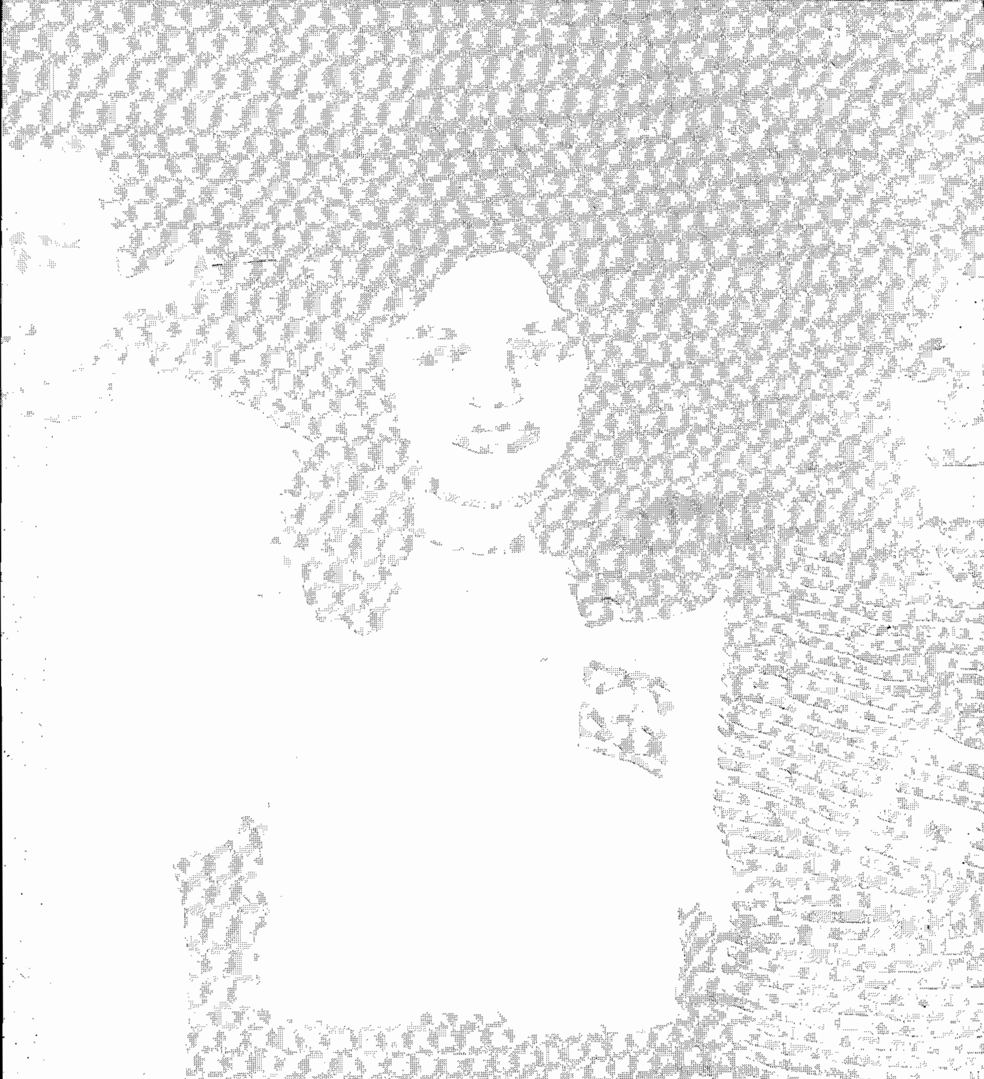
ANTOLOGÍA BÁSICA



GÉNESIS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL NIÑO DE EDAD PREESCOLAR

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN PLAN 1994

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SEP

ANTOLOGÍA BÁSICA

GÉNESIS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL NIÑO EN EDAD PREESCOLAR

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN PLAN 1994

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DEL CURSO

El presente curso constituye un espacio correspondiente al Área Específica de Educación Preescolar y tiene un doble propósito: a) ofrecer al alumno los aspectos teóricos referentes al desarrollo del pensamiento matemático en el niño y b) presentar algunos principios de enseñanza que permitan el diseño y puesta en práctica de estrategias didácticas.

Para alcanzar tales propósitos, en la Antología Básica se han seleccionado contenidos que abordan cuestiones réferidas al desarrollo del concepto de número, la representación gráfica, el conteo, la adición, la sustracción y principios para la enseñanza a través de juegos colectivos.

Dado que se trata de contenidos mínimos, es necesario que el estudiante los considere como elementales para su aprendizaje. Por su parte, los contenidos que se ofrecen en la Antología Complementaria fueron seleccionados en correspondencia con los contenidos de la Antología Básica y si bien, no son obligatorios, es conveniente que el profesor-estudiante los analice para ampliar el tratamiento de los temas para este curso. Entre los contenidos de una y otra antología existe un "mutuo apoyo" que permite al alumno ampliar y profundizar sus conocimientos sobre los temas que se proponen.

No obstante el carácter de mutuo apoyo, la Antología Básica se ha diseñado tomando en cuenta las posibilidades del estudiante y su inscripción en alguna de las modalidades que caracterizan a la licenciatura. En este sentido, dicha Antología contiene los contenidos mínimos obligatorios que permitan alcanzar los propósitos del programa.

El curso está dividido en tres unidades (El número y su escritura, Adición y sustracción y Principios para la enseñanza), las lecturas propuestas presentan estudios específicos sobre la génesis del pensamiento matemático, así como actividades didácticas susceptibles de ser empleadas en el aula.

Se recomienda que las lecturas se analicen conforme se presentan en el índice y que, al término de cada unidad, los alumnos realicen un estudio directo con los niños, utilizando los materiales y los procedimientos que se proponen en las lecturas correspondientes a cada tema, o bien, ensayar, al interior del aula, las actividades didácticas previamente elaboradas. En la guía del estudiante encontrará algunas indicaciones para tales actividades.

Para analizar cada una de las lecturas, es conveniente que el estudiante elabore esquemas, identificando los conceptos más importantes, cuadros que permitan clasificar las características evolutivas (niveles), o bien, preguntas para ser trabajadas en asesoría y/o que permitan abrir la discusión en el grupo.

EL NÚMERO Y SU ESCRITURA

PRESENTACIÓN

En esta unidad se estudian tres aspectos involucrados en el número: el concepto como tal, la representación gráfica y el conteo. Dichos aspectos se analizan desde un punto de vista genético, es decir, tomando en cuenta los distintos niveles por los que pasa el niño en la adquisición de estos contenidos.

De acuerdo con Nemirovsky y Carvajal, la clasificación y la seriación son operaciones íntimamente relacionadas con el aspecto matemático y el aspecto psicológico del concepto de número. Las autoras nos presentan un análisis de dicha relación, señalando los distintos estadios en la construcción de la clasificación, la seriación y el concepto de número.

Por su parte, Bollás ofrece una primera aproximación a la representación gráfica, señala que los numerales (p. ej. el grafismo 3) es una forma de representar gráficamente el concepto de número, se trata de una forma arbitraria y convencional. Por su parte Hughes, Bollás y Sánchez presentan estudios sobre la representación gráfica de las cantidades en niños de edad preescolar, en dichas representaciones se pueden observar producciones gráficas espontáneas y la forma en que evolucionan hacia la representación convencional (numerales).

De acuerdo con Labinowicz, el conteo es un proceso que el niño va construyendo gradualmente en estrecha relación con el lenguaje cultural. En dicho proceso se pueden distinguir tres niveles: el conteo de rutina, contar objetos y atribuir significados numéricos.

En un estudio más detallado, Baroody nos presenta las "Técnicas para contar" que usualmente son utilizadas por los niños, éstas van desde generar sistemáticamente los nombres de los números hasta comprender que la última palabra-número (o etiqueta) representa el número total de elementos contados así como un número para contar.

