pero él sabe muy bien que esa primera cifra se refiere a algo del orden de los "veinti", "treinti" o "cuarenti" en lugar de representar simplemente "dos", "tres" o "cuatro", y sabe también que esos números –veinte, treinta, etc.– se obtienen contando de a diez en el orden de la serie.

Sin disponer del extraordinario manejo operatorio que refleja el último argumento de Guillermo, otros niños han proporcionado argumentos similares al primero que él aporta. Seguramente, este tipo de justificación se hace posible cuando los niños logran coordinar lo que han descubierto en la escritura numérica –que el valor de una cifra varía en función de la posición que ocupa– con la información que les aporta la serie numérica oral, a partir de la cual ellos pueden establecer intervalos constituidos por "veintis", "treintis", etcétera.

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando los niños intentan combinar los conocimientos que ellos han construido con los que les han impartido en la escuela? Para responder a esta pregunta, tomaremos como ejemplo a los únicos niños de primer grado que incluyeron en sus respuestas la palabra "decenas".

Experimentador	*Loli*	*Alan*
(Los niños afirmaron que veintiuno es mayor que doce)		
¿Cómo saben que es más grande, si los dos tienen los mismos números?	Acá (21) el dos está delante y acá (12) está atrás.	Sí
Yo no me doy cuenta muy bien, porque son los mismos números.	Sí, pero no están igual ordenados.	Esto (12) es una decena.
¿Cuál?		¡Ah! ¡No! Es una *docena*.

Experimentador	*Loli*	*Alan*
¿Y veintiuno?		Yo no lo sé... Qué es veintiuno una decena... ¡qué se yo! Creo... ¿o no?
¿Una decena?	Sí, tiene una, dos.	
	Acá (señala el 2 del 21).	No, no tiene ninguna decena. El uno no es ninguna decena y el dos tampoco.
	El veinte sí, en el veinte sí hay dos docenas.	

¿Por qué introduce Alan el término "decenas"? Tal vez porque sospecha la existencia de alguna relación entre ese término y el valor de la cifra que aparece ubicada "adelante" en los números de dos cifras. Pero esta sospecha es suficientemente vaga como para que él pueda afirmar que 21 "no tiene ninguna decena, el uno no es ninguna decena y el dos tampoco".

En el caso de Loli, ocurre algo diferente: aunque ella no acude espontáneamente al concepto de decena –sino a la posición de las cifras– para explicar por qué 21 es mayor que 12, parece comprender que el 2 de 21 representa dos decenas. Su respuesta final muestra claramente cómo llegó a comprenderlo: puede entender que en 21 hay dos decenas porque ese 2 no significa para ella "dos" sino "veinti".

Cabe preguntarse entonces: ¿aprender el concepto de decena ayuda realmente a conocer los números? ¿O es más bien el conocimiento de los números –y de su escritura– lo que ayuda a comprender el concepto de decena?

La apropiación de la escritura convencional de los números no sigue el orden de la serie numérica: los niños manejan en primer lugar la escritura de los nudos –es decir de las decenas, centenas, unidades de mil..., exactas– y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos.

Veamos ante todo las respuesta de los niños:

Experimentador	*Gisela*
Escribí un número, el que tengas ganas, que te parezca bastante alto.	(Escribe 1000).

Entrevistador	*Gisela*
¿Cuál es ése?	El mil.
¿Y el dos mil cómo se escribe?	(Escribe 200.)
¿Ese es el dos mil?	(Agrega un cero a su escritura anterior.)
¿Y éste (200) cuál es?	Doscientos.
¿Y éste (tapando un 0 del 1000)	El cien.
¿Y el tres mil?	(Escribe 3000)
¿Y cómo escribirías el dos mil quinientos?	(Gran desconcierto.) No me acuerdo.
¿Y el quinientos?	(Escribe 005.)
Acá tenés el dos mil (señalando una escritura anterior) y áca el quinientos... No te servirá para nada escribir el dos mil quinientos?	Sí... (No se anima.)

El caso de Nadia (6 años, primer grado) es aún más claro:

Experimentador	*Nadia*
Ahora te voy a pedir que escribas un número que vos pensés que es muy alto.	¿Muy alto?
Sí	Voy a escribir como máximo mil (escribe 900)

Entrevistador	*Nadia*
¿Cuál es?	Novecientos
¿Y mil cómo es?	(Escribe 1000.)
¿Cómo te parece que será dos mil?	(Escribe 2000.)
¿Y cuatro mil?	(Escribe 4000.)
¿Nueve mil?	(Escribe 9000.)
¿Diez mil?	(Escribe 10000.)
Y decíme... Mil cien, ¿cómo te parece que es?	(Muy sorprendida) ¿Mil cien? Para mí ese número no existe.

Entrevistador	*Nadia*
¿No existe?	(Piensa un largo rato y luego escribe 1000100.)
¿Mil quinientos?	(Escribe 1000500.)

Si bien la mayoría de los niños entrevistados escribían ya en forma convencional los nudos de las decenas, las centenas y las unidades de mil, obtuvimos algunas respuestas que proveen indicios sobre el camino que los niños recorren para elaborar estas escrituras. Observemos, por ejemplo, las producciones y reflexiones de Christian (5 años, preescolar) en la siguiente situación:

Experimentador	*Christian*	*Rubén*
[...] ¿Y cómo escribirían ustedes el cien?	Ah. No, yo lo puedo escribir bastantes veces el cien.	
¿Cómo es?	Un uno (lo escribe) y dos ceros (los escribe).	(Escribe 100.)
¿Y el doscientos?	Yo no lo sé escribir.	Acá está el doscientos (escribe 200).
¿Y el trescientos?	Voy a escribir todos los números desde el cien hasta donde se termina el cien. 100 (cien) 100 (ciento uno) 200 (ciento dos)	(Escribe 300).
Éste (marcando el primer número escrito por Christian) ¿es el cien?	Sí	
¿Y cuál es el ciento uno?	Éste (marca su segundo número: 100)	
¿Y es igual que éste? (Señalando el primero)	Sí..., no, porque éste (señalando el primer 100) tiene el cero más chiquito y éste (marcando el segundo) tiene el cero más grande.	
¡Ah! ¿El que tiene el cero más grande es el ciento uno? (¡¡Es cierto!!)	Sí, y el uno también es más grande.	

Experimentador	*Christian*	*Rubén*
Ajá. ¿Y ciento cinco, cómo sería?	Esperá que quiero escribir desde el uno hasta donde termina el cien.	(Escribe 10Ƨ.)
Bueno, cuando termines, avisános. (Mientras tanto, se pide a Rubén que escriba ciento treinta, ciento treinta y ocho, doscientos veintitrés, quinientos.)	(Christian ha escrito: 100 100 200 3000 400)	(Escribe: 130 138 223 Ƨ00.)
Y vos, Christian, ¿podrías escribir quinientos?	¿Quién no lo sabe al quinientos? Espero que me salga bien el cinco. (Escribe 500.)	
Bueno, explicáme lo que escribiste antes	(Lee) 100 100 200 300 400 cien ciento uno, ciento dos, ciento tres, ciento cuatro	
Vos dijiste antes que ibas a escribir hasta que se acabara el cien. ¿Cuándo se acaba el cien?	(Piensa un rato) Iba a escribir hasta el ciento nueve (agrega a su serie 500) 100 100 200 300 400 500 Es el ciento cinco (señalando 500) El mismo, ¡¡mirá!! (mostrando la escritura anterior de 500 que él mismo había producido.)	
¿Cuál era ése?	Quinientos	
¿Y éste? (señalando el que él acaba de producir).	Ciento cinco	
¿Y te parece que puede ser que quinientos y ciento cinco se escriban igual?	No	
¿Y cómo nos damos cuenta de cuál es cuál?	Hago uno grande y otro chiquito.	
¿Con los mismos números?	A éste (al que había interpretado antes como quinientos) le hago una raya: <u>500</u> y al otro lo dejo sin raya.	
¿Con raya cúal es?	Quinientos	
¿Y sin raya?	Ciento cinco.	(Ha escrito mientras tanto, a pedido del experimentador siempre en forma convencional: 110, 900, 932, 907)
¿Y mil?	Yo lo sé escribir.	
A ver, ¿cómo lo escribirían?	(Escribe 1000.) ¡Cómo no voy a saber escribir el mil si antes escribí el cien mil! (Efectivamente, lo había escrito así: 1001000.)	1000

Christian maneja ya la escritura convencional de la segunda y la tercera potencia de la base (100 y 1000)- ¿Cómo utiliza el conocimiento de la escritura de cien para producir los números siguientes? Parece que no la utiliza como base para producir los otros nudos de las centenas –él dice que no sabe escribir doscientos, y quinientos parece ser una forma fija, problabemente conocida a través del billete de 500 australes–,5 sino para hipotetizar acerca de la escritura de los números comprendidos entre cien y ciento diez. El supone que estos numeros tendrán dos ceros –como cien– y que se diferencian de cien por la cifra inicial. El problema es que esta hipótesis no le permite diferenciar –utilizando números distintos– cien de ciento uno, y seguramente es por eso que apela al tamaño para diferenciarlos. Resulta además impactante constantar que el hecho de conocer la escritura convencional de quinientos no lo lleva a dudar de su hipotesis –en efecto, sigue afirmando que 500 representa ciento cinco–, sino a emplear un recurso no numérico para diferenciar las dos escrituras[6].

Ahora bien, varios niños nos proveyeron–trabajando en el aula– escrituras aparentemente inversas a las de Christian, pero cuyo significado nos parece similir: ellos escriben cuatrocientos como 104, trescientos como 103, seiscientos como 106. Estos niños piensan quel la escritura de los otros nudos de las centenas conserva características de la escritura de 100: también tienen tres cifras, pero en este caso se mantienen las dos primeras –el uno y el cero iniciales de 100– y se expresa la diferencia variando el último número.

Todos estos datos sugieren que los niños se apropian en primer termino de la escritura convencional de la potencia de la base (100, es decir 10 2, en este caso), y que la escritura de los otros nudos correspondientes a esa potencia se elabora sobre ese modelo, conservando la cantidad de cifras, manteniendo dos de las cifras que componen cien y variando la otra. El caso de Christian indica que un procedimiento similar podría ser utlizado – al menos por algunos niños– para reconstruir la escritura de los números ubicados entre 100 y 110. El problema que se les planteará entonces será el de encontrar una manera de diferenciar numéricamente la escritura de doscientos y la de ciento dos, la de quinientos y la de ciento cinco, etcétera. La búsqueda de esta diferenciación seguramente conducirá a descubrir que en el caso de los nudos (200, 300, etc.) lo que varía –en relación con la escritura de cien– es el primer número, en tanto que en el caso de 101... 109, lo que varía es el último.

El papel de la numeración hablada

Los niños elaboran conceptualizaciones acerca de la escritura de los números, basándose en las informaciones que extraen de la numeración hablada y en su conocimiento de la escritura convencional de los nudos.

Para producir los números de cuya escritura convencional no se han apropiado aún, los chicos yuxtaponen los símbolos que conocen disponiéndolos de modo tal que se correspondan con el orden de los términos en la numeración hablada.

Veamos algunas escrituras y justificaciones de los sujetos entrevistados que ilustran claramente lo que intentamos decir:

— Lucila y Santiago (los dos tienen 5 años y asisten al jardín de infantes) escriben:

108 109

Los dos interpretan sus escrituras como "dieciocho" y "diecinueve" respectivamente.

— Yael hace algo similar, pero además nos explica:

Mientras está registrando su puntaje en el juego de la guerra, anota "dieciocho" como 108 justifica diciendo que dieciocho se escribe "porque hay un diez, que es un uno y un cero, entonces se ponen los dos con el ocho".

Guillermo –su compañero, que escribe convencionalmente los números de dos cifras– objeta: "¿No! Porque es como pasa con el veinte o con el treinta... Porque el cero se usa para el treinta, pero *no se usa* para el treinta y uno, ni para el treinta y dos, ni para el treinta y tres, [...] De tres números no se puede, no se puede [...] porque *el cien* se escribe así [100]". Yael lo escucha atentamente, pero un rato después escribe treinta y cuatro como 304 y –al mirar la escritura convencioanal de Guillermo (34)– afirma: "Para mí, se puede hacer de las dos maneras".

— Martín (6 años, primer grado) escribe:

700	25	1000	800	32
setecientos	veinticinco	mil	ochocientos	treinta y dos
8000	200	6000	300	45
ocho mil	doscientos	seis mil	tres cientos	cuarenta y cinco

En el último caso, corrige su escritura después de interpretarla y lo hace así: 630045.

— Dan (6 años, primer grado) escribe también 600030045; al igual que Martín, considera incorrecta su escritura, pero la corrige de otra forma: 63045.

— Daniela (5 años, preescolar), que escribe convencionalmente todos los números de dos y tres cifras que le proponemos, y también un número de cuatro cifras (1036), hace algo diferente cuando le pedimos que escriba mil quinientos treinta y seis. Su producción original es:

original es:	1000	500	36
la lee así:	mil	quinientos	treinta y seis

e inmediatamente la corrige: 1000536.

Luego escribe ocho mil quinientos treinta y cuatro: 8 1000 50034, y en seguida rectifica: 8 1000534. Para cuatro mil ciento cuarenta y cinco produce: 4 1000 145.