Tomando como referencia los temas tratados, a lo largo de esta unidad el lector encontrará una variedad de situaciones a través de las cuales se pueden realizar estudios específicos (réplicas) con los niños de su comunidad.

Tema 1. *El concepto de número*

LECTURA: ¿QUÉ ES EL NÚMERO? Y CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO EN EL NIÑO*

PRESENTACIÓN

Si bien el aspecto matemático del número difiere de acuerdo con las distintas escuelas matemáticas, Nemirovsky y Carvajal parten de la premisa que sostiene que el número es el resultado de la síntesis de las operaciones de clasificación y la seriación.

Analizan el aspecto matemático del número con esta concepción y señalan que este análisis permite comprender el proceso a través del cual los niños construyen el concepto de número.

La clasificación y la seriación son operaciones fundamentales del pensamiento lógico y hacen referencia a la acción de agrupar los objetos por sus características cualitativas (la forma, el tamaño, el color, etc.). En la clasificación se agrupan los objetos por sus semejanzas y se separan por sus diferencias, así por ejemplo, cuando se clasifica un conjunto de figuras geométricas (2 cuadrados rojos, 2 cuadrados azules y 5 círculos azules) por el criterio color, agrupamos los dos cuadrados azules y los cinco círculos y, al mismo tiempo, separamos los dos cuadrados rojos. Ahora bien, ante la pregunta ¿qué hay más, círculos azules o figuras geométricas? Es una pregunta que tiene que ver con la inclusión de clase, es decir, que los círculos azules (subclase) están incluidos en una clase más general (figuras geométricas).

La inclusión de clase es un aspecto que permite comprender el aspecto cardinal del número. Cuando pensamos, por ejemplo, en el número "cinco" lo pensamos como una clase que incluye a la subclase "cuatro", a la subclase "tres", etc., y el "cinco" (ahora como subclase) está incluido a su vez en la clase "seis", "siete", etc.

En la seriación se agrupan los objetos según sus diferencias ordenadas, es decir, objetos que, por sus diferencias, se pueden ordenar (longitudes, pesos, seriación temporal; antes, ahora y después, etc.). Dentro de la seriación se establecen dos tipos de relaciones que son importantes para comprender el concepto de número: la transitividad y la reciprocidad. Cuando pensamos en un número, por ejemplo el seis, lo concebimos como un rango dentro de la serie numérica. El "seis" está después del "cinco" y antes del "siete". Esto quiere decir que el seis es mayor que el cinco, pero si la relación se invierte es menor que el siete (reciprocidad) 6 > 5, 6 < 7. Ahora bien, si el cinco es menor que el seis entonces, necesariamente, es menor que el siete (transitividad) 5 < 6 < 7.

Citando los trabajos de Jean Piaget, las autoras nos presentan un análisis psicológico de los distintos estadios por los que transita el niño en la construcción de la clasificación, la seriación y el concepto de número (la conservación de las cantidades vía la correspondencia biunívoca).

QUÉ ES EL NÚMERO

En la vida cotidiana utilizamos con frecuencia los números y en nuestra labor docente nos proponemos que los niños lo hagan.

¿Nos hemos planteado qué es el número?, ¿de dónde surge? Los matemáticos han discutido durante mucho tiempo qué es el número y de acuerdo a las diferentes escuelas matemáticas las concepciones que se manejan también difieren. Nosotros partimos de la concepción que sostiene que el concepto de número es el resultado de la síntesis de la operación de clasificación y de la operación de seriación: un número es la clase formada por todos los conjuntos que tienen la misma propiedad numérica y que ocupa un rango en una serie, serie considerada a partir también de la propiedad numérica. De allí que la clasificación y la seriación se fusionen en el concepto de número.

* M. Nemirovsky y A. Carvajal. "¿Qué es el número?" y "Construcción del concepto de número en el niño", en *Contenidos de aprendizaje. Concepto de número.* México, SEP-UPN, 1987. pp. 3-14 y 22-36.

El análisis del concepto de número, así definido, es lo que haremos en esta parte del documento.

¿Por qué partimos de esta concepción? Porque su análisis además nos permite comprender el proceso a través del cual los niños construyen el concepto de número y ello nos garantiza que las decisiones didácticas que adoptemos en el campo de la matemática respondan a las necesidades y características psicológicas del niño.

Si, como hemos dicho, el concepto de número está íntimamente relacionado con las operaciones de clasificación y seriación, será necesario entonces —para comprenderlo claramente— comenzar por analizar en qué consisten esas operaciones.

Clasificación

La clasificación es una operación lógica fundamental en el desarrollo del pensamiento, cuya importancia no se reduce a su relación con el concepto de número. En efecto, la clasificación interviene en la construcción de todos los conceptos que constituyen nuestra estructura intelectual.

Podríamos decir en términos generales que clasificar es "juntar" por semejanzas y "separar" por diferencias.

Cuando digo "Estas plantas me gustan", ¿Estoy clasificando? Pues claro, estoy "juntando" las plantas que por presentar ciertas cualidades tienen la propiedad común de "que me gustan" y las "separo" de todas las plantas que no reúnen esas cualidades y por lo tanto constituyen "las plantas que no me gustan".

Si pensamos en "los países del hemisferio norte", ¿clasificamos? Sí, estamos "juntando" los países cuya semejanza es estar ubicados en el hemisferio norte de la tierra y los "separamos" de los países que son diferentes, es decir que no tienen esa propiedad común, no están ubicados en el hemisferio norte.

En ambas situaciones estamos clasificando a partir de un universo que en el primer caso es "las plantas" y en el segundo caso "los países", pero a su vez la sola selección del universo implica un acto clasificatorio ya que al decir "las plantas" estamos "juntando" éstas y "separándolas" de las "no plantas" y al decir "los países" los "juntamos" entre sí y los separamos de los "no países".

Hay que aclarar que cuando decimos "juntar" o "separar", nos referimos a acciones que generalmente no se realizan en forma efectiva o visible, no juntamos ni separamos concretamente esos elementos, lo hacemos pensándolo, es decir en forma interiorizada; no tomamos las plantas del mundo y las juntamos, ni lo hacemos con los países, son acciones interiorizadas, no efectivas sobre los objetos de la realidad.

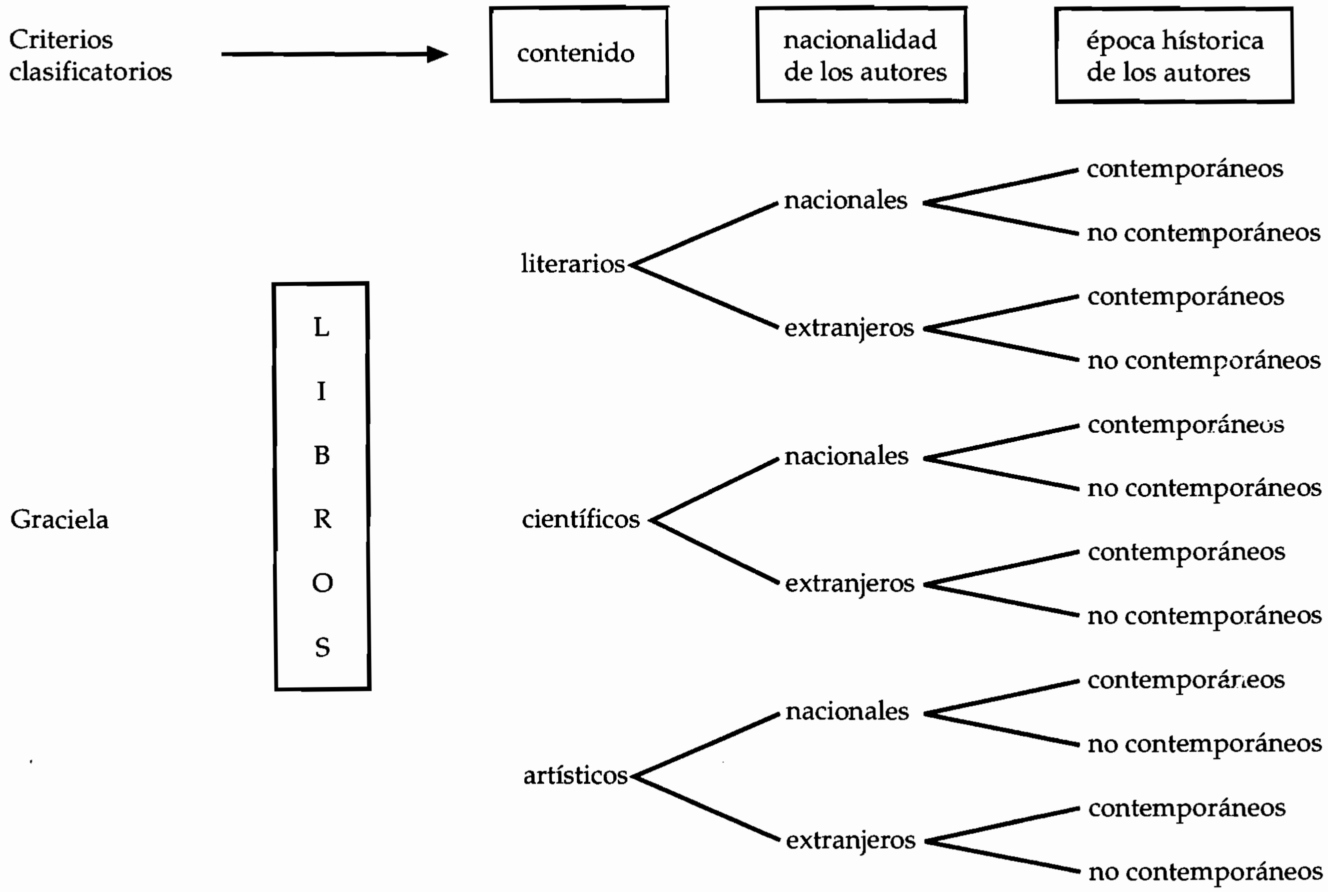
Ahora bien, un mismo universo puede clasificarse de diferentes maneras, cada una dependerá del criterio de clasificación que elijamos; veámoslo en nuestros ejemplos.

- El universo de las plantas podemos clasificarlo en el conjunto de las plantas fanerógamas y el conjunto de las plantas criptógamas considerando la forma en que reproducen y éste sería el criterio clasificatorio que hemos elegido, o bien podemos clasificar las plantas en el conjunto de plantas de zonas áridas, el conjunto de plantas de zonas tropicales... si el criterio clasificatorio elegido es la zona donde crecen, etc.
- El universo de los países puede ser clasificado en diversos conjuntos: países monárquicos, republicanos... si el criterio clasificatorio es el tipo de gobierno que tiene, bien en países industrializados y agrícolas si el criterio clasificatorio es el tipo de producción que hay en ellos.

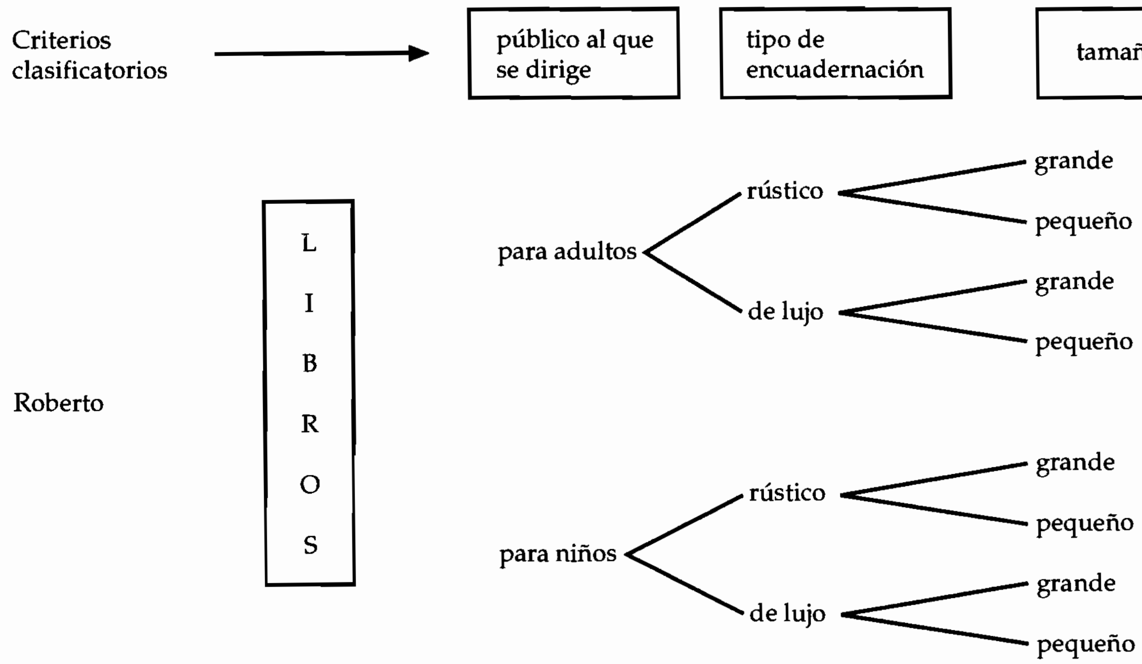
Podría usted continuar estableciendo diversos criterios clasificatorios sobre infinidad de universos de objetos. Veámoslo a través de un nuevo ejemplo: Graciela y Roberto han acomodado sus libros de la siguiente manera: (Cuadro página siguiente)

Como vemos un mismo universo puede ser clasificado con base en diferente criterios, piense cómo acomoda usted los libros y con base en qué criterios lo hace.

¿Clasificamos en la vida diaria? La respuesta es obvia: sí clasificamos en las actividades cotidianas, un ejemplo de ello es a clasificación de los libros, otro sería al acomodar la ropa, los víveres,



* Al organizar el librero Graciela se dio cuenta de que no tenía ningún libro científico de autor extranjero no contemporáneo, de allí que resultara que éste fuera un conjunto vació.



* Sucedió que Roberto al buscar los libros para niños con encuadernación de lujo y pequeños, encontró uno solo que reunía estas propiedades y formó con este libro un conjunto de elemento.

el dinero, etc. Seguramente a usted se le ocurren muchas otras situaciones cotidianas en las que se clasifica.

Comparando los ejemplos que hemos citado podemos ver que en algunos casos (libros, ropa, víveres) el acto clasificatorio no se realiza solamente en forma interiorizada, pensada, sino además en forma efectiva, ya que juntamos y separamos los objetos en forma concreta; mientras que en otros casos, como hemos visto con las plantas y los países, el acto clasificatorio se realiza solamente a través de acciones interiorizadas. Lo mismo sucede cuando usted como maestro considera entre sus alumnos a aquellos que son retraídos y a los que son desenvueltos, ya que no junta unos ni los separa físicamente de los otros, sino que realiza esta clasificación sólo en forma interiorizada.

En la clasificación se toman en cuenta —además de las semejanzas y diferencias— otros dos tipos de relaciones: la pertenencia y la inclusión.

La pertenencia es la relación que se establece entre cada elemento y la clase de la que forma parte. Está fundada en la semejanza, ya que decimos que un elemento pertenece a una clase cuando se parece a los otros elementos de esa misma clase, en función del criterio de clasificación que estamos tomando en cuenta.

La inclusión es la relación que se establece entre cada subclase y la clase de la que forma parte, de tal modo que nos permite determinar qué clase es mayor —tiene más elementos que la subclase.