— Christian –quien, como hemos visto en el punto anterior, escribe convencionalmente cien y mil, pero produce los números comprendidos entre 100 y 110 basado en una hipótesis que le es propia– escribe en forma convencional también un millón (1.000.000). Sin embargo, cuando le solicitamos que escriba otros números, sus producciones son las siguientes:

Mil ciento cinco:	1000	100	5
Dos mil:	2	1000	
Diez mil:	10	1000	
Cien mil:	100	1000	

Al comparar su escritura de cien mil con la de Rubén (1000.000), Christian considera posibles las dos escrituras: "Si yo le sacara éste (el 1 de 1000) y pusiera un punto, igual dice cien mil". Pero en seguida señala: "También sé escribir un millon diez" y escribe: 100000010. "Cuando escribís un millón diez –agrega– no podés sacarle el uno (el de diez), porque no sabés si es ése. Y entonces, ¿cómo adivinás qué número es? No sabés que es diez". (En otros términos, este uno no puede reemplazarse por un punto, como ocurre con el 1 de 1000 en cien mil).

La hipótesis según la cual la escritura numérica resulta de una correspondencia con la numeración hablada conduce a los niños a producir notaciones no convencionales. ¿Por qué ocurre esto? Porque, a diferencia de la numeración escrita, la numeración hablada no es posicional.

En efecto, si la organización de la númeración hablada fuera posicional, la denominación oral correspondiente a 4705, por ejemplo, sería "cuatro, siete, cero, cinco"; sin embargo, la denominación realmente utilizada para ese número explicita, además de las cifras cuatro, siete y cinco, las potencias de diez correspondientes a esas cifras (cuatro *mil* sete*cientos* cinco).

Otra cuestión que debe ser tomada en cuenta es la de las operaciones involucradas en la numeración hablada y en la numeración escrita.

En la numeración hablada, la yuxtaposición de palabras supone siempre una operación aritmética, operación que en algunos casos es una suma (mil cuatro significa 1000 + 4, por ejemplo) y en otros una multiplicación (ochocientos significa 8 x 1000, por ejemplo). En la denominación de un número, estas dos operaciones aparecen en general combinadas (por ejemplo, cinco mil cuatrocientos significa 5 . 1000 + 4 . 100) y –como para complicarle la existencia a quien intente comprender el sistema– un simple cambio en el orden de enunciación de las palabras indica que ha cambiado la operación aritmética involucrada: cinco mil (5 . 1000) y mil cinco (100 + 5), seiscientos (6 . 100) y ciento seis (100 + 6). Para colmo de males, la conjunción "y" –que representa lingüisticamente la adición– sólo aparee cuando se trata de reunir decenas y unidades.

Ahora bien, ¿podemos afirmar que las escrituras no convencionales producidas por los chicos son efectivamente aditivas y/o multiplicativas? Cuando ellos escriben doscientos cincuenta y cuatro como 200504, ¿piensan que el valor total de ese número se obtiene sumando 200+50+4?; cuando escriben 4 1000 para cuatro mil, ¿están representando la idea de que el valor total de ese número se obtiene multiplicando 4 . 1000? ¿Comprenden los niños las operaciones que parecen estar involucradas en sus escrituras o bien éstas resultan simplemente del establecimiento de una correspondencia con la numeración hablada?

Nos interesa encontrar respuestas para los interrogantes formulados porque la suma y la multiplicación por las potencias de la base están también involucradas en la numeración escrita convencional. Por lo tanto, si los chicos descubrieran las operaciones implicadas en la numeración hablada, este conocimiento será relevante para entender cómo funciona la numeración escrita.

La numeración escrita es al mismo tiempo más regular y más hermética que la numeración hablada. Es más regular porque la suma y la multiplicación se aplican siempre de la misma manera: se *multiplica* cada cifra por la potencia de la base a la que corresponde, se *suman* los productos resultantes de esa multiplicación[7]. Es más hermética porque en ella no hay ningún rastro de las operaciones aritméticas involucradas y porque –a diferencia de lo que ocurre con la numeración hablada– las potencias de la base no se representan a través de símbolos particulares sino que sólo pueden inferirse a partir de la posición que ocupan las cifras.

Hemos iniciado indagaciones destinadas a responder las preguntas antes planteadas. Los datos recogidos hasta ahora muestran que los chicos que producen notaciones en correspondencia con la numeración hablada pueden haber descubierto o no las relaciones aritméticas subyacentes a ella: mientras que algunos vinculan –por ejemplo– la escritura 200 50 4 a la edición de 200, 50 y 4, otros la justifican apelando exclusivamente a las palabras que constituyen la denominación oral del número representado. Estos resultados –muy insuficientes aún– llevan a suponer una progresión posible desde una simple correspondencia entre el nombre y la notación del número hacia la comprensión de las relaciones aditivas y multiplicativas involucradas en la numeración hablada.

Las escrituras numéricas no convencionales producidas por los niños están hechas entonces a imagen y semejanza de la numeción hablada. Ahora bien, quien adhiere a la escritura no convencional ¿lo hace en forma absoluta o es simultáneamente partidario de la notación convencional?

En las escrituras numéricas realizadas po cada niño en el curso de una entrevista, coexis ten modalidades de producción distintas par números ubicados en diferentes intervalos d la serie. En efecto, niños que escriben conve cionalmente cualquier número de dos cifras (2 44, 83, etc.) producen escrituras en correspo dencia con la numeración hablada cuando s trata de centenas (10035 para ciento treinta y ci co, 20028 para doscientos veintiocho, etc.). D mismo modo, niños que escriben conviciona mente números de dos y tres cifras apelan a correspondencia con lo oral cuando se trata d escribir miles: escriben –por ejemplo– 135, 4 o 942 en forma convencional, pero represent mil veinticinco como 100025 o mil trescientos treinta y dos como 100030032 o 1000332.

Sin embargo, la coexistencia de escrituras convencionales y no convencionales puede aparecer también para números de la misma cantidad de cifras: algunos chicos escriben convencionalmente números comprendidos entre cien y doscientos (187, 174, etc.), pero no generalizan esta modalidad a las otras centenas (y anotan entonces 80094 para ochocientos noventa y cuatro o 90025 para novecientos veinticinco). Por otra parte, muchos niños producen algunas escrituras convencionales y otras que no lo son en el interior de una misma centena o de una misma unidad de mil: 804 (convencional), pero 80045 para ochocientos cuarenta y cinco; 1006 para mil seis, pero 1000324 para mil trescientos veinticuatro.

Señalemos, finalmente, que la relación numeración hablada–numeración escrita no es unidireccional: así como la información extraída de la numeración hablada interviene en la conceptualización de la escritura numérica, recíprocamente, los conocimientos elaborados sobre la escritura de los números inciden en los juicios comparativos referidos a la numeración hablada. Veamos, por ejemplo, lo que ocurre con Christian (5 años) al comparar cien mil y mil cien:

Experimentador	*Christian*
¿Cómo escribirías mil cien?	No, cien mil.
Cien mil es un número. Mil cien, ¿es otro número?	No, es igual. Es al revés.
¿Pero es el mismo número? Por ejemplo, si yo digo que tengo cien mil australes o mil cien australes, ¿es lo mismo?	No, porque está al revés el número.
¿Y cuándo tengo más? ¿Cuándo tengo cien mil o cuando tengo mil cien australes?	Porque en mil cien está el mil primero, y el mil es más grande que el cien. Cuando tengo mil cien.
¿Y cuándo te das cuenta de que mil cien es más	

(Respuestas similares se producen luego al comparar diez mil y mil diez.)

Christian aplica a la numeración hablada un criterio que, como sabemos, ha elaborado para la numeración escrita: "El que manda es el primero". El razonamiento subyacente al argumento que esgrime parece ser el siguiente: cien mil y mil cien están compuestos los dos por los mismos símbolos –mil y cien (o 1000 y 100)–; para saber cuál es mayor, hay que fijarse en el de adelante. Christian supone que esta regla –es válida para la numeración escrita– es válida también para la numeración hablada y es esta suposición de una coherencia mayor que la existente la que lo induce a error.

Evidentemente, no es tarea fácil descubrir qué es lo que está oculto en la numeración hablada y qué es lo que está oculto en la numeración escrita, aceptar que lo uno no coincide siempre con lo otro, detectar cuáles son las informaciones provistas por la numeración hablada que resulta pertinente aplicar a la numeración escrita y cuáles no, descubrir que los principios que rigen la numeración escrita no son directamente trasladables a la numeración hablada...

Y sin embargo, a pesardde todas estas dificultades inherentes al objeto de conocimiento, los niños se apropian progresivamente de la escritura convencional de los números que antes producían a partir de la correspondencia con la numeración hablada. ¿Cómo lo hacen? Es lo que trateremos de mostrar en el próximo punto.

Del conflicto a la notación convencional

Dos de las conceptualizaciones que hemos descrito en los puntos anteriores llevarán a los niños a conclusiones potencialmente contradictorias:

— por una parte, ellos suponen que la numeración escrita se corresponde estrictamente con la numeración hablada,

— por otra parte, ellos saben que en nuestro sistema de numeración la cantidad de cifras está vinculada a la magnitud del número representado.

La primera de estas conceptualizaciones se aplica fundamentalmente a la escritura de números ubicados en los intervalos entre nudos, en tanto que estos últimos son representados en forma convencional. En consecuencia, las escrituras producidas por los niños para los números ubicados entre dos nudos determinados tendrán más cifras que las que representan a los nudos mismos: ellos escribirán convencionalmente, por ejemplo, 2000 y 3000, pero dos mil setecientos ochenta y dos será representado como 200070082 (o, eventualmente, como 2000782).

El niño podría aceptar que dos mil setecientos ochenta y dos se escriba con más cifras que dos mil, puesto que el primero es mayor que el segundo. Pero, si él piensa simultáneamente que un número es mayor cuantas más cifras tenga, ¿cómo puede aceptar que dos mil setecientos ochenta y dos se se escriba con más cifras que tres mil? De este modo, la escritura producida a partir de una de sus conceptualizaciones –la correspondencia con la numeración hablada– resulta inaceptable si se la evalúa a partir de otra de sus conceptualizaciones – la vinculación entre cantidad de cifras y mangnitud del número.

¿Cómo maneja el niño estacontradicción entre sus conceptualizaciones? ¿Toma conciencia de ella de inmediato? ¿En qué se apoya para resolverla?

Los datos recogidos hasta ahora sugieren que, en un comienzo, la contradicción detecta-

Entrevistador	*Christian*	
Ahora les voy a pedir que escriban cuatro mil ciento tres.	410001003.	4000103.
¿Cuál es más grande, cuatro mil o cuatro mil ciento tres?	Siempre es más grande que cuatro mil.	
¿Cuál es más grande?	Porque cuatro mil es un cuatro y tres ceros pero cuatro mil ciento tres tiene más de tres ceros; porque mirá, contá: uno, dos tres, cuatro, cinco (mientras cuenta los ceros de su escritura).	
Y el cinco mil, ¿cómo es?	51000.	ƨ000.
Vamos a discutir cuál es la diferencia entre lo que pusieron los dos.	(Para Christian es lo mismo.)	(Según Rubén no hay que poner el uno.)
	¿No te acordás de que antes dijimos que podíamos poner el mil con uno o sin uno? ¿No te acordás?	
Parece que él no está de acuerdo. Entonces, entre cuatro mil ciento tres y cinco mil, ¿cuál es más?	Siempre es más éste. (410001003).	Cuatro mil ciento tres.
¿Cuatro mil ciento tres es más que cinco mil?	No..., éste..., sí. Sí, éste es más, porque mirá qué diferencia: tres ceros acá, y acá... ¿Cuántos ceros?	
O sea que...	(Interrumpe) ¡Ah!, pero eso sí, una cosita, más que un millón *NO* es esto, *no te creas que es el último número infinito.*	
No, no me lo creo. ¿Me pueden explicar un poco más por qué el cuatro mil ciento tres es más que el cinco mil?	Sí, porque éste (51000) tiene menos ceros.	
¿Vos, Ruben, qué pensás?		Este (4000103)
¿Por qué?		Porque es más grande.
¿Por qué tiene más números?		Sí.

da por el observador no se constituye en un conflicto para los niños. Veamos algunos ejemplos:

Christian y Rubén se centran exclusivamente en la cantidad de cifras de las escrituras que ellos mismos han producido y parecen ignorar cualquier otra consideración acerca del valor de los números representados. ¿Piensan ellos realmente que cuatro mil ciento tres es mayor que cinco mil? ¿O bien saben que cinco mil es mayor que cuatro mil ciento tres, pero no pueden hacer intervenir aquí este conocimiento? La duda momentánea de Christian ("No... éste... sí [...]"), es en este caso, el único indicio de que él podría tener algún motivo para cuestionar el juicio que emite basándose en la cantidad de cifras.

Las respuestas de Gisela (5 años, preescolar) muestran más claramente que no es suficiente con conocer el valor de los números para tomar conciencia del conflicto, ni –menos aún– para contrarrestar las conclusiones fundamentadas en la cantidad de cifras:

Entrevistador	*Gisela*
(Se está trabajando con dinero. Gisela ha contado billetes de a diez y de a cien)	
¿Y cómo formás mil quinientos?	Con éste y con éste (toma un billete de mil australes y otro de quinientos).
Muy bien. Y mil quinientos ¿cómo se escribirá?	No sé.
Probá, como a vos te parezca.	(Piensa un largo rato.)
¿Qué números te parece que tiene mil quinientos?	[...]
¿Tendrá uno?	Sí.
¿Y cinco?	Sí.
¿Y cero?	Sí.
Bueno, escribílo como a vos te parece que es.	(Escribe 1000500.) *Es muy largo.*
¿Te parece muy largo para ser mil quinientos?	Sí.
Entrevistador	*Gisela*
¿Será o no será mil quinientos?	Sí, es.
Ajá. ¿Cómo escribirías dos mil quinientos?	(Escribe 2000500.)
Escuchame una cosa. ¿Cuál es más, dos mil quinientos o tres mil? (Señalando 3000, que Gisela había escrito antes convencionalmente).	Dos mil quinientos.
Formá tres mil con la plata.	(Toma tres billetes de mil.)
¿Y dos mil quinientos?	(Toma dos billetes de mil y uno de quinientos.)
¿Y qué es más: dos así y uno así (dos de mil y uno de quinientos) o tres así (tres de mil)?	Tres así (señalando tres billetes de mil).
Ahora fijáte cómo están escritos. Vos dijiste que éste (3000) es tres mil y éste (2000500) es dos mil quinientos, ¿no?	Sí.
¿Y cuál es más?	Éste (señala 2000500).
Y con la plata (señalando los montoncitos), ¿cuál es más?	Tres mil.
Y acá (señalando las escrituras), ¿cuál es más?	Este (2000500).
¿Y no importa que con la plata sea más éste (montón de tres mil australes)?	No, no importa.