Regresemos al ejemplo de los libros. Graciela formó tres clases de libros: literarios, científicos y artísticos. Dentro de cada clase, formó dos subclases: nacionales y extranjeros. ¿De cuáles libros tiene Graciela mayor cantidad, qué hay más, libros científicos o libros científicos nacionales? Si sabemos que la subclase de "libros científicos nacionales" está incluida en la clase de "libros científicos", podemos *deducir* que hay más libros científicos que libros científicos nacionales aunque no sepamos cuántos libros hay.

Hasta ahora hemos hablado de la clasificación en general, comencemos a establecer la relación entre ésta y el concepto de número.

Una de las características de los ejemplos de clasificación que hemos manejado es que en todos ellos la clasificación se fundamenta en las cualidades de los objetos, es decir, en sus propiedades cualitativas. En el caso de los niños ser retraídos o ser desenvueltos son cualidades de los mismos, en cambio cuando nos referimos a los números la situación varía.

Cuando nosotros, adultos, pensamos en un número, por ejemplo el cinco, ¿qué estamos haciendo? ¿pensamos en cinco objetos? ¿en cinco elementos concretos? ¿en cinco elementos iguales? Pueden ser cinco manzanas, cinco autos, cinco ideas, cinco personas, cinco útiles escolares, cinco utensilios de cocina, es decir cinco "cualquier cosa", *incluso* cinco cosas que pueden ser diferentes entre si (una silla, un lápiz, un libro, un perro, una flor). Cuando pensamos en un número, también estamos clasificando ya que estamos estableciendo semejanzas y diferencias. Estamos agrupando —en el caso de nuestro ejemplo— todos los conjuntos posibles de cinco elementos y los estamos separando de todos los conjuntos que no tienen cinco elementos. Es decir que, en el caso del número no buscamos ya semejanzas entre *elementos* sino semejanzas entre *conjuntos*. Agrupamos los conjuntos que se parecen (o que son equivalentes) en su propiedad numérica, y ese por eso que ya no importa que existan, o no, parecidos cualitativos entre los elementos que constituyen los conjuntos. Lo que importa es la equivalencia numérica que establecemos entre los conjuntos que constituyen la clase en la que estamos pensando, en este caso la clase formada por todos los (infinitos) conjuntos que tienen cinco elementos.

¿Habrá algún conjunto de cinco elementos que no pertenezca al grupo de los conjuntos de cinco elementos? Seguro que no, es decir que todos los conjuntos de cinco elementos pertenecen al grupo o clase del cinco y habrá, por lo tanto, infini tos conjuntos de cinco elementos en la clase de cinco; será suficiente que un conjunto tenga esa propiedad cuantitativa para que pertenezca a esa clase. Por lo tanto el número cinco es la clase constituida por todos los conjuntos de cinco elementos.

¿Con base en qué tipo de criterio podemos determinar que un conjunto de elementos pertenece o no a determinada clase de conjuntos? El criterio será, en este caso, un criterio cuantitativo: tener (o no) la misma cantidad de elementos que los otros conjuntos pertenecientes a la clase.

Para seguir con nuestro ejemplo, si llamamos "cinco" a la clase de conjuntos que tienen cinco elementos, pertenecerá a ella cualquier conjunto que tenga la misma cantidad de elementos —es decir, que pueda ser puesto en correspondencia término a término con cualquier otro conjunto de la misma clase— en tanto que no pertenecerán a ella los conjuntos que no tengan esa cantidad de elementos.

Apuntemos finalmente que la relación de inclusión característica de la clasificación juega también un importante papel en el concepto de número. En efecto, las clases "cuatro", "cinco", etc., que podemos formar estableciendo relaciones de semejanza cuantitativa entre conjuntos, no son clases aisladas, sino que constituyen una jerarquía en la que cada clase incluye a las que son inferiores y está incluida en todas las superiores. De ese modo la clase "cinco" incluye a "cuatro", a "tres", etc., y está incluida a su vez en las clases "seis", "siete"...

Hemos revisado algunos conceptos referidos a la clasificación, pero en un comienzo dijimos que el concepto de número es el resultado de la síntesis de las operaciones de clasificación y seriación. Veamos entonces a continuación qué es la seriación y cuál es su relación con el número.

Seriación

Al igual que la clasificación la seriación es una operación que —además de intervenir en la formación del concepto de número— constituye uno de los aspectos fundamentales del pensamiento lógico.

Seriar es establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenar esas diferencias.

¿Cuáles son los elementos que seriamos? Podemos seriar, por ejemplo:

— sonidos que son diferentes en cuanto a su timbre, ordenándolos del más agudo al más grave;
— vehículos cuya fecha de producción es diferente, ordenándolos del más antiguo al más moderno;
— billetes de valor diferente, ordenándolos desde el que vale menos hasta el que vale más.

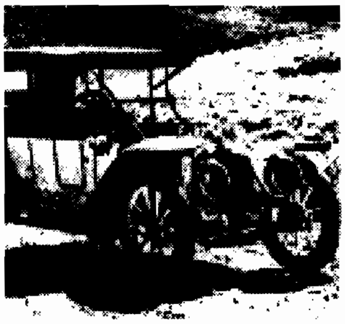
Tanto en estos casos como en todos los que imaginemos, la seriación se podrá efectuar en dos sentidos: creciente y decreciente.

Destaquemos finalmente que la seriación operatoria tiene dos propiedades fundamentales: transitividad y reciprocidad.

Transitividad

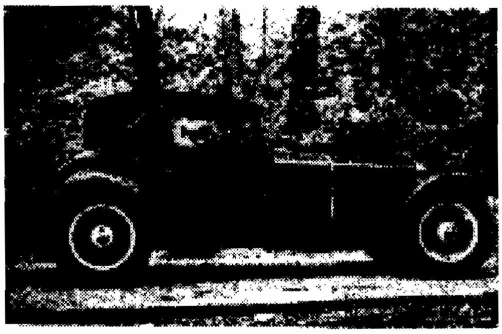
—Al establecer una relación entre un elemento de una serie y el siguiente y de éste con el posterior, podemos deducir cuál es la relación que hay entre el primero y el último. Tomemos como ejemplo vehículos y ordenémoslos con base en la diferencia en la fecha de producción.

A



B

C

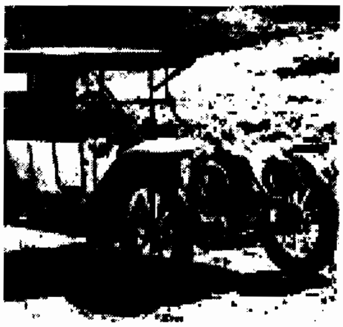


A

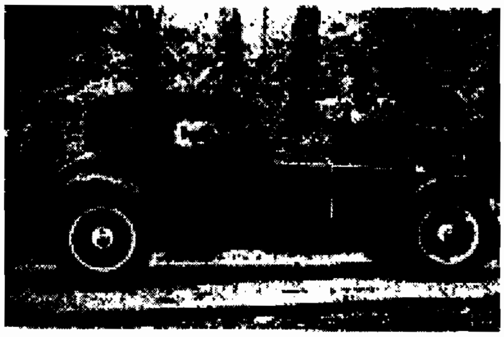
ción en que estemos recorriendo la serie, pero se trata de dos formas equivalentes de referirse a la misma relación.

—La reciprocidad hace posible, por otra parte, considerar a cada elemento de la serie como término de dos relaciones inversas: en una serie ordenada en forma decreciente (por ejemplo, de mayor a menor) cada elemento —salvo el primero y el último— es al mismo tiempo menor que el anterior y mayor que el siguiente.

B



C



Si A es más antiguo que B y B es más antiguo que C, *necesariamente* A es más antiguo que C.

Para establecer la última relación no se necesitó comparar A con C en forma efectiva, sino que pudimos deducirlo a partir de las dos relaciones que establecimos anteriormente.

Sabemos que Benin es más grande que Burundi y también sabemos que Burundi es más grande que Gambia, ¿qué país tiene una superficie mayor, Gambia o Benin?

¿Pudo usted establecer esa comparación? ¿Cómo lo hizo? ¿Conocía usted la superficie de esos países? Es evidente que usted pudo deducir la relación de tamaño existente entre Gambia y Benin aun sin conocer sus respectivas superficies, a partir de las relaciones previamente establecidas.

Reciprocidad

—Cada elemento de una serie tiene una relación tal con el elemento inmediato que al invertir el orden de la comparación, dicha relación también se invierte.

Si comparamos B con C la relación es B más antiguo que C y si comparamos C con B la relación se invierte, es decir C es menos antiguo que B.

En ambos casos estamos afirmando lo mismo. La forma en que lo hacemos depende de la direc-

Si comparamos B con C la relación es más antiguo que, si comparamos B con A la relación es menos antiguo que. Es decir que, a partir de B puede establecerse tanto la relación directa (en este caso más antiguo que), como su inversa (en este caso menos antiguo que) y que, por lo tanto, B no puede ser considerado a partir de una sola de esas relaciones sino que es *al mismo* tiempo menos antiguo que unos elementos de la serie y más antiguo que otros.

Las seriaciones, al igual que las clasificaciones las realizamos siempre en forma interiorizada, pero podemos, además, en algunos casos, realizarlas en forma efectiva sobre los objetos.

Si, por ejemplo, seriamos los países de Africa de acuerdo al tamaño de la superficie que tienen, es evidente que la seriación, en este caso, la haremos sólo en forma interiorizada ya que nunca podríamos tomar cada país y colocarlos uno junto a otro en orden creciente o decreciente. Mientras que si seriamos los niños de nuestro grupo, por ejemplo de acuerdo a su altura, además de hacerlo en forma interiorizada, lo podemos realizar en forma efectiva, visible.

Veamos ahora cuál es la relación que tiene la seriación con el concepto de número.

¿Qué seriamos cuando seriamos los números? Para responder, tenemos que referirnos nuevamente a la clasificación de conjuntos.

Dijimos que el cinco, por ejemplo, es la clase constituida por todos los conjuntos de cinco elementos, el cuatro es la clase formada por todos los conjuntos de cuatro elementos, etc.

Ahora bien, cuando construimos la serie numérica, cuando contamos, decimos: "uno, dos, tres, cuatro, cinco..." ¿Qué queremos decir al asegurar que el cuatro se ubica siempre después del tres y antes del cinco? ¿Queremos decir simplemente que un conjunto particular que hemos formado, por ejemplo, con cuatro libros, se ubica después de otro conjunto particular de tres libros y antes que un conjunto de cinco libros? No, queremos decir mucho más. Lo que afirmamos es que *cualquier conjunto* de cuatro elementos que podamos formar o imaginar se ubicará después de cualquier conjunto de tres elementos y antes de cualquier conjunto de cinco elementos.

Cuando decimos *cualquier conjunto*, nos estamos refiriendo a todos y cada uno de los conjuntos que constituyen la clase "cuatro", la clase "tres" o la clase "cinco". Es decir que cuando seriamos los números ya no seriamos elementos, no seriamos conjuntos particulares, lo que seriamos son clases de conjuntos.[1] ¿Qué hacemos para ordenar las clases con base en las diferencias cuantitativas? Establecemos una relación entre las clases, de manera, que si las ordenamos en forma creciente, la clase del cuatro estará previa a la del cinco y ésta previa a la del seis... y ¿cuál es la relación entre ambas clases? La relación es +1 si las ordenamos en forma creciente y -1 si las ordenamos en forma decreciente.

Vemos así que la serie numérica es el resultado de una seriación, pero ya no de elementos sino de clases de conjuntos y dado que resulta de una seriación la serie numérica reúne también las propiedades de toda serie, que son transitividad y reciprocidad.

Transitividad

$$1 \underbrace{\quad} 2 \underbrace{\quad} 3 \qquad 4 \qquad 5\ldots$$

—Si dos es mayor que uno y tres es mayor que dos, podemos deducir que tres es mayor que uno, sin necesidad de comprobarlo en forma efectiva.

Reciprocidad

$$1 \qquad 2 \rightleftarrows 3 \qquad 4 \qquad 5\ldots$$

—Si comparamos dos con tres la relación es menor que, si invertimos el orden de la comparación, tres con dos, la relación se invierte y será mayor que.

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \qquad 4 \qquad 5\ldots$$

—Dos es al mismo tiempo mayor que uno y menor que tres.

Estas relaciones se pueden establecer tanto en una serie creciente como en una decreciente.

De tal manera comprobamos que la operación de seriación interviene necesariamente en el concepto de número.

En síntesis, puede decirse que el número es al mismo tiempo clase y relación asimétrica, se deriva tanto de la clasificación como de la seriación. Esto implica que está íntimamente relacionado con ambas operaciones lógicas, pero no puede reducirse a ninguna de ellas aisladamente, ya que es el resultado de la fusión de esas dos operaciones.

Es importante aclarar que la fusión de la clasificación y la seriación se presenta en el caso del concepto de número, pero no cuando se clasifica o se seria con base en las propiedades cualitativas.

Al estar clasificando con base en cualidades uno está centrado en las semejanzas, los elementos se consideran equivalentes independientemente de sus diferencias. Mientras se está seriando con base en criterios cualitativos uno se centra en las diferencias, ya que seriar es ordenar esas diferencias. En el terreno de lo cualitativo, clasificación y seriación, por lo tanto, se mantienen separadas. No se seria y se clasifica al mismo tiempo.

Pero cuando se trata de establecer la equivalencia numérica entre dos conjuntos, es decir cuando se prescinde de las cualidades, los elementos son considerados al mismo tiempo como equivalentes y como diferentes. Equivalentes porque a cualquier elemento de un conjunto le puede corresponder cualquier elemento del otro, son unidades intercambiables y diferentes por su posición momentánea dentro de la seriación. Como se hace abstracción de las cualidades, lo único que permite diferenciar cada unidad de las demás es el orden que se establece, pues si no se hiciera así se contaría dos veces el mismo elemento o se saltearía alguno.

¿Cómo establecemos la equivalencia numérica entre dos conjuntos? Para establecerla hacemos uso de la operación de correspondencia y por esto veremos a continuación dicha operación.

Correspondencia

"El análisis de los comienzos de la cuantificación nos ha llevado a plantear el problema de la correspondencia. Comparar dos cantidades es, efectivamente, o bien poner en proporción sus dimensiones, o bien poner sus elementos en correspondencia término a término. De estos dos procedimientos sólo este último, a partir de Cantor, se nos presenta como el verdaderamente constitutivo del número entero mismo, ya que proporciona el cálculo más simple y más directo de la equivalencia de los conjuntos".[2]

La correspondencia término a término o correspondencia biunívoca es la operación a través de la cual se establece una relación de uno a uno entre los elementos de dos o más conjuntos a fin de compararlos cuantitativamente.

¿Qué papel juega la correspondencia en el concepto de número? Para determinar, con base en la propiedad numérica, que un conjunto pertenece a una clase, hacemos uso de la correspondencia biunívoca, es decir, que ponemos en relación cualquier elemento de un conjunto con cualquier elemento de otro conjunto hasta que ya no pueda establecerse esa relación uno a uno. Si no nos sobran elementos en ninguno de los conjuntos significa que son equivalentes; mientras que si sobran elementos en alguno de los conjuntos éstos no son equivalentes. Los conjuntos equivalentes los "juntamos" constituyendo clases, de modo que obtenemos la clase del nueve, del cinco, del ocho, etc.