Es indudable que Gisela sabe –al menos con referencia al dinero– que tres mil representa una cantidad mayor que dos mil quinientos. Sin embargo, cuando se le pide que compare los números tomando en cuenta la representación escrita que ha hecho de ellos, parece "olvidar" el significado y centrarse únicamente en la cantidad de cifras de los significantes que ha producido. Además -y a pesar de haber señalado ella misma que su escritura "1000500" era muy larga para representar ese número-, no parece advertir contradicción alguna entre sus afirmaciones sucesivas. Es como si ella pensara: "Si me fijo en los billetes, tres mil es más; si me fijo en los números escritos, es más 2000500".

De este modo, al centrarse alternativamente en el referente y en el significante -sin relacionar para nada estas dos centraciones-, Gisela evita tomar conciencia del conflicto que se le plantearía si pudiera tomar en cuenta simultáneamente ambas cuestiones.

Las respuestas de otros sujetos nos muestran que, tarde o temprano, hay que enfrentarse con el conflicto:

Experimentador	*Dany* (6 años, primer grado)
(Se están comparando oralmente pares de números, sin referir las comparaciones a ningún material concreto.)	
¿Cuál será más grande, ochocientos o setecientos cincuenta?	Ochocientos es más grande.
¿Cómo escribirías ochocientos?	(Escribe 800.)
¿Y setecientos cincuenta?	(Escribe 70050.)
	(Se queda perplejo, contemplando los números que ha escrito.)

— Otros niños, después de haber producido escrituras en correspondencia con la numeración hablada, señalan de inmediato que "son demasiados números" y -lejos de limitarse a señalarlos, como lo había hecho Gisela- hacen reiterados intentos de modificar su producción para lograr reducir la cantidad de cifras. Es lo que hacen, por ejemplo, Martín y Dan (citados en el punto anterior) cuando transforman su escritura original para seis mil trescientos cuarenta y cinco (600030045) en 630045 y 63045 respectivamente. Ante cada pedido del experimentador, estos niños vuelven a producir una escritura en correspondencia con la numeración hablada, pero se muestran insatisfechos con el resultado y lo corrigen, suprimiendo uno o más ceros de la escritura original. Sin embargo, el resultado de estas correcciones coinciden sólo en algunos casos con la escritura convencional, porque los niños siempre dejan *por lo menos* un cero: mil treinta y seis, por ejemplo, llega a ser escrito como 1036 (a partir de 100036), en tanto que la versión final de mil quinientos treinta y seis es 10536.

— Luciana también advierte el conflicto, pero intenta resolverlo modificando la lectura del número, en lugar de corregir su escritura:

Experimentador	*Luciana*	*Leandro*
¿Cómo escribirían ocho mil novecientos veinticuatro?	(Escribe 800090024.)	(Escribe 89824.)
Comparen lo que pusieron los dos.		(Señalando la escritura de Luciana) ¡No! Ese es muy alto.
	Bueno... (Se ríe). Entonces ahora yo lo leo de otra forma: ocho mil *millones* novecientos veinticuatro.	

Luciana comprende muy bien -y comparte- la objeción formulada por Leandro. Seguramente es por eso que propone una nueva interpretación de su escritura, haciéndola corresponder con un número mucho más alto, tan alto como para representarse por una escritura de nueve cifras. Sin embargo, cuando se le pide -unos minutos después- que escriba siete mil veinticinco y mil quinientos, ella anota: 7100025 y 1000500.

La primera manifestación de que los niños comienzan a hacerse cargo del conflicto es entonces la perplejidad, la insatisfacción frente a la escritura por ellos producida. Esta insatisfacción lleva luego a efectuar correcciones dirigidas a "achicar" la escritua –o a interpretarla atribuyéndole un mayor valor, pero estas correcciones son posibles sólo *después* de haber producido la escritura. De este modo, los ajustes efectuados por los sujetos antes citados representan una compensación local: ellos logran encontrar una solución más o menos satisfactoria reduciendo la cantidad de cifras, pero esta solución no funciona aún en forma anticipatoria, y por eso vuelven a enfrentarse con el conflicto frente a cada nuevo número que intentan escribir.

¿Cómo llegan los niños a encontrar una solución que les permita superar el conflicto planteado?

El proceso evidenciado por Nadia a lo largo de las dos entrevistas que tuvimos con ella, con un intervalo de quince días entre ambas, nos ayudará a responder a esta pregunta. Durante el primer encuentro, sus respuestas son similares a las de algunos sujetos que ya hemos citado:

Experimentador	*Nadia*
(Ella ha escrito antes convencionalmente 2000-4000-9000-10000, y ha producido otras escrituras —1000100 para mil cien y 1000500 para mil quinientos— estableciendo correspondencia con la numeración hablada.)	
Y novecientos cincuenta, ¿cómo lo escribirías?	(Se queda pensando, escribe 90050, mira largo rato su escritura.) ¡Me equivoqué!
¿Cómo es?	No sé.
¿Y novecientos cinco, cómo lo escribís?	Así (9005) o así (905).
¿De las dos maneras?	Para mí es así (señala 905).
¿Por qué a novecientos cinco le dejás un cero y a novecientos cincuenta le dejás dos?	Porque acá (90050) me equivoqué... Tiene que ser así: 9050.
¿Y novecientos cuarenta y ocho?	(Escribe 9048).
Entre novecientos cuarenta y ocho y mil, ¿cuál es más?	Mil.

(Se juega con dinero. El experimentador pide a Nadia que le entregue tres mil australes, Nadia le da tres billetes de mil; luego le pide dos mil trescientos cincuenta australes, Nadia se los entrega correctamente.)

¿Qué es más, dos mil trescientos cincuenta australes o tres mil?	¡Tres mil!
¿Cómo escribirías tres mil?	(Escribe 3000)
¿Y dos mil trescientos cincuenta?	(Escribe 200030050)
¿Por qué éste, que es menos, tiene tantos números?	¿Cómo que es menos?
Vos me dijiste antes que dos mil trescientos cincuenta es menos que tres mil.	No, no sé (Está muy preocupada, piensa largo rato.)
¿Tenés un grave problema?	Sí
¿Cuál es tu problema?	Que no entiendo nada
A mí me parece que vos entendés un montón.	(Se ríe)... Pero esto es muy raro... porque mirá (señalando en su escritura anterior) 2000 300 50 dos mil tres-cientos cincuenta
Ajá, ¿se escribe así?	Para mí no (se ríe). Porque no tengo otra forma de escribirlo... por ahora lo escribo así.
Entonces a vos te parece que no es así, pero como no tenés otra forma, lo escribís así.	Claro.
¿Y cómo te parece que será? ¿Con más números o con menos?	Con menos
¿Con cuántos números te parece?	Tres... cuatro... algo así. Como éste (señala 9000, después de haber revisado sus escrituras anteriores).

¿Más o menos como cuál?

Puede observarse que Nadia ha comenzado a "achicar" sus escrituras: en el caso de novecientos cinco, ella propone desde el comienzo dos posibilidades, una de las cuales está en correspondencia con la numeración hablada, en tanto que la otra –la que finalmente elige y que coincide con lo convencional– tiene un cero menos. Después de corregir en este mismo sentido su escritura original de novecientos cincuenta, ella produce directamente 9048 para novecientos cuarenta y ocho, omitiendo esta vez *en forma anticipatoria* el otro cero (de novecientos) que seguramente hubiera incluido si no estuviera tratando de controlar sus escrituras para que incluyeran menos cifras de las que resultan al establecer correspondencia con la numeración hablada. Sin embargo, la anticipación con respecto a la supresión de ceros deja de operar cuando se trata de escribir dos mil trescientos cincuenta. Es más: aunque acaba de afirmar (en relación con los australes) que tres mil es mayor que dos mil trescientos cincuenta, ella parece "olvidar" esta afirmación cuando el experimentador la vincula a la cantidad de cifras de sus escrituras y pregunta sorprendida: "¿Cómo que es menos?".

A pesar de ese "olvido", Nadia está en condiciones de reconocer que se está enfrentando con un serio problema, con un problema que tarde o temprano tendrá que resolver y que la llevará a modificar su conceptualización de la escritura numérica. La conciencia que ella tiene de la provisoriedad del conocimiento (*"por ahora* lo escribo así") es francamente notable.

Aunque esta vez ella no corrige su escritura (200030050), sus respuestas finales indican que sabe en qué dirección habría que corregirla: se trata de lograr que esa escritura tenga sólo cuatro cifras. ¿Cómo hacerlo?).

Este es el problema que queda planteado al final de la primera entrevista y Nadia seguirá reflexionando sobre él en nuestra ausencia. En efecto, al iniciarse el segundo encuentro, ella señala:

Experimentador	*Nadia*
	El otro día hice todo mal, me equivoqué mucho.
¿Por qué creés que te equivocaste?	Porque en los números altos, por ejemplo el doscientos..., el doscientos cinco suponéte, yo lo hice así: 2005, y lo tenía que hacer así: 205.
¿Cómo te diste cuenta de que doscientos cinco es así? (205)	Después pensé que me equivoqué... No sé cómo explicar.
¿Y doscientos treinta y cinco cómo es?	235 (escribe el cero y encima el tres).
¿No va ningún cero en el doscientos treinta y cinco?	No.
¿Puede ser que el otro día lo hayas escrito así: 2035?	Sí.
¿Y el otro día, por qué te parecía que iba con cero?	No sé.
¿Novecientos cincuenta y ocho cómo lo escribís?	958.
¿No lleva ceros? ¿Ningún cero?	No.
¿Y novecientos cinco?	(Escribe 9050, lo tacha, luego escribe 900 y pone un cinco sobre el último cero.) 905
¿Por qué acá (905) sí lleva cero y acá (958) no lleva cero?	Porque acá (905) es cinco y acá (958) cincuenta y ocho... Porque cincuenta y ocho son dos números y cinco es uno.
¿Y qué pasa si a éste (905) no le pongo ningún cero?	Si no le pongo ningún cero, es noventa y cinco. Hay que ponerlo para que se sepa que es novecientos cinco.
[...]	
Y el dos mil quinientos, ¿cómo será?	2500. (Escribe primero 2000 y luego el 5 sobre el primer cero.)
Contáme cómo lo pensaste.	No sé.
¿Y el dos mil quinientos cincuenta y ocho?	2558 (escribe primero 2000 y luego, sobre los ceros, 5-5 y 8).

Experimentador	*Nadia*
¡Qué bárbaro! Explicáme cómo lo hacés, así yo se lo cuento a otros nenes. Ese método que usaste puede servirles a otros chicos.	Primero pongo dos mil, y después voy poniendo... Pongo quinientos cincuenta y ocho, porque si me equivoco y pongo un cero me queda suelto.

Nadia ha elaborado una estrategia que le permite superar el conflicto planteado: ella puede ahora –a diferencia de lo que ocurría en la sesión anterior– anticipar con exactitud la cantidad de cifras que tendrá el número solicitado. Esta anticipación parece hacerse posible gracias a una resignificación de la relación entre la escritura de los nudos y la de los números ubicados en los intervalos entre ellos.

En efecto, las últimas producciones de Nadia se apoyan –como las anteriores– en la escritura convencional de los nudos (900 o 2000 en este caso), pero la forma en que se utiliza esta apoyatura ha variado radicalmente: en tanto que antes se yuxtaponían los símbolos correspondientes a las partes de la denominación oral del número (2000 300 50, por ejemplo) –y se hacían luego correcciones para "achicar" el numeral resultante–, ahora la escritura del número se usa como un modelo útil para fijar la cantidad de cifras que debe tener el número a representar y luego se "rellena", sustituyendo los ceros por los números correspondientes.

Notemos que Nadia ha descubierto la posibilidad de usar de otra manera una información que ya tenía. ¿Por qué la ha descubierto en este momento y no antes? Porque esta posibilidad adquiere sentido –creemos– cuando se constituye en el instrumento que permite resolver un conflicto del cual se ha tomado conciencia. La utilización de la escritura del nudo como modelo para la de otros números aparece precisamente cuando Nadia se está preguntando cómo hacer para reducir la cantidad de cifras de sus escrituras y, más precisamente aún, cómo hacer para reducirlas a la misma cantidad de cifras que corresponde a los nudos entre los cuales están comprendidos los números que intenta representar.

Ahora bien, cuando Nadia anticipa que la escritura de dos mil trescientos cincuenta tendrá cuatro cifras, seguramente no se basa sólo en el conocimiento específico de que dos mil se escribe con esa cantidad de cifras, sino también en una conclusión más general que ella –como muchos otros sujetos– ha elaborado a partir de la información provista por la escritura convencional: los cientos van con tres, los miles van con cuatro.

En síntesis, las escrituras que se corresponden con la numeración hablada entran en contradicción con las hipótesis vinculadas a la cantidad de cifras de las notaciones numéricas. Tomar conciencia de este conflicto y elaborar herramientas para superarlo parecen ser pasos necesarios para progresar hacia la notación convencional.

Hemos intentado describir los rasgos esencialmente del proceso a través del cual los niños se aproximan a comprender la naturaleza de nuestro sistema de numeración; hemos mostrado que los chicos producen e interpretan escrituras convencionales mucho antes de poder justificarlas apelando a la ley del agrupamiento recursivo; hemos puesto en evidencia conceptualizaciones y estrategias que los chicos elaboran en relación con la notación numérica.

Es una opción didáctica tener en cuenta o no lo que los chicos saben, las preguntas que se hacen, los problemas que se plantean y los conflictos que deben superar. Es también una decisión didáctica tomar en consideración la naturaleza del objeto de conocimiento y valorar las conceptualizaciones de los chicos a la luz de las propiedades de ese objeto. La posición que en tal sentido hemos asumido inspira tanto el análisis de la relación existente entre las conceptualizaciones infantiles y el sistema de numeración como la crítica a la enseñanza usual y el trabajo didáctico que proponemos. De todas estas cuestiones hablaremos en los puntos siguientes.

III

De las relaciones entre lo que saben los niños y la organización posicional del sistema de numeración.

Según afirman los niños, un número es mayor que otro "porque tiene más cifras" o "porque el primero es el que manda". El saber que así se expresa, ¿se refiere a propiedades de los números o a propiedades de la notación numérica?.

La pregunta que antecede puede resultar extraña: estamos tan acostumbrados a convivir con el lenguaje númerico que en general no distinguimos lo que es propio de los números como tales –es decir, del significado– de las propiedades del sistema que usamos para representarlos. Sin embargo, esta distinción es necesaria.

En efecto, mientras que las propiedades de los números son universales, las leyes que rigen los distintos sistemas de numeración producidos por la humanidad no lo son.

"Ocho es menor que diez" es una afirmación válida en cualquier cultura, independientemente del sistema de numeración que en ella se utilice. Pero si esta afirmación se justifica alegando que "ocho tiene una sola cifra y diez tiene dos", se está esgrimiendo un argumento que es específico de los sistemas posicionales, ya que en los no–posicionales la cantidad de cifras no está relacionada con el valor del número.

Ahora bien, ¿qué tiene el sistema posicional que los otros no tengan? La posicionalidad, justamente. Ella es la responsable de la relación cantidad de cifras-valor del número; de ella depende también la validez de "el primero es el que manda".

En nuestro sistema de numeración –como es sabido–, el valor que representa cada cifra se obtiene multiplicando esa cifra por una cierta potencia de la base. Si un número tiene más cifras que otro, necesariamente intervendrán en su descomposición potencias de diez de *mayor grado* que las involucradas en el otro y, en consecuencia, será mayor.

Por otra parte, cuando se trata de dos números de la misma cantidad de cifras –excepto en el caso de que los dos empiecen con la misma cifra– es la primera la que determina cuál es el mayor, porque esa cifra indica por cuánto hay que multiplicar la potencia de grado más alto que "interviene" en el número. Por razones similares, si las primeras cifras fueran iguales, la responsabilidad de determinar el número mayor sería transferida a la cifra contigua, y así sucesivamente.

El contraste con sistemas no-posicionales constribuye a aclarar la cuestión. Veamos, por ejemplo, lo que ocurre en el sistema de numeración egipcio (5000 a.C.), que era aditivo y disponía de símbolos sólo para representar las potencias de 10. Así, el número 3053 se anotaba:

1000 1000 1000 10 10 10 10 10 1 1 1

mil mil mil diez diez diez diez diez uno uno uno

En el sistema egipcio la cantidad de símbolos de un número no informa acerca de su magnitud: para representar, por ejemplo, 9999 se utlizaban 36 símbolos, en tanto que 10.000 se anotaba con uno solo.

Además, cada símbolo representaba siempre el mismo valor, ocupara el lugar que ocupara y, si bien una convención establecía cierto orden de anotación, esta convención podía alterarse sin que por ello cambiara la interpretación del número representado.

300 20 4 — 3 ② ④

trescientos veinticuatro — trescientos veinticuatro

Es indudable que, si nuestros entrevistados hubieran sido niños egipcios del 5000 a.C., hubiéramos obtenido resultados muy diferentes. Como se trata de seres nacidos en los umbrales del siglo XXI, inmersos en una cultura digitalizada, sus conceptualizaciones apuntan a la organización posicional de nuestro sistema de numeración.

Sin embargo, como ya vimos, no todo es posicional en la vida de los niños. La numeración hablada viene a interponerse en el camino de la posicionalidad y da origen a producciones "aditivas". Estas producciones son fácilmente interpretadas no sólo por los adultos, sino también por los compañeros que ya escriben convencionalmente los números en cuestión, lo cual pone de manifiesto una indudable ventaja de los sistemas aditivos: su transparencia.

En efecto, para interpretar un número representado en forma aditiva –ya sea en un sistema como el egipcio o en las aproximaciones de nuestros chicos, basadas en la numeración hablada– es suficiente sumar los valores de los símbolos utilizados[8].

Un sistema posicional es al mismo tiempo mucho menos transparente y mucho más económico que un sistema aditivo.

Es menos transparente porque el valor de cada símbolo depende de la posición que ocupa, y porque esa posición es el único rastro de la presencia de una potencia de la base. A diferencia de lo que ocurre al interactuar con otros sistemas que utilizan símbolos específicos para anotar las potencias de la base, para interpretar un número representado en un sistema posicional es necesario *inferir* cuál es la potencia de la base por la que hay que multiplicar cada cifra.

Es más económico porque, justamente como consecuencia de la posicionalidad, una cantidad finita de símbolos diez –en nuestro caso– es suficiente para anotar cualquier número[9]. En un sistema como el egipcio, en cambio, la cantidad de símbolos necesarios para que sea posible anotar cualquier número no es finita: si se dispone de símbolos para uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil y un millón –son los que probablemente existieron en la cultura egipcia–, se puede escribir cualquier número hasta nueve millones novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve, pero será necesario crear un nuevo símbolo para anotar diez millones. La creación de este nuevo símbolo permite extender la escritura a todos los números menores que cien millones, pero la representación de este último exigirá un nuevo símbolo y esta exigencia volverá a presentarse cada vez que aparezca una nueva potencia de la base.

Economía y transparencia no son variables independientes: cuanto más económico es un sistema de numeración, menos transparente resulta. Un sistema como el egipcio es casi una traducción de las acciones de contar, agrupar y reagrupar; fue necesario ocultar esas acciones detrás de la posicionalidad para lograr un sistema cuya economía es indiscutible.

Quienes, como los chicos, intentan apropiarse de nuestro sistema de numeración deberán desentrañar lo que él oculta. Ellos empiezan –como hemos visto– por detectar aquello que les resulta observable en el marco de la interacción social. A partir de estos conocimiento, multiplican sus preguntas acerca del sistema y con ellas llegan a la escuela. Las respuestas que ofrece el ámbito escolar, ¿son verdaderamente respuestas a las preguntas que los chicos se plantean?, ¿deberían serlo? ¿Es válido el esfuerzo de la escuela por explicitar todo aquello que el sistema de numeración oculta? ¿Tiene sentido el intento de evitar que los chicos se enfrenten con la complejidad de la notación numérica? ¿Por qué reducir la reflexión sobre el sistema al ritual asociado a las unidades, decenas, centenas...?.

IV

Donde se cuestiona el enfoque usualmente adoptado para enseñar el sistema de numeración

La modalidad que en general asume la enseñanza de la notación numérica puede caracterizarse así:

— Se establecen topes definidos por grado: en primer grado se trabaja con los números menores que cien, en segundo con los menores que mil y así sucesivamente. Sólo desde quinto grado se maneja la numeración sin restricciones.
— Una vez enseñados los dígitos, se introduce

la noción de decena como conjunto resultante de la agrupación de diez unidades, y sólo después se presenta formalmente a los niños la escritura del número diez, que debe ser interpretada como representación del agrupamiento (una decena, cero unidades). Se utiliza el mismo procedimiento cada vez que se presenta un nuevo orden.

— La explicitación del valor posicional de cada cifra en términos de "unidades", "decenas", etc., para los números de un cierto intervalo de la serie se considera requisito previo para la resolución de operaciones en ese intervalo.

— Se intenta "concretar" la numeración escrita materializando la agrupación en decenas o centenas.

Dicho de otro modo: hay que trabajar paso a paso y acabadamente, hay que administrar el conocimiento entregándolo en cómodas cuotas anuales, hay que transmitir de una vez y para siempre el saber socialmente establecido.

Es así como los números van presentándose uno a uno y lo hacen concienzudamente: además de dar su nombre, se esfuerzan por exhibir su patrimonio en materia de decenas y unidades. Aportan información exhaustiva sobre sus datos personales, pero el espectro de sus relaciones es tan limitado que se reduce a los vecinos más cercanos.

Se pretende simultáneamente graduar el conocimiento y arribar desde el comienzo al saber oficial. ¿Son compatibles estas dos pretenciones? Si se recorta tan drásticamente el universo de los números posibles, si –al introducir los números de a uno y predeterminar un tope para cada grado– se obstaculiza la comparación entre diferentes intervalos de la serie y se dificulta la búsqueda de regularidades, ¿se está propiciando realmente el acceso a las reglas que organizan el sistema de numeración? Y si esto no es así, ¿cuál es el "saber oficial" que efectivamente se está impartiendo?.

Saber acabado y graduación del saber parecen incompatibles. Habrá que renunciar a la ilusión de comunicar de inmediato el saber definitivo o bien habrá que renunciar a la dosificación del conocimiento. O tal vez haya que renunciar a ambas.

"Paso a paso y acabadamente" es –por otra parte– una consigna que los chicos no están dispuestos a acatar: ellos piensan al mismo tiempo sobre los "dieces", los millones y los miles, elaboran criterios de comparación fundados en el contraste entre rangos de números más o menos alejados, pueden conocer la notación convencional de números muy "altos" y no manejar la de números menores. Los chicos tampoco necesitan –recordémoslo– apelar a "decenas" y "unidades" para producir e interpretar escrituras numéricas, saber "todo" acerca de los numerales no es entonces requisito para usarlos en contextos significativos.

Anticipamos una objeción posible: aunque se pueda prescindir de unidades y decenas cuando sòlo se trata de leer y escribir números, no será posible dejarlas de lado en el momento de resolver operaciones. Esta objeción es parcialmente válida: lo es si se piensa en los algoritmos convencionales –en los famosos "me llevo uno" y "le pido al compañero"– como único procedimiento posible; deja de serlo cuando se admiten algoritmos alternativos.

¿Por qué pensar en algoritmos alternativos? Porque los prodimientos que los chicos elaboran para resolver las operaciones tienen ventajas nada despreciables si se los compara con los usuales en la escuela.

Una desventaja evidente de los algoritmos convencionales es que –exigir que se sume o reste "en columna", aislando cada vez las cifras que corresponden a un mismo valor posicional– llevan a perder de vista cuáles son los números con los que se está operando. Algo muy diferente ocurre con las propuestas de los niños, ya que –como veremos en el próximo punto– las formas de descomposición que ellos ponen en práctica permiten conservar el valor de los términos de la operación.

Por otra parte, en tanto que la anticipación del resultado se hace difícil (o imposible) cuando se empieza a sumar o a restar por la derecha –es decir por el menor valor posicional–, la persistente decisión de los niños de empezar por la izquierda explicitando el valor representado por las cifras[10] pone en primer plano el cálculo aproximado, lo cual hace posible controlar el resultado.

Es así como los precedimientos de los chicos hacen desaparecer la diferencia entre cuentas "con dificultad" y "sin dificultad".

Si la interpretación de las cifras en términos de decenas y unidades no es requisito para la lectura y escritura de números, si tampoco es condición necesaria para resolver operaciones, ¿por qué tomarla como punto de partida? ¿Valdrá la pena invertir tanta energía en un intento cuyo resultado casi inevitable es el recitado mecánico de los términos en cuestión?.

El esfuerzo por lograr que los chicos comprendan algo tan complejo como nuestro sistema de numeración –y por evitar el riesgo de una mera memorización– ha llevado a utilizar diferentes recursos para materializar el agrupamiento.

Uno de estos recursos consiste en crear un código que introduce símbolos específicos –círculos, cuadrados, triángulos– para representar aquello que en nuestro sistema sólo puede inferirse a partir de la posición: las potencias de diez. Los símbolos en cuestión deben sumarse para determinar cuál es el número representado.

El parecido con el sistema egipcio es notable. Y a este parecido se refiere el núcleo de nuestra objeción: paradojicamente, para que los niños comprendan la posicionalidad, se hace desaparecer la posicionalidad.

Una crítica similar puede aplicarse a otro de los recursos usuales en la escuela: poner en correspondencia la cifra ubicada en el lugar de las unidades con elementos sueltos, la ubicada en el lugar de las decenas con "ataditos" de diez, la que está en el lugar de las centenas con "ataditos" de cien. Esta manera de proceder tiene una ventaja de apelar a la agrupación realizada por los chicos en lugar de partir de un código impuesto; sin embargo, si se considera el resultado final de la agrupación, presenta el mismo inconveniente que la materialización a través de figuras geométricas: la posición deja de ser relevante para entender de qué número se trata ya que, sea cual fuere el orden en que estén colocados los ataditos y los palitos sueltos, el total de elementos será siempre el mismo.