Para ordenar dichas clases establecemos nuevamente la correspondencia biunívoca entre estas clases y así organizamos la serie numérica tomando en cuenta las relaciones +1, -1:

o	representante de la clase del uno
oo	representante de la clase del dos
ooo	representante de la clase del tres
oooo	representante de la clase del cuatro
ooooo	representante de la clase del cinco
	etc.

Vemos así cómo, en el caso del número, las operaciones de clasificación y de seriación se fusionan a través de la operación de correspondencia.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO EN EL NIÑO

En la primera parte de este documento revisamos brevemente qué es el número, lo diferenciamos de los numerales y concluimos que didácticamente se justifica el uso de los numerales si los niños están construyendo o han construido el concepto de número. De allí que es necesario analizar el proceso psicológico a través del cual el niño construye el concepto de número antes de proponer situaciones de aprendizaje para favorecer dicha construcción.

Partiendo de que las operaciones de clasificación y de seriación están involucradas en el concepto de número y se fusionan a través de la operación de correspondencia, que a su vez permite la construcción de la conservación de la cantidad, veremos a continuación la manera en que el niño construye dichas operaciones.

Comenzaremos este breve análisis abordando la clasificación, después la seriación y, por último, la correspondencia teniendo en cuenta que:

— Los procesos de construcción de las tres operaciones son simultáneos, esto significa que el niño no las construye en forma sucesiva sino al mismo tiempo.
— El niño atraviesa por etapas o estadios en el proceso de construcción de cada una de estas operaciones.
— Cuando un niño se encuentra en determinado estadio de una de las operaciones no necesariamente está en el mismo estadio respecto a las otras dos operaciones. Por ejemplo, puede estar finalizando el primer estadio de la clasificación y al mismo tiempo estar en el segundo estadio de la seriación.
— La secuencia de los estadios es la misma en todos los niños, es decir que si bien las edades pueden variar, el orden de los estadios se conserva. En cada una de las tres operaciones los niños pasan por el primero y el segundo estadio antes de llegar al estadio operatorio (tercer estadio).
— Aun cuando podemos relacionar los estadios con determinadas edades cronológicas, éstas son sólo aproximadas ya que varían de una comunidad a otra e incluso de un niño a otro, dependiendo de las experiencias que cada uno tenga.

Los ejemplos, materiales y conclusiones a que haremos referencia fueron extraídos de *"Génesis de las estructuras lógicas elementales"* de Jean Piaget y Bärbel Inhelder, de *"Génesis del número en el niño"* de Jean Piaget y Alina Szeminska y de *"Clasificación, seriación y concepto de número"* de Delia Lerner.

Psicogénesis de la clasificación

El proceso de construcción de la clasificación atraviesa por tres estadios:

Primer estadio:	Hasta los 5-6 años aproximadamente.
Segundo estadio:	Desde los 5-6 años hasta los 7-8 años aproximadamente.
Tercer estadio: (operatorio):	A partir de los 7-8 años aproximadamente.

Cada uno de los estadios de esta operación lógica lo analizaremos a través de ejemplos de clasificaciones hechas por los niños, tomando como universo a clasificar los bloques lógicos. Este material, diseñado por Z. P. Dienes, consiste en cuarenta y ocho figuras geométricas que tienen las siguientes variables: color (rojo, amarillo y azul), forma (cuadrangular, circular, triangular y rectangular), tamaño (grande y pequeño) y grosor (grueso y delgado).

Características del primer estadio de la clasificación

Al proponerle al niño de este estadio que clasifique ("Pon junto lo que va junto"), durante esta etapa lo hace sobre la marcha: toma un elemento cualquiera, luego otro que se parezca en algo al anterior, después un tercero que tenga alguna semejanza con el segundo y así continúa seleccionando cada elemento por alguna característica que tenga en común con el último que ha colocado. De manera tal que alterna el criterio clasificatorio de un elemento a otro, por ejemplo: el segundo elemento se parece en el color al primero, el tercero se parece en la forma al segundo, el cuarto elemento se parece en el tamaño al tercero, etc.

El niño obtiene como resultado de su actividad clasificatoria un objeto total al colocar cada elemento junto al anterior logrando una continuidad espacial en la ubicación de los elementos, porque al estar centrado en la búsqueda de semejanzas, no los separa.[3] Por constituir los elementos clasificados por el niño una figura, un todo, a este estadio de la clasificación se le denomina "colección figural". ¿Qué es necesario tomar en cuenta para separar los elementos? Hay que considerar las diferencias y es lo que aún no toma en cuenta el niño de este estadio cuando está clasificando.

Hay ocasiones en las cuales el niño le da un significado simbólico a lo que está haciendo y dice, por ejemplo, "éste es un tren" y añade "la chimenea" a la "locomotora".

Esta situación no quiere decir que el niño desde un principio se haya propuesto construir un tren sino que al contemplar la clasificación que está haciendo le encuentra parecido con algún objeto de la realidad y, dejando de lado la actividad clasificatoria, completa la figura. Hay que diferenciar la clasificación de las situaciones en las que el niño se propone representar algo, puesto que cuando el niño juega a construir una casa, un tren, etc., porque así se lo ha propuesto, no está clasificando. No cualquier figura es una "colección figural", la colección figural resulta de una conducta clasificatoria, que consiste en establecer semejanzas. Si lo que el niño ha hecho es una representación, no es posible evaluar a partir de ella el nivel clasificatorio. De allí la necesidad de observar el proceso de la actividad y no sólo el resultado, ya que éste puede ser el mismo en ambos casos, por ejemplo un trenecito.

El niño en esta etapa deja muchos elementos del universo sin clasificar dando por terminada la actividad sin haber tomado en cuenta todos los elementos que se le ofrecieron porque ve un objeto total que se le ha formado y consider la pertenencia de cada elemento a la colección en función de la proximidad espacial: un elemento pertenece a la colección si está muy cerca de los otros elementos que la forman.

Al finalizar este estadio el niño logra reacomodar los elementos de su clasificación formando subgrupos, pero aún no los separa.

Características del segundo estadio de la clasificación

Dentro de este estadio se da una evolución importante que permite pasar de la colección figural a la clase lógica.

El logro inicial del niño en relación al estadio anterior es que comienza a tomar en cuenta las diferencias entre los elementos, por lo tanto forma varias colecciones *separadas*. El resultado no es todavía una clase lógica pero, a diferencia del anterior, no queda constituido un objeto total, una figura, sino pequeños grupitos, por lo que a este estadio se le denomina "colección no figural".

¿Por qué son pequeños los grupitos que forma? Porque el niño busca que las semejanzas sean máximas, es decir, que los elementos que agrupa se parezcan lo más posible.

Los criterios clasificatorios los establece a medida que clasifica, de tal modo que suele alternarlos pero ya no de elemento a elemento como hacía en el estadio anterior, sino de conjunto a conjunto. Por ejemplo los elementos de un conjunto se parecen por ser rojos, los elementos de otro conjunto se parecen por ser triángulos, etc.; en este caso pasó del criterio color al criterio forma. Es decir que dentro de cada colección todos los elementos se parecen en lo mismo, pero al pasar de una colección a otra, el criterio cambia. En el primer momento de este estadio el niño deja aún elementos del universo sin clasificar y progresivamente incorpora más hasta clasificar todos los elementos que constituyen el universo.

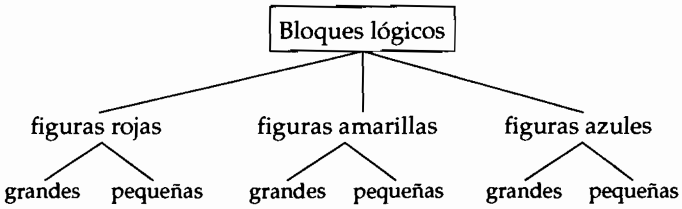
Esta clasificación nos indica que comienza a aceptar diferencias entre los elementos de un mismo conjunto, puesto que ya no busca semejanzas máximas, lo cual le permite formar colecciones más amplias que abarcan mayor número de elementos cada una.

La pertenencia de un elemento a un conjunto ya no está dada por la proximidad espacial sino por la semejanza que guarda con los demás elementos de dicho conjunto.

Progresivamente el niño logra anticipar y conservar el criterio clasificatorio. Anticipar quiere decir que antes de realizar la clasificación en forma efectiva, decide con base en qué criterio lo hará. Conservar significa que si inicia la clasificación con base en un criterio, lo mantendrá a lo largo del acto clasificatorio. Por ejemplo: si decide clasificar de acuerdo al grosor aplicará este criterio a todos los elementos del universo.

También en este estadio llega a clasificar un mismo universo con base en diferentes criterios. Es decir que si clasificó los bloques lógicos en función del criterio color, también podrá hacerlo de acuerdo a la forma, o al tamaño, etc., por lo tanto hay movilidad en sus criterios clasificatorios. Esto significa que el niño no se aferra a un solo criterio sino que utilizará los que el material le permita, pero en cada acto clasificatorio utilizará el mismo criterio (o la misma combinación de criterios) para *todos* los conjuntos que forme. La movilidad se hará notar en la posibilidad de pasar de un criterio a otro en actos clasificatorios *sucesivos*. Por ejemplo: si clasifica los bloques lógicos utilizando el criterio forma, en otro momento si clasifica vestimenta lo podrá hacer con base en el criterio material, tamaño, etc., y no necesariamente con el criterio forma.

En este momento el niño podrá disociar y reunir conjuntos, es decir que si ha clasificado el universo en figuras rojas, amarillas y azules podrá constituir los subconjuntos correspondientes. De la misma manera, si parte de subconjuntos podrá constituir conjuntos más abarcativos.



Las clasificaciones que el niño realiza al final de este estadio son similares a las que haría un sujeto del estadio operatorio, pero la diferencia con éste es que todavía no ha construido la cuantificación de la inclusión. ¿Qué significa ésto? Que el niño aún no considera que la parte está incluida en el todo y que éste abarca a las partes que lo componen. Por ejemplo, habiendo clasificado los bloques lógicos por tamaño (grandes y pequeños), ante la pregunta: "¿Qué hay más, figuras grandes o figuras?" el niño responderá que hay igual, porque en realidad está comparando el conjunto de las figuras grandes con el conjunto de las figuras pequeñas, estableciendo una relación de parte a parte y no de parte a todo.

Características del tercer estadio de la clasificación

El resultado obtenido por el niño en este estadio es el mismo que el de un niño que está en la etapa de transición entre el segundo y el tercer estadio. Pero veremos a continuación cuál es la diferencia fundamental entre ambos.

El niño del tercer estadio, como el que finaliza el segundo, anticipa el criterio clasificatorio que va a utilizar y lo conserva a lo largo de la actividad clasificatoria, también puede clasificar con base en diferentes criterios (movilidad) y toma en cuenta todos los elementos del universo.

El logro fundamental del niño del estadio operatorio es que establece relaciones de inclusión, es decir, que ante la pregunta: "¿Qué hay más, triángulos o figuras?" responde que hay más figuras porque está considerando que los triángulos están incluidos en la clase de las figuras. Ha llegado a establecer en términos cuantitativos la relación parte (triángulos-todo (figuras)), dado que considera a los triángulos como elementos pertenecientes a un conjunto que es parte de la clase que lo abarca, de donde puede *deducir* que hay más elementos en la clase que en la subclase. Esto se da gracias a la coordinación *interiorizada* de la reunión y la disociación que en el segundo estadio realizaba en forma efectiva ya que no podía representarse la operación inversa para reconstruir el todo cuando estaba frente a las partes. Esa coordinación de la reunión y la disociación constituye la reversibilidad que caracteriza a la clasificación operatoria.

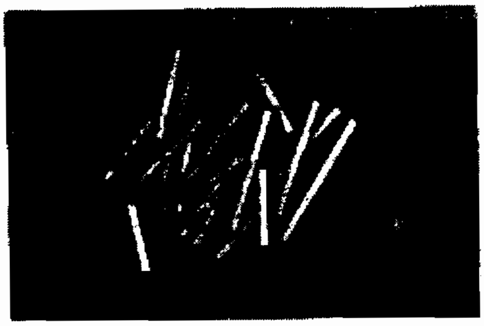
¿Por qué es fundamental la inclusión respecto al número? Porque el niño ya podrá considerar que en el cinco, por ejemplo, están incluidos el cuatro, el tres, el dos y el uno.

Psicogénesis de la seriación

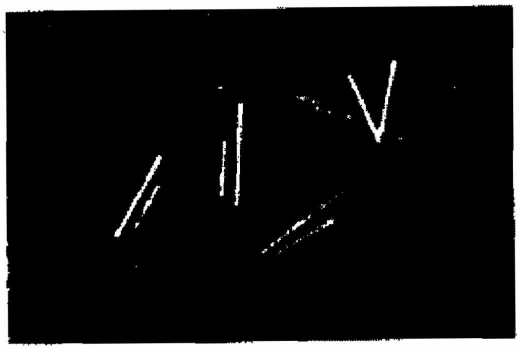
El proceso de construcción de la seriación atraviesa por tres estadios:

Primer estadio:	Hasta los 5-6 años aproximadamente.
Segundo estadio:	Desde los 5-6 años hasta los 7-8 años aproximadamente.
Tercer estadio (operatorio):	Desde los 7-8 años aproximadamente.

Para analizar los estadios de la seriación utilizaremos, a modo de ejemplo, un material constituido por diecinueve varillas cuya longitud varía medio centímetro de una a otra, midiendo seis centímetros la más pequeña. Si bien en un principio se le ofrecen al niño sólo diez de la diecinueve varillas de manera que tengan un centímetro de diferencia entre cada una, de acuerdo a las seriaciones realizadas por el niño se le ofrecen las nueve que van intercaladas en la primera serie.



Características del primer estadio de la seriación

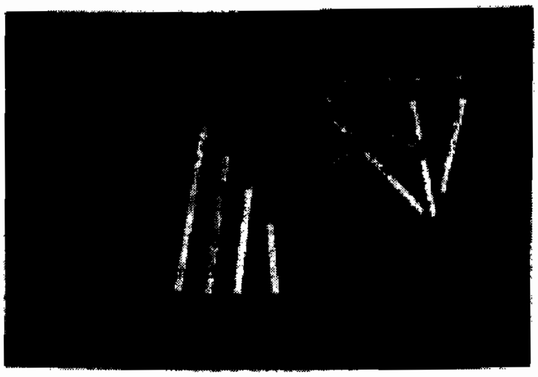


El niño que se encuentra en el inicio de este estadio al proponérsele que haga una seriación ("Ordena estas varillas de las más larga a la más corta o de la más corta a la más larga"), forma en un principio parejas donde cada elemento es perceptivamente muy diferente al otro. ¿Por qué el niño forma parejas? Porque está considerando los elementos en términos absolutos ("grande" y "chico"), no establece aún verdaderas relaciones y en ese sentido se puede decir que es una conducta seudo-clasificatoria: considera el universo de las varillas como las largas y las cortas. Luego el niño hace tríos en los que introduce una nueva categoría, la de las medianas, manejando entonces las categorías largas, medianas y cortas ("grande", "mediano" y "chico"). En ambos casos —parejas o tríos— le quedan sin seriar todas aquellas varillas que no puede incluir en estas categorías.