El supuesto subyacente a los dos recursos descritos parece ser el siguiente: para que nuestro sistema de numeración resulte comprensible, es necesario transformarlo en otro sistema de numeración.

Finalmente, analizaremos la utilización del ábaco, un instrumento que –a diferencia de los materiales anteriores– refleja claramente la posicionalidad del sistema.

Dos ideas subyacen al empleo didáctico del ábaco: agrupar y reagrupar son acciones imprescindibles para comprender la posicionalidad, la represetación de una cantidad en el ábaco puede traducirse directamente a la notación numérica convencional y esa traducción arroja luz sobre la organización del sistema.

Los dos supuestos son objetables desde nuestra perspectiva. Por una parte, como hemos visto, la noción de agrupamiento no es el origen de la comprensión de la posicionalidad: los chicos descubren este principio de manera totalmente independiente de las acciones de agrupar y reagrupar objetos, lo elaboran a partir de su acción intelectual sobre las escrituras numéricas que los rodean. Por otra parte, ¿para qué apelar a una traducción si la versión original está al alcance de la mano?.

De todos modos, si el ábaco fuese hoy –como lo fue en la antigüedad– un instrumento de cálculo socialmente vigente, su utilización en la escuela estaría seguramente justificada. Dadas las condiciones actuales, ¿no habrá que decidirse a sustituir el ábaco por la calculadora?.

Ahora bien, todos los recursos concretizadores que hemos analizado tienen en común la esperanza de reconstruir una relación entre la notación numérica y las acciones de agrupar y reagrupar. Esta relación, que efectivamente posibilitó la invención de los diversos sistemas de numeración producidos en el curso de la historia, ya que está presente en el uso social que se hace del sistema. Tal vez es por eso que los chicos no necesitan pensar que alguien formó ochenta y ocho grupos de diez y después reagrupó formando ocho grupos de cien para entender que, en 880, el primer ocho representa ocho cientos, y el segundo ocho "dieces".

La notación numérica aparece ante los chicos como un dato de la realidad: es necesario entender lo antes posible cómo funciona, para qué sirve, en qué contextos se usa; averiguar por qué llegó a ser como es no es tan urgente para ellos, quizá porque comprenderlo no puede ser de ninguna manera un punto de partida y sí puede constituirse en el punto de llegada que se hace posible después de un largo y complejo recorrido.

Algo está fallando en el juego de preguntas y respuestas que –según este enfoque– tiene lugar en el aula: se ofrecen respuestas para aquello que los chicos no preguntan, se ignora que ellos ya encontraron algunas respuestas y que todavía se hacen muchas preguntas, se evita formular interrogantes que podrían orientar la búsqueda de nuevas respuestas.

Si no es restringir la numeración, si no es explicitar el valor de las cifras en términos de decenas y unidades, si no es apelar exclusivamente a los algoritmos convencionales, si no es apoyarse en concretizaciones externas al sistema, si no es apuntar de entrada al saber acabado..., ¿cuál será entonces el camino que puede trazarse en el contexto escolar para andar entre los números? (...)

Notas de la lectura:

[1] Entrevistamos a 50 niños; los integrantes de cada pareja pertenecían al mismo grado o sección.

[2] Cuando los niños conocen el nombre de los números que están comparando, justifican sus afirmaciones apelando no sólo a la cantidad de cifras sino también al lugar que ocupan en la serie numérica oral: "12 es mayor porque tiene más números atrás, porque 6 para abajo tiene menos atrás" (Alan).

[3] La información que tenemos sobre el proceso de generalización es aun insuficiente: no todos nuestros entrevistados tuvieron la oportunidad de comparar nùmeros de tres o màs cifras, porque esta custión se planteó sólo en ciertos casos, en función de las respuestas que los niños suministraban.

[4] Esta es una de las cuestiones que será necesario seguir investigando.

[5] Cuando se entrevistó a Christian, los australes estaban aún en curso.

[6] Aunque el recurso que utiliza Christian pueda parecer exótico, tal vez resulte más pertinente si se recuerda que otros sistemas de numeración –como por ejemplo el romano– han apelado a grafías del mismo tipo para diferencia números (V y V).

[7] 4815 = 4 . 103 + 8 . 102 + 1 . 101 + 5 . 10

[8] entendemos que cuando los chicos producen una escritura como 1000500 (1500), está usando 100 y 500 como "símbolos originales"

[9] Actualmente estamos intentando establec cómo y cuándo descubren los niños esta carac terística de nuestro sistema.

[10] Si se trata –por ejemplo– de sumar 83 y 3 un procedimiento posible sería: 80 + 10 = 90; 9 + 10 = 100; 100+ 10 = 110; 110 + 8 = 118.

TEMA 3. *Aprendizaje por descubrimiento*

LECTURA:
¿ PUEDEN LOS ALUMNOS DESCUBRIR LAS MATEMATICAS POR SÍ MISMOS...?*

PRESENTACIÓN

Cuando un estudiante, de manera idndividual o colectiva. se enfrenta a un problema matemático. se encuentra ante una oportunidad de realizar por si mismo un aprendizaje por descubrimiento.

En la primera lectura se expone un conjunto de elementos conceptuales y teóricos, además de recursos metodológicos, que apoyan la factibilidad de éste tipo de aprendizaje.

Inicialmente Orton describe brevemente lo que sucede en el aula en una situación de aprendizaje por descubrimiento y el eventual papel del profesor ante tal situación.

A continuación hace una cronología de autores y argumentos que han intervenido en el debate sobre la posibilidad, ventajas, inconveniencias y tipos de aprendizaje por descubrimiento.

Se resumen los argumentos de J. Bruner en favor de éste tipo de aprendizaje y tambien los de D.P. Ausubel que reconociéndole ciertas cualidades, limita sin embargo sus alcances y expone otras alternativas.

Expone Orton algunos fundamentos psicopedagógicos que la Gestalt o Psicología de la Forma apota en la explicación del aprendizaje por descubrimiento y en la justificación del uso, dentro de este tipo de aprendizaje, de materiales o modelos físicos manipulativos como las regletas de Cuisenaire. los bloques Aritméticos de Dienes, etc. a los que llama "aparatos estructurales".

*Anthony Orton. "¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por sí mismos?", en: *Didáctica de matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Madrid, Ediciones Morata, 1990. pp. 106-108.

¿PUEDEN LOS ALUMNOS DESCUBRIR LAS MATEMÁTICAS POR SÍ MISMOS?

El aprendizaje por descubrimiento

Algunos profesores de niños pequeños emplean con frecuecia regletas coloreadas para ayudarles a la hora de aprender a contar números (naturales). Algunas veces, defensores de semejante método han afirmado que la simple manipulación de las regletas lleva a los niños muy lejos por el camino que conduce al dominio de las relaciones numéricas (véase Figura 1). Descubren que un cierto par de regletas de diferentes colores dispuestas como un "tren" equivalen de algún modo (longitud) a una tercera regleta de otro color. Puede que, en definitiva, lleguen a descubrir que las regletas se pueden disponer como una escalera de peldaños iguales.

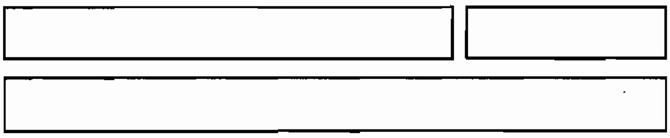


Figura 1.

Parece que existe un momento en el que las matemáticas pueden ser descubiertas y el aprendizaje, cabría afirmarlo, será más profundo y completo cuando se haya logrado por este medio, en lugar de utilizar la mera exposición. Sin embargo, existe también un momento en el que el profesor, o alguna otra persona, necesitará quizá intervenir para introducir primeramente el lenguaje apropiado, luego para contribuir a aclarar el pensamiento y después para introducir el simbolismo y los métodos para hacer informes. No obstante, los niños pueden ejercer un considerable control de su propio aprendizaje. Desde luego, es posible que lo que descubran sea lamentablemente poco y quizá su profesor se sienta obligado a proporcionarles una orientación muy amplia. Ciertas relaciones numéricas, por ejemplo, siguen constituyendo un conocimiento que se considera esencial en una persona verdaderamente instruida de nuestra sociedad así que, si nada se descubre, el profesor puede muy bien sentirse inclinado a tratar de apresurar el aprendizaje, diciéndoselo al niño de un modo directo o quiza indirecto. Es discutible, sin embargo, que un niño que no sea capaz de descubrir nada pueda beneficiarse de los métodos docentes expositivos.

Palabras como "actividad", "descubrimiento", "investigación" y "resolución de problemas" se han convertido en parte del lenguaje que ahora utilizamos al hablar de la enseñanza de las matemáticas y del modo en que deberíamos educar a nuestos alumnos en esta materia. Pero a muchos estudiantes de hoy aún se les enseña en buena medida por exposición y tienen escasa oportunidad de aprender a través del descubrimiento. A la mayoría de los profesores, cuando fueron alumnos, apenas se les otorgó la posibilidad de descubrir las matemáticas, aunque en cada generación haya habido algunos educadores que creyeron que resultaba improbable que por sí sola fuese eficaz la exposición, sobre todo con los alumnos más jóvenes. En el pasado, y con los alumnos más capaces y mayores, los profesores de matermáticas rehuían a menudo las críticas con sólo un empleo mínimo de métodos que no fuesen la exposición y la práctica de las destrezas. Ahora se ejerce una intensa presión sobre los profesores para que utilicen enfoques más activos. Los defensores del uso del descubrimiento, de las investigaciones y de la resolución de problemas probablemente nunca han estado ausentes de la escena educativa. Existe una cierta vaguedad en torno a términos como "descubrimiento", "investigación" y "resolución de problemas" que realmente es intrascendente. Lo que en verdad cuenta y lo que ahora importa es el espíritu de la educación activa frente a la pasiva, no la definición exacta de ciertas palabras en uso.

SHULMAN (1970) señaló respecto a la nueva psicología del aprendizaje de las matemáticas que, en un amplio grado, se basaba en el aprendizaje por descubrimiento. BRUNER, hacia 1970, fue principal defensor del aprendizaje por descubrimiento en los Estados Unidos. SHULMAN descubrió los orígenes de una teoría del aprendizaje por descubrimiento como "una mezcla de PIAGET y PLATÓN". El factor principal en la justificación del enfoque del descubrimiento fue la obra de PIAGET que, en la educación matemática, supone una interacción activa con el entorno, permitiendo así al individuo la construcción del conocimiento y la comprensión. En los Estados Unidos ésta fue una idea relativamente revolucionaria, debido al predominio anterior de la teoría conductista del aprendizaje en la práctica educativa. No obstante, vale la pena pensar si el conductismo necesitaba forzosamente descartar el descubrimiento y, desde luego, pronto se volvió a la idea del descubrimiento programado. El trabajo precursor de BRUNER, estimulando en los Estados Unidos el aprendizaje por descubrimiento, fue ciertamente significativo durante un tiempo considerable y la evolución registrada en Gran Bretaña también reflejó el mismo interés por enfoques muy activos.

El *Curriculum Bulletin* No. 1 del *Schools Council* (1965) contenía cierto número de referencias al aprendizaje por descubrimiento en el nivel primario, por ejemplo:

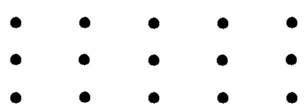
> Las matemáticas son un descubrimiento de relaciones y la expresión de dichas relaciones en forma simbólica (o abstracta). Esta no es una definición estática, sino que inplica acción por parte del que aprende, sean cuales fueren su edad y capacidad. El hecho de que unas relaciones matemáticas puedan ser descubiertas y comunicadas de tan diversas maneras es lo que sitúa a las matemáticas al alcance de niños y adultos de todas las capacidades.

El principal mensaje del *Curriculum Bulletin* fu que los profesores deben enseñar las matemáti cas de primaria mediante una participación l más activa posible, realizando actividades prác ticas con el material disponible siempre que s pueda y por este medio, los niños descubrirá sin necesidad de decírselo. La autora princip de este boletín, Edith BIGGS, ha escrito adem sobre el descubrimiento (BIGGS, 1972). Una característica interesante del trabajo de BIGGS fue el empleo, casi como sinónimos, de los términos "descubrimiento", "investigación" y "aprendizaje activo", reflejando un punto previo de este capítulo. Otro rasgo fue su afirmación de que los métodos de descubrimiento (investigador, activo) proporcionaban a los alumnos la oportunidad de pensar por sí mismos , y de que sólo de esa manera ellos podían advertir todo su potencial. Además, tales métodos generaban un interés real por las matemáticas que, debido a la relación vinculante entre factores cognitivos y afectivos en el aprendizaje, contribuían sin duda al logro de un potencial pleno.

Diferentes autores han tratado de clasificar los métodos de descubrimiento. Los cinco descritos por BIGGS (1972) proporcionaron unos buenos medios de reflexionar sobre esta cuestión; eran: fortuito; libre y exploratorio; guiado; dirigido y programado. En un extremo, el descubrimiento fortuito no puede ser planificado. Sucede, desde luego, pero ningún programa de aprendizaje puede emplearlo. En el otro extremo, el descubrimiento programado se halla envuelto en un aire de contradicción al que ya nos hemos referido. La intención que preside la programación de una lección es asegurarse de que, en la medida de lo posible, tenga lugar el aprendizaje.(...)

Cerca del otro extremo, el descubrimiento que es libre y exploratorio puede partir de la investigación de "Rectángulos".

Rectángulos



¿Cuántos rectángulos pueden formarse en una tabla de 5 x 3 agujeros?
¿Y en tablas de otros tamaños?

No existe garantía de que en esta investigación se descubra algo que no sea una información númerica. Más aún, puede que no resulte correcta la información numérica obtenida. Además, la carga es mucho mayor aún para el profesor si resulta importante que de una actividad libre y exploratoria se obtengan conclusiones correctas. Por esta razón, con una mirada atenta en el programa de estudios y en los futuros exámenes, los profesores pueden sentirse más que felices, permitiendo la investigación libre y exploratoria si los resultados no constituyen un conocimiento esencial. Si los resultados matemáticos son importantes, muchos profesores se inclinarán indudablemente por métodos docentes que, en su opinión, garanticen que los alumnos puedan obtener el conocimiento requerido. Pese al trabajo abnegado de algunos, en tales circunstancias generalmente los profesores se muestran partidarios de la exposición. BIGGS y otros defensores del aprendizaje por investigación y descubrimiento se han esforzado por señalar que los programas de examen pueden completarse y que pueden aprenderse a conciencia todos los resultados requeridos mediante métodos del aprendizaje activo, pero aún hace falta que la mayoría de los profesores de matemáticas acepten este modo de ver las cosas. Una trayectoria que parece constituir un intento de integrar el aprendizaje activo con la enseñanza eficaz de un cuerpo de conocimiento fue la de BELL, WIGLEY y ROOKE (1978).

El valor del descubrimiento ha sido tema de debate y de ciertos desacuerdos entre los psicólogos educativos. GAGNÉ y BROWN (1961) afirmaron haber demostado que el descubrimiento guiado era el mejor método (entre los empleados) para promover el aprendizaje de ciertas reglas. No son muchos los datos de las investigaciones que apoyen una determinada perspectiva acerca del valor de los métodos de descubrimiento y no debemos dejarnos arrastrar por los resultados de un experimento. AUSUBEL (1963) aseguró que el descubrimiento guiado sólo parecía mejor porque generalmente sólo se le comparaba con el aprendizaje memorístico. Fue aún más allá, afirmando que no existìa ninguna prueba de que el descubrimiento de cualquier tipo fuese un método docente más eficaz que una exposición plena de significado. AUSUBEL admitió, sin embargo, que el descubrimiento tiene importancia en la promoción del aprendizaje de niños pequeños y tanto GAGNÉ como él reconocieron que los métodos del aprendizaje activo son más importantes para los alumnos pequeños que para los mayores. No obstante el descubrimiento guiado es muy utilizado por algunos profesores que creen que los alumnos están mejor motivados por un enfoque activo y quizá por un reto, pero que el profesor puede intervenir en cualquier momento (si es por una causa justificada) para asegurar que se logra el propósito deseado.

El entusiasmo por el aprendizaje por descubrimiento generado por BRUNER condujo a un debate con AUSUBEL y resultan de gran interés los puntos de vista de ambos. Los principales argumentos enunciados por BRUNER (1960a) en favor del aprendizaje por descubrimiento fueron los siguientes. En primer lugar el descubrimiento estimulaba un modo de aprender las matemáticas al operar con esta materia y animaba el desarrollo de una concepción de las matemáticas más como proceso que como un producto acabado. En segundo lugar, se consideraba al descubrimiento como intrínsecamente gratificante para los alumnos, de modo que los profesores que utilizasen métodos de descubrimiento deberían sentir una escasa necesidad de emplear formas extrínsecas de premio. Estas dos afirmaciones tienen gran peso. Se reconocieron las dificultades prácticas, es decir que no se podría esperar eternamente a que los alumnos descubriesen que el *Curriculum* no podía ser abierto por completo; así pues, el descubrimiento necesitaría ser, en cierta medida, guiado o dirigido. A algunos alumnos puede resultarles incluso extremadamente decepcionante su capacidad de descubrir. Desde luego correspondía al profesor elaborar el tipo de juicios necesarios para sortear estas dificultades. Tales inconvenientes prácticos no invalidaban las ventajas del aprendizaje activo. El esfuerzo por intentar utilizar métodos de descubrimiento resultó valioso en función de lo alcanzado.

AUSUBEL (1963) trató de templar el celo misional de BRUNER, en vez de intentar poner en tela de juicio la validez de los puntos principales, porque le parecía que era probable que los profesores hicieran un uso excesivo o inapropiado del descubrimiento. En primer lugar, señaló que el descubrimiento no era el único modo mediante el cual un profesor podía generar en los alumnos motivación, seguridad en sí mismos y un deseo de aprender. La enseñanza expositiva, bajo sus mejores formas, era igualmente capaz de interesar y de inspirar a los alumnos. No todo el aprendizaje por recepción resultaba malo y no todo aprendizaje por descubrimiento era bueno. El descubrimiento puede desmotivar seriamente cuando no se descubre nada. Además resultaba discutible cualquier afirmación de que el aprendizaje por descubrimiento conlleva creatividad, porque los alumnos rara vez podían ser genuinamente creativos y el descubrimiento guiado raras veces era creativo. No existían datos de investigaciones que demostrasen, de manera concluyente, que el aprendizaje por descubrimiento resultaba superior al aprendizaje expositivo en términos de logros de aprendizaje a largo plazo. Desde luego, los métodos de descubrimiento eran necesarios en los niños pequeños, pero no parecía nada valioso en la mayor parte del aprendizaje en las etapas del pensamiento abstracto en el desarrollo cognitivo. Después de todo, el descubrimiento *exigía* mucho tiempo. La práctica de las matemáticas como proceso no era la prioridad principal en el aprendizaje escolar. Resultaba mucho más importante, por ejemplo, que los alumnos aprendiesen el cuerpo sustancial de conocimientos esenciales para la supervivencia en una sociedad compleja. Como no existía posibilidad de que los alumnos pudieran crear de nuevo el conjunto de ese conocimiento, era necesaria la intervención del profesor de un modo más o menos directo.

El aprendizaje por descubrimiento fue adoptado por algunos responsables de *curricula* matemáticos de los años sesenta y setenta. El descubrimiento fue un rasgo importante del Proyecto Madison en los Estados Unidos de América. DAVIS (1966) llamó la atención sobre el lugar y el valor del descubrimiento en buena parte a través de ejemplos de descubrimientos de los alumnos. El Proyecto Madison afirmaba emplear, dentro de métodos generales de descubrimiento más ortodoxos, una técnica de descubrimiento que describieron como de "torpedeo". La idea del torpedeo consistía en que, una vez que los alumnos creían haber descubierto un esquema, relación o regla, se presentaba un ejemplo que no encajaba, obligándoles a reflexionar de nuevo sobre cuestión. En cierto sentido, éste es un ejemplo de creación deliberada de un estado de desequilibrio mental con objeto de estimular los procesos gemelos de asimilación y de acomodación, táctica a la que se ha aludido en el capítulo anterior. No está claro, sin embargo, que el "torpedeo" fuese lo bastante eficaz en la promoción del aprendizaje para ser seriamente postulado como técnica valiosa.

En Gran Bretaña, los métodos de descubrimiento fueron, en general, activamente estimulados en la enseñanza primaria a través de los trabajos de BIGGS y también por obra del Proyecto Nuffield. El Capítulo V de *I Do, and I Understand* (NUFFIELD, 1967a) describió el significado y la importancia del aprendizaje por descubrimiento dentro del proyecto. Muchos profesores recordarán las primeras etapas de la reforma de *curricula* secundarios en los años sesenta por el énfasis en los cambios de contenido. Pero en el primer *Midlands Mathematical Experiment Report* (1964) hallamos: "Nos sorprendemos continuamente de lo que los niños *pueden* hacer a partir de sus experiencias peculiares. Nuestra tarea consiste en reconocer las matemáticas en las actividades de los chicos y utilizarlas". Desde 1968, la seire A-H del *School Mathematics Project* incluyó secciones experimentales y de investigación. Más recientemente, tras el Informe Cockcroft (1982), se han registrado evoluciones destinadas a asegurarse de que los *curricula* matemáticos incluyan elementos de aprendizaje más activos.

La eficacia o inutilidad de los métodos de descubrimiento continúa siendo, por lo demás, objeto de debate. La cuestión fue comentada por DAVIS (1984) de la siguiente manera:

> ...no se puede comparar, por ejemplo, la "enseñanza por descubrimiento"con la "enseñanza no de descubrimiento" ...es posible comparar *algunas tentativas específicas de hacer enseñanza por "descubrimiento" frente a algunas tentativas específicas de hacer una enseñanza "no de descubrimiento"*. Una o ambas pueden estar operando muy bien o moderadamente bien o mal, o incluso muy mal ...Uno NO ha comparado *en general* enseñanza de "descubrimiento" y de "no descubrimiento". *Pero éste es el modo en que se interpretan invariamente los resultados.*

A este respecto, el descubrimiento no es diferente de la materia de muchas otras investigaciones educativas. En buena medida, los defensores del aprendizaje por descubrimiento pueden aceptar una creencia, resumida por BIGGS (1972):

> Estimo que este método (el del descubrimiento) es el mejor modo de proporcionar a nuestros alumnos un interés real por las matemáticas. Creo, también, que éstos sólo realizan su pleno potencial cuando les proporcionamos una oportunidad de pensar por sí mismos.

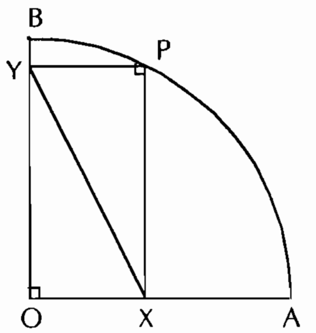
En cualquier caso, la investigación trata habitualmente de medir sólo la calidad del desarrollo cognitivo o lo que ha sido dominado. Los logros en actitud hacia las matemáticas y el incremento en la comprensión de la naturaleza de la materia no son fácilmente medidos ¿Quién sabe qué beneficios a largo plazo podrían acumularse si el descubrimiento se utilizase más, sobre todo en el nivel secundario, en donde el eqilibrio ha estado hasta ahora mucho más en favor de los métodos pasivos de aprendizaje de las matemáticas.

Psicología de la Forma

El aprendizaje por descubrimiento depende de que un alumno establezca conexiones y advierta relaciones sin que las señale el profesor. Consideremos el problema del cuadrante de un círculo. Para resolverlo, el alumno tiene que ver, a través de la información, la estructura conjunta de la situación y comprender que la longitud de *XY* es igual a la longitud de la otra diagonal del rectángulo que es un radio del círculo. Se requiere frecuentemente este *insight* en la solución de problemas, matemáticos o de otro tipo.

La importancia del *insight*, en su calidad de fenómeno del aprendizaje humano, fue reconocida por los psicólogos de la Forma. La esencia de la psicología de la forma radicó, y sigue siendo así, en que la mente (y no necesariamente sólo en los seres humanos) trata de interpretar las sensaciones y las experiencias que le llegan como un conjunto organizado y no como ua colección de unidades de datos separadas. Si la estructura subyacente es inmediatamente percibida de un modo significativo, el que aprende es capaz de proseguir hasta la solución del problema. Como profesores, podemos ayudar a nuestros alumnos a aprender, proporcionándoles experiencias en las que la estructura sea evidente, o guiando u orientándoles hacia la estructura. La psicología de la Forma *(Gestalt)* se desarrolló originalmente en Alemania.

PROBLEMA DEL CUADRANTE DE UN CÍRCULO



Dado un cuadrante de círculo OAB de 10 cm de radio, en donde O es el centro del círculo, hallar la longitud de XY, en donde OXPY es un rectángulo.

El más destacado psicólogo de la Forma, en el período de evolución de la teoría, fue WERTHEIMER. En sus comentarios sobre la psicología de la Forma, SCHEERER (1963) dio cuenta del ejemplo del paralelogramo de WERTHEIMER del siguiente modo:

> Supongamos que a un chico, que ya sabe cómo calcular el área de un rectángulo, se le pide que halle la fórmula del área de un paralelogramo. Si reflexiona sobre la cuestión, dice WERTHEIMER, le sorprenderá que un paralelogramo sería como un rectángulo si no fuese por el hecho de que por un lado presenta una "protuberancia" y por el otro un "hueco" (véase Figura 2)...Entonces comprende que la protuberancia equivale al hueco...De ahí que la fórmula sea la misma que para el rectángulo.

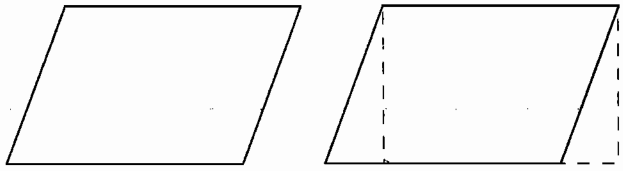


Figura 2

Aunque el sistema de ensayo y error pueda estar incluido en la resolución de problemas, en donde uno de éstos posee una estructura propia, la estructura ayuda a señalar la vía hacia la resolución.

WERTHEIMER (1961) dio también cuenta del ahora bien conocido caso de GAUSS de quien se dice que, muy pequeño aún, halló una solución simple al problema de sumar los números naturales consecutivos. Dados 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10, el *insight* de la estructura pudo poner en claro que 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11 y de ahí que la suma sea 5 x 11 = 55. Se pueden obtener sumas más largas de un modo semejante. Algunos niños pueden beneficiarse de un indicio gráfico que les ayude a aclarar la estructura (véase Figura 3). Cuando se las une, las dos escaleras revelan que:

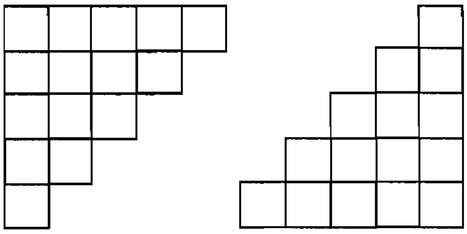


Figura 3

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \times 6$$

y de aquí que, en general:

$$2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n + 1).$$

Lo que señala claramente la teoría de la Forma es que la demostración de un resultado por el profesor puede no conducir al *insight* del alumno. Las exposiciones de la manera de calcular el área de un paralelogramo, basadas quizá en proporcionar congruencias a los dos pequeños triángulos, no garantizarán necesariamente que los alumnos comprendan por qué se requiere demostrar que los triángulos son congruentes. El *insight* surge como un aspecto del proceso de descubrimiento. La situación requiere ser estructurada para conseguir que el necesario descubrimiento sea lo más seguro posible. Entonces, el *insight* ganado puede ser transferido y entendidas las áreas de los triángulos y de los trapecios.

La teoría de la Forma fue aceptada y aprovechada por STERN a través de la dotación de un aparato estructural. De hecho, esta investigadora dedicó su libro (1953) a WERTHEIMER. El aparato estructural de STERN fue concebido para permitir a los alumnos descubrir por sí mismos la aritmética a través de la incitación de *insights* promovidos por el equipo. No bastaba con aprender números contando: era preciso aclarar las relaciones entre ellos. Así se emplearon como base varillas segmentadas de colores para que los alumnos pudiesen ver cómo muchas varillas "unidades"eran equivalentes a una regleta específica y para que advirtieran la diferencia en valor de dos regletas determinadas (Figura 4). Desde la invención del aparato de STERN se han comercializado diversas formas de equipo estructural. Cuantos utilizan semejante equipo creen presumiblemente que proporciona a los niños un *insight* de las relaciones numéricas y de su estructura, permitiendo que tenga lugar el aprendizaje. Esta es la esencia de la teoría de la Forma aplicada a promover situaciones de aprendizaje.

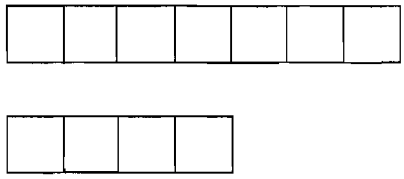


Figura 4

Aparatos estructurales

Desde luego STERN no fue la pionera en estimular el empleo de un aparato estructural para promover el aprendizaje de las relaciones numéricas. No obstante fue la primera en justificar su uso y en afirmar su necesidad sobre la base de una teoría psicológica. Existen datos indicadores de que TILLICH (nacido en 1780) y FROEBEL (nacido en 1782) postularon el empleo de un equipo concreto en la enseñanza de la aritmética elemental, aunque este equipo quizá no tenga el grado de estructura que es inherente a muchos de los aparatos modernos. En ambos casos, sin embargo, pareció recomendarse mucho más que la simple dotación de cuentas, fichas y otro equipo unitario. En particular, el equipo de TILLICH se interesaba por un enfoque concreto del valor posicional, idea que DIENES parece haber adoptado en fecha más reciente. MONTESSORI (nacida en 1870) empleó también diversos aparatos, incluyendo regletas similares a las de STERN pero en una escala mucho más amplia, barras de cuentas, ábacos, aparatos para la multiplicación y la división, equipo de fracciones y equipos para el aprendizaje de índices y para el aprendizaje del álgebra.

Las ideas extraídas de la obra de PIAGET sobre la importancia de la construcción del entendimiento a partir de la actividad y de la interacción con el entorno, junto con el creciente interés por el aprendizaje por descubrimiento, pueden haber sido durante los años sesenta las razones principales del incremento del interés por los aparatos estructurales. Se dotó a muchas escuelas de aparatos de STERN o de equipos de CUISENAIRE o de algunos de DIENES o incluso de otros equipos surgidos por entonces. Los tres mencionados aquí específicamente están en uso ahora y sirven como ejemplo de que se hayan concebido diferentes aparatos para destacar distintas estructuras. El aparato de STERN, como ya se ha mencionado, está basado en regletas segmentadas, de manera que tiene sentido el empleo, por ejemplo, de una línea de números para la suma (Figura 5). Las re-

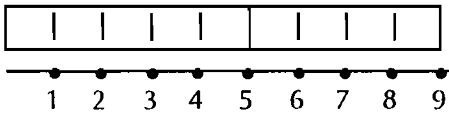


Figura 5

gletas de CUISENAIRE no están segmentadas, de modo que las relaciones numéricas deben aprenderse con la ayuda de sus colores, (en relación con su longitud) y no del número de unidades que representen cada una. CUISENAIRE afirmó que los niños captaban mejor los conceptos esenciales y elementales de los números cuando no se recurría a la ayuda de la segmentación. Un avance posterior, concebido por CUISENAIRE, es que cualquier regleta pueda ser definida más fácilmente como la unidad, con lo que las regletas más cortas se convierten en fracciones. Los Bloques Artiméticos Multibase (MAB) de DIENES son también diferentes; consisten en cubos unidades, regletas (semejantes a las segmentadas de STERN), tablas y bloques (cubos mayores), ilustrados para base 5 en la Figura 6. Este aparato existe en todas las bases de 2 a 10 y está concebido para proporcionar un *insight* del valor posicional. Los Bloques Aritméticos Multibase de DIENES constituyen, desde luego, sólo un tipo de los aparatos creados por él, que se analizan en el Capítulo IX. (...)

La tendencia al empleo de aparatos estructurales será abrumadora si los datos de las investi-

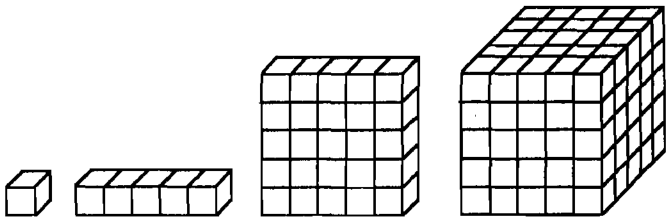


Figura 6

gaciones mostrasen que era claramente beneficiosos. Por desgracia, y como es habitual en educación, esto no es tan simple ni tajante. Ciertas investigaciones han demostrado que existen ventajas pero generalmente son escasos los datos sobre beneficios a largo plazo. No obstante no existe indicio alguno de que el empleo de un aparato estructural sea, de alguna manera, dañino o nocivo para el aprendizaje. Lo que muchos experimentos han revelado con claridad es la dificultad inherente a la realización de investigaciones educativas. ¿Cómo se puede asegurar que al grupo de control se le niega cualquier otra aportación que no sea la recibida a través de sus lecciones de control? ¿Cómo es posible tener la seguridad de que cualquier efecto medido y asociado a un determinado método de enseñanza sea independiente del efecto de unos profesores específicos? ¿Qué clase de prueba debería utilizarse al final de un experimento para garantizar una comparación imparcial entre los efectos de dos experiencias muy diferentes?

Un problema específico y bien conocido es que los profesores que desean participar en un experimento en enseñanza están estimulados por el conjunto de la idea y son muy conscientes de lo que debería suceder. Su entusiasmo es fácilmente transmitido a los alumnos, y entonces esto promueve el aprendizaje. Por eso es probable que cualquier incremento medido sea consecuencia de una combinación inseparable de los efectos de nuevos materiales y métodos y de la total entrega y entusiasmo del profesor. También se sabe muy bien que el factor variable más importante cuando se trata de mejorar el aprendizaje es la calidad del profesor. En suma, los instrumentos de medición que tene mos a nuestro alcance no son adecuados para demostrar convincentemente en qué grado pueden los aparatos estructurales promover el aprendizaje. Puede incluso que muchos alumnos que aprenden eficazmente sin la ayuda de aparatos estructurales lo hagan así porque su entorno natural les proporciona los *insights* que les permitirán establecer las necesarias conexiones abstractas.

En particular, la observación de los niños pequeños indica a la mayoría de los profesores que es esencial una actitud concreta para la introducción de los números y de las relaciones numéricas. No sólo se presenta allí beneficiosa sino que, además, la atmósfera de un aula de actividad y de charla práctica parece preferible a la de exposición y práctica escrita. A su debido tiempo será necesaria una cierta exposición y se requerirá alguna práctica escrita, pero sólo después de que los alumnos hayan tenido muchas oportunidades de descubrir por sí mismos las estructuras.

LECTURAS: LOS PROPÓSITOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA BÁSICA EN LA ESCUELA PRIMARIA Y EL MÉTODO DE LA INDUCCIÓN EMPÍRICA Y MÉTODOS NO DEDUCTIVOS DE CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS MÁTEMATICOS EN LA ESCUELA PRIMARIA*

PRESENTACIÓN

La lectura de San Martín Sicre nos proporciona un ejemplo sencillo del proceso de resolución de un problema matemático dentro de un contexto de aprendizaje por descubrimiento guiado.

La guía del proceso la provee el método de la inducción empírica y en la lectura se explicitan las relaciones de este proceso de descubrimiento guiado con los propósitos generales de la educación matemática en la escuela primaria.

En la lectura "Métodos no deductivos de construcción de conocimiento matemático en la escuela primaria", se presentan tres métodos, que en su variante no deductiva, provee al profesor de nociones que le pueden ayudar a comprender y quizá también diseñar, situaciones didácticas constructivistas.

En la antología complementaria se presenta la lectura titulada "Aprendizaje por descubrimiento" de D.P. Ausubel que consiste en un extracto del debate entre Bruner y Ausubel con respecto a este tipo de aprendizaje.

LOS PROPÓSITOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA BÁSICA EN LA ESCUELA PRIMARIA Y EL MÉTODO DE LA INDUCCIÓN EMPÍRICA

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es el de mostrar cómo el método de la inducción empírica puede ser adecuado e implementado en el aula, de modo que posibilite el logro de los propósitos generales de la educación básica primaria enlistados en el Plan y Programas de estudio 1993, SEP, en lo que en particular concierne a la educación matemática.

Para el logro de este propósito se comienza por hacer una descripción del método de la inducción empírica y de cómo puede adecuarse para el diseño de una situación didáctica.

Posteriormente se presentan algunos ejemplos de aplicación.

EL MÉTODO DE LA INDUCCIÓN EMPÍRICA

D.P. Ausubel en su obra "Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo" refiriéndose al razonamiento del niño afirma: "Cada día de su vida estará empeñado, casi sin saberlo, en hacer razonamientos inductivos, ese proceso consiste en reunir muchas experiencias y en extraer de ellas un factor común".

Los libros de lógica suelen presentar a la inducción empírica como: "Aquel método de la lógica y de la ciencia que va de lo particular a lo general".

Tan brevemente expresada, la definición anterior oculta las amplias posibilidades didácticas de dicho método.

Ampliando la definición antes vista, podemos afirmar que en el desarrollo de un proceso inductivo empírico, pueden distinguirse las tres etapas que a continuación se describen:

1. ACOPIO DE INFORMACIÓN PROVENIENTE DE CASOS PARTICULARES

En esta etapa el estudiante observa, ejecuta acciones, tiene contactos o realiza experimentos con un cierto número finito de casos particulares. El resultado de éstas experiencias debe ser registrado.

Cuando se trabaja en matemáticas, los casos particulares suelen consistir en experiencias de conteos, mediciones, comparaciones, disecciones, recortes, doblado de papel, combinaciones, dibujos, coloreado, etc.

Asimismo, el trabajo con casos particulares puede realizarse también en modelos físicos que

*Oscar San Martín Siore. **"Los propósitos generales de la educación matemática básica en la escuela primaria y el método de la inducción empírica?"** y "Métodos no deductivos de construcción de conocimientos matemáticos de la escuela primaria", en: Memorias del XIII Congreso nacional de enseñanza de las matemáticas. Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa y Centro de Ciencias de Sinaloa, Culiacán. 1995. pp. 10-17.

permitan la experiencia concreta tales como los ábacos, geoplanos, tangramas, regletas de Cuisenaire, etc.

2. RECONOCIMIENTO DE ANALOGÍAS.

En esta etapa, al interactuar con los objetos en cada uno de los casos particulares, el estudiante comienza a advertir similaridades, analogías, regularidades, tendencias o patrones que son comunes a todos los casos observados o experimentados.

3. GENERALIZACIÓN.

En está etapa, el estudiante generaliza, concluye o conjetura que las similaridades, analogías, regularidades, tendencias o patrones reconocidos en los casos particulares experimentados, se seguirán presentando en el futuro siempre y cuando se siga observando o experimentando con más casos particulares afines a los tratados.

Antes de continuar, consideramos pertinentes hacer dos aclaraciones.

1. No debe confundirse la inducción empírica con la inducción matemática. La primera es de carácter experimental, la segunda (que aquí no estudiamos) es de carácter lógico.
2. La inducción empírica conlleva en sí misma algunas limitantes y dificultades, sin embargo propiamente manejada por el maestro puede ser utilizada en un contexto de aprendizaje por descubrimiento.

LOS PROPÓSITOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA BÁSICA EN LA PRIMARIA

Una vez que se ha descrito con más amplitud el método de la inducción empírica, resulta más fácil advertir sus evidentes relaciones con todos (7) los propósitos generales de la educación matemática básica en la escuela primaria. Enlistamos a continuación aquellos que muestran una relación más fuerte con el método que nos ocupa, y una breve explicitación de dicha relación.

— Capacidad de usar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.

Algunas heurísticas para resolver problemas (G. Polya y A. Schoenfeld), sigieren por ejemplo que para resolver un determinado problema, primero se resuelvan casos particulares más sencillos del problema propuesto. El reconocer la analogía entre los mismos puede llevar a conjeturar la solución de problemas.

Más adelante ejemplificamos cómo puede utilizarse la inducción empírica en la resolución de un problema.

— Capacidad de anticipar y verificar resultados.

Cuando el estudiante ha reconocido la analogía o patrón existente en los casos particulares observados, al conjeturar o establecer la generalización correspondiente, está anticipando resultados que pueden ser verificados utilizando el mismo procedimiento con el que ha estado trabajando.

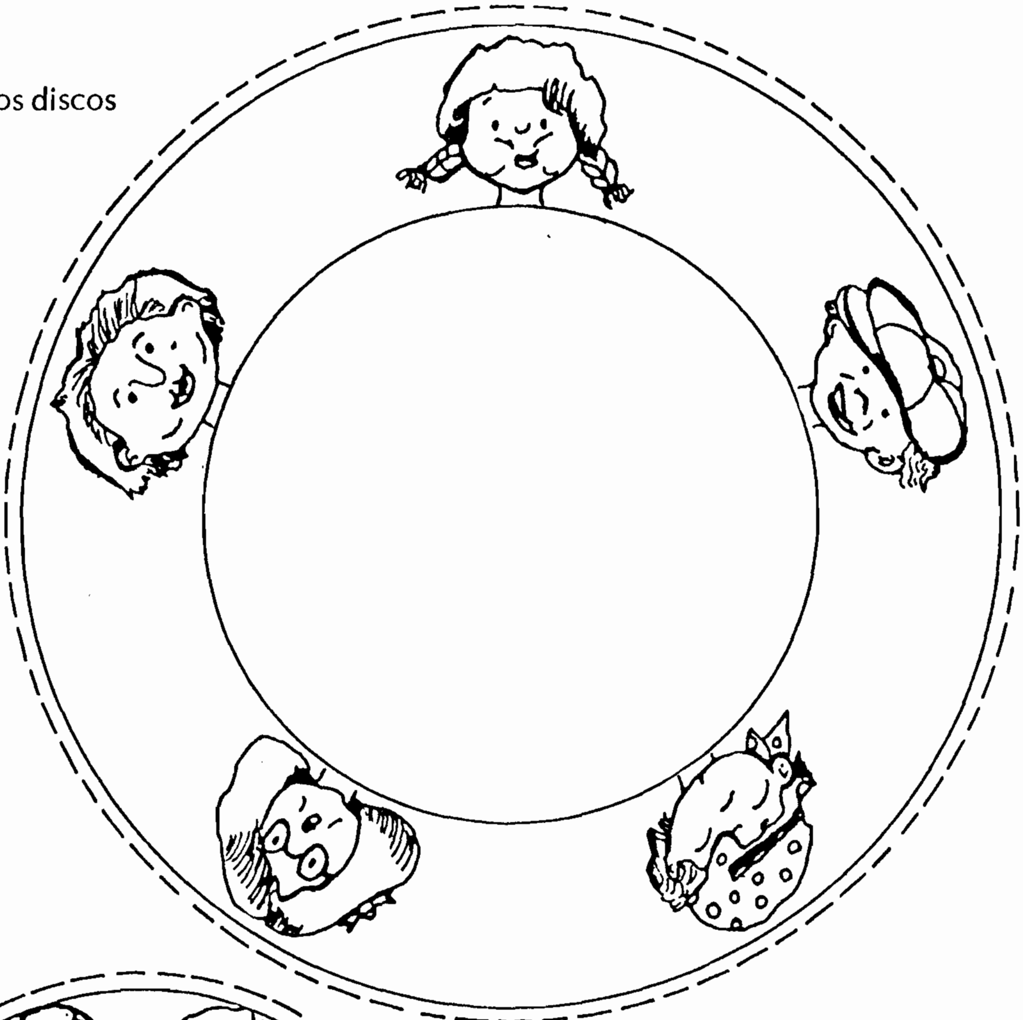
— Habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones.
— Destreza en el uso de ciertos instrumentos de medición, dibujo y cálculo.

Como antes se dijo, el primer paso del proceso inductivo tiene que ver con experiencias con casos particulares de conteos, cálculos, mediciones, dibujos, etc. Creemos que la relación con los dos propósitos anteriores es evidente.

— El pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.
— El pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

A continuación se anexa el citado problema, y antes de considerar la solución aquí propuesta para el mismo, se sugiere que intente usted resolverlo por sus propios medios. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE INDUCCIÓN EMPÍRICA

Recorta estos discos



Coloca los discos juntos, de grande a chico, y únelos por el centro.
Gíralos y descubre cuántos personajes hay.

La inducción empírica conduce de manera relativamente natural a sistematizaciones (en la organización del trabajo con los casos particulares, en el registro de la información obtenida, en la verificación de predicciones), las generalizaciones surgen cuando el estudiante advierte regularidades, tendencias o patrones en la información manejada.

INDUCCIÓN EMPÍRICA - UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

En una versión más extensa de este trabajo se ejemplifica como puede ser utilizada la inducción para construir en el aula diversos objetos matemáticos tales como: conceptos, definiciones, algoritmos, proposiones, axiomas, teoremos, fórmulas, etc. Aquí se mostrará a continuación un ejemplo que muestra muy generalmente como resolver un problema utilizado inducción empírica.

En las páginas 1 y 2 del Libro Integrado de Primer Grado Recortable, SEP 1993, aparece un problema que consiste en everiguar cúantos personajes distintos pueden obtenerse haciendo girar tres anillos de cartulina concéntricos, donde en cada anillo se encuentran dibujados 5 motivos diferentes: caras humanas en uno, vestimentas en otro y zapatos en el tercero.

SOLUCIÓN

Si usted intenta resolver el problema por medio de tanteos, se percatará de varios hechos, por ejemplo: 1) a pesar de que sólo hay 5 motivos diferentes en cada anillo, resultan un número grande de personajes, 2) No se tiene seguridad de que el número obtenido sea correcto, 3) Se presenta la necesidad de llevar un registro de los conteos efectuados a fin de no repetir intentos, etc.

Si trata de resolverlo en la manera de la didáctica tradicional, esto es, aplicando algún conocimiento ya presente (un conocimiento escolarizado) entonces pensará en utilizarse el llamado "principio multiplicativo" que enunciado de manera más o menos informal dice "Si una primera acción puede ser realizada en un cierto número de formas distintas, y si a continuación sucede que para cada una de estas formas distintas, puede efectuarse una segunda acción en otro cierto número de formas también distintas, entonces el número total de formas en que puede efectuarse la primera acción seguida de la segunda es igual al número de formas distintas para realizar la primera acción multiplicado por el número de formas distintas de realizar la segunda acción".

Este principio es válido también cuando se extiende a la realización consecutiva de tres o más acciones.

En el caso del problema que nos ocupa, se puede pensar en la primera acción como aquella de escoger una cara para el personaje, lo cual puede hacerse en 5 formas distintas, la segunda acción consistiría en escoger vestido, lo que también puede efectuarse en 5 formas distintas, y finalmente la tercera acción de escoger zapatos, también puede efectuarse en 5 formas diferentes.

Entonces una aplicación mecánica del principio multiplicativo nos diría que el número buscado de personajes distintos es 5x5x5, es decir 125 personajes distinto.

Sin embargo, lo que aquí nos interesa es saber cómo puede aplicarse la inducción para obtener la solución al problema anterior.

Considerando que para la solución de este problema por medios inductivos se hace necesario disponer de un medio gráfico para el registro de las acciones efectuadas utilizaremos en el mismo los llamados "diagramas de árbol".

La solución por inducción consiste en mostrar, por medio de casos particulares con números relativamente pequeños, como es posible conjeturar la existencia del principio multiplicativo.

Una vez hecho lo anterior, dicho principio simplemente se aplicaría a los números relativamente grandes del problema en cuestión.

La diferencia entre este proceso y la enseñanza tradicional consiste en que en ésta última, el principio multiplicativo es dado, mientras que en el proceso inductivo dicho principio es construido por un proceso de descubrimiento guiado.

SOLUCIÓN POR INDUCCIÓN

CASOS PARTICULARES (PROBLEMAS PARTICULARES) MÁS SENCILLOS

Utilizando diagramas de árbol, deberán resolverse los siguientes problemas:

1) ¿Cuántos personajes distintos pueden ser formados si se dispone de 2 caras, 2 vestidos y 2 zapatos distintos
2) ¿Cuántos personajes distintos pueden se formados si se dispone de 3 caras, 1 vestido y 2 zapatos distintos?
3) ¿Cuántos personajes distintos pueden ser formados si se dispone de 4 caras, 3 vestidos y 1 (par) zapatos?

Se ha considerado suficiente trabajar 3 casos particulares, si el profesor lo juzga necesario, (de acuerdo a las circunstancias del aula), puede aumentar el número de los mismos.

Una vez resueltos estos problemas, la información generada puede ser registrada en una tabla como la siguiente:

A partir de este punto, el profesor, mediante una guía adecuada del trabajo, puede indagar entre los estudiantes, a fin de ver si están o no en posibilidad de conjeturar el principio general, esto es, la relación de los números de las tres primeras columnas con el número de la última columna, para ello pudiera ser necesario trabajar más casos o manejar ejemplos particulares aún más sencillos.

Creemos que una vez establecido el principio multiplicativo, la solución del problema debe resultar inmediata.

MÉTODOS NO DEDUCTIVOS DE CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA ESCUELA PRIMARIA

Considerando que los nuevos materiales y paquetes didácticos (planes, programas, libros de texto, ficheros, etc.) propuestos por la SEP a partir de 1993 muestran una tendencia a establecer enfoques didácticos constructivistas al interior del aula, y consideando también que para realizar lo anterior, el profesor de primaria debe incrementar su cultura matemática, se presentan en este trabajo, tres métodos de la matemática que puede ayudar al profesor en el diseño de situaciones de enseñanza-aprendizaje. Aunque estas situaciones no constituyen lo que G. Brousseau denominaría "situaciones didácticas", sirven sin embargo para ir acercando al profesor a la posibilidad de diseñar tales situaciones.

Los métodos que para tal fin se presentan, permiten la construcción de conocimiento matemático en la escuela primaria sin emplear necesariamente el método deductivo. Dichos métodos son:
— Inducción empírica.
— Modelos matemáticos.
— Construcciones Geométricas con Herramientas Euclidianas..

	NÚM. MANERAS ELEGIR CARA	NÚM. MANERAS ELEG. VESTIDO	NÚM MANERAS ELEG. ZAPATO	NÚM. TOTAL MANERAS FORMAR PERSONAJES
1er CASO PART.	2	2	2	8
2do CASO PART.	3	1	2	6
3er CASO PART.	4	3	1	12

INDUCCIÓN EMPÍRICA

Dado que en otra parte de éste trabajo se describe con cierta amplitud el método de la inducción empírica, aquí nos referimos con cierta brevedad a los otros dos métodos.

EL MÉTODO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Gran parte del éxito de la matemática, es atribuible a la variedad de aplicaciones de la misma, dentro de las diversas actividades humanas, desde el arte hasta la química, por ejemplo.

Esta variedad de aplicaciones en campos tan diversos se debe esencialmente a la utilización, para resolver problemas prácticos dentro de dichos campos, del método de los modelos matemáticos.

El método de los modelos matemáticos pudiera ser descrito como una especie de "método axiomático deductivo en miniatura" ya que conserva la misma estructura y funcionamiento de éste, a saber: elementos dados (axiomas), razonamiento deductivo, y elementos deducidos a partir de lo dado.

Cuando el método de los modelos matemáticos es aplicado, ésta misma estructura y funcionamiento es usada en la resolución de problemas de la industria, del comercio, la biología, la guerra, etc.

En el método de los modelos matemáticos, los elementos dados suelen ser las características, propiedades o hechos que el matemático considera esenciales, dentro de un problema práctico de alguna actividad humana.

Los elementos producidos son simplemente todos los conocimientos deducidos utilizando lógica aristotélica a partir de los elementos dados, con la mira o propósito de lograr aplicaciones útiles a la situación real que les dió origen.

LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Sin embargo, el método de los modelos matemáticos puede adoptar una presentación más accesible y adecuada para la construcción de conocimientos matemático en la escuela primaria, y esto sucede cuando se da el caso de que las características, propiedades o hechos esenciales de una situación o problema, pueden ser representados por un modelo material o recurso manipulativo que posibilite la experiencia concreta del estudiante, sea éste un geoplano, un tangrama o un modelo libre adecuado a las características esenciales del problema.

En este caso las características esenciales del problema en cuestión no se manejarán en forma deductiva, sino empírica e inductivamente, esto es, se propiciará la interacción del niño con su entorno a través de la utilización de material o modelos físicos.

Para ejemplificar lo anterior presentamos, en forma de actividad por realizar, un sencillo problema que puede ser resuelto, entre otras muchas formas alternativas, construyendo modelos materiales de las características, propiedades o "actores" esenciales en el problema.

PROBLEMA

Un viejo, acompañado de un perro, un pollo y una bolsa de maíz, desea cruzar un río en una lancha, en la que sólo caben él y alguna de sus pertenencias. Si cruza por ejemplo, con el maíz, deja sólos al perro y al pollo, y aquel se come a éste. Si cruza al perro, el pollo se come al maíz. ¿Podrá el viejo cruzar el río con sus pertenencias íntegras?

EL MÉTODO DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON HERRAMIENTAS EUCLIDIANAS

Aquellos que enfatizan la utilidad de los problemas prácticas o problemas aplicables a la vida real, como únicos problemas dignos de ser considerados en la escuela, y que menosprecian aquellas actitudes que no parecen tener un fin utilitario o pragmático, seguramente encontrarán, en la breve presentación histórica del llamado "método de construcción