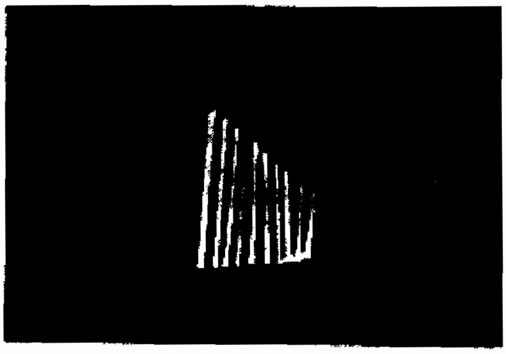
Más adelante seria cuatro o cinco elementos buscando formar "escaleritas" en un solo sentido —creciente o decreciente—, o en ambos sentidos, tomando en cuenta sólo uno de los extremos, designando los elementos como "grande", "mediano", "más mediano", "chico", "chiquito", etc., porque aunque se aproxima a ello, aún no establece relaciones.

Relacionar los elementos significa considerar un elemento en función de otro, y en el caso de las longitudes podría expresarse como "más largo que", "más corto que".

Al finalizar este estadio, en la transición hacia el segundo, el niño llega a considerar la línea de base. Al seriar longitudes uno de los extremos de cada elemento varía respecto a los restantes formando una "escalera" y el otro extremo de todos los elementos coincide, formando la línea de base. Esto se debe a que ya no se centra en uno de los extremos sino que considera la longitud total de los elementos, llegando así a seriar cuatro o cinco varillas.

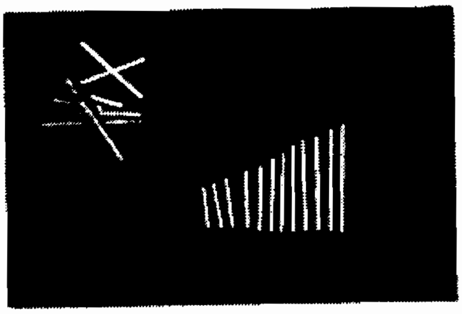


Características del segundo estadio de la seriación



El niño que está en este estadio puede construir la serie de diez varillas por tanteo, es decir que toma una primera varilla al azar, luego otra varilla cualquiera que compara con la primera, después una tercera varilla que compara con las dos anteriores para decidir dónde colocarla y así prosigue hasta seriar todas las varillas, respetando la línea de base.

¿Por qué realiza la serie por tanteo? Porque está comparando en forma efectiva el nuevo elemento con cada uno de los que ha colocado y necesita hacerlo dado que todavía no construyó la transitividad, no puede *deducir* que si un elemento es más grande o más pequeño que el último también lo es respecto a todos los anteriores y tiene que recurrir a la comprobación efectiva. Esto se evidencia también cuando le proponemos al niño una vez que ha construido su serie, agregar las nueve varillas que aún no le habíamos presentado. "...Ya efectuada una seriación el niño encuentra algunas dificultades sistemáticas en intercalar elementos nuevos, como si la hilera construida constituyera un conjunto rígido y cerrado en sí mismo".[4] Logra intercalar dos o tres varillas pero ante la dificultad de terminar la actividad por requerir comparar cada elemento con los ya seriados, prefiere desbaratar su serie y construirla nuevamente por tanteo, ahora con las diecinueve varillas.

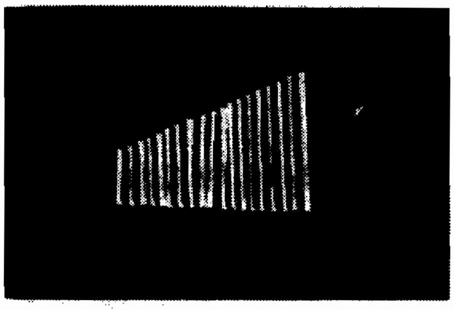


El niño del segundo estadio no puede intercalar las varillas porque la intercalación requiere tomar en cuenta simultáneamente dos relaciones recíprocas, que no es necesario considerar en el caso de la construcción de la serie.

El niño en este estadio aún no ha construido la reciprocidad que, como vimos en la Parte I, se expresa en la seriación a través de dos formas. Veamos cómo actúa el niño respecto a ambas:

— El niño puede *constatar* que si un elemento A es mayor que B, éste es menor que A, pero aún no puede *deducir* la inversión de la relación por no haber coordinado las dos relaciones recíprocas.
— Relaciona cada elemento con el anterior y con el elemento posterior de la serie pero lo hace en forma sucesiva puesto que no puede considerar que un elemento es más grande que otro y que *al mismo tiempo* es más pequeño que otro elemento.

Características del tercer estadio de la seriación



El método que utiliza el niño del tercer estadio para seriar es sistemático. Si hace una serie creciente toma, del conjunto de las diez varillas, la varilla más pequeña, luego la más pequeña de las que quedan y así sucesivamente; en el caso de hacer una serie decreciente el proceso es inverso: comienza por la varilla más grande.

¿Qué nos indica que el niño realice la serie de esta manera? Que puede anticipar la serie completa antes de hacerla porque ha construido la transitividad y la reciprocidad.

El niño es capaz ahora ya no solamente de establecer relaciones —como lo hacía en el estadio anterior— sino también de *componer* esas relaciones. Esto significa que si él ha establecido que A > B y B > C, puede deducir que la diferencia existente entre A y C es mayor ya que es igual a la suma de las dos diferencias establecidas previamente.

El niño ha construido la reciprocidad de las relaciones, lo cual se pone de manifiesto en que:

— Al invertirse el orden de la comparación, el niño invierte en forma deductiva la relación entre los elementos. Por ejemplo, cuando se le pide que construya la serie inversa después de haber logrado la directa, el niño del segundo estadio empieza de nuevo, como si se tratara de otra seriación totalmente diferente: las relaciones "menor que" y "mayor que" no son aún entendidas como inversas, sino como dos tipos diferentes de relaciones. El niño operatorio, en cambio, invertirá la serie en forma sistemática, sin deshacer la que ha construido originalmente, sino pasando el último al primer lugar, el penúltimo al segundo, etc.

Para decirlo con palabras de los niños: "Es lo mismo pero al revés", lo que expresa claramente que la reciprocidad —forma de reversibilidad característica de la seriación— resulta en una equivalencia: (A>B) = (B<A).

— Considera a cada elemento, al mismo tiempo, como más pequeño que algunos de los elementos de la serie y como más grandes que otros —los que lo suceden o los que lo anteceden, según la dirección en que estén seriados—. Por lo tanto logra, la intercalación de los nueve elementos suplementarios que se le proponen.

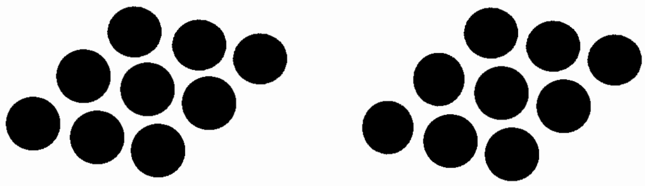
¿Por qué son fundamentales la reciprocidad y la transitividad respecto al número? Porque el niño podrá considerar que si el cinco es mayor que el cuatro, también es mayor que el tres, el dos y el uno, así como considerar que el cinco es mayor y menor al mismo tiempo (mayor que el cuatro y menor que el seis).

Psicogénesis de la correspondencia y la conservación de la cantidad[5]

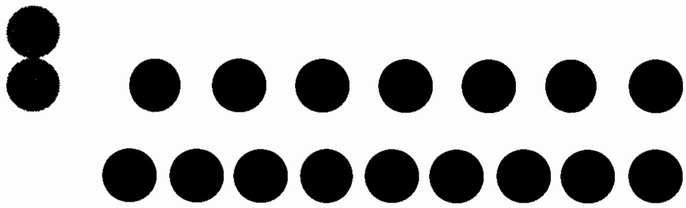
El proceso de construcción de la operación de correspondencia atraviesa por tres estadios:

Primer estadio:	hasta los 5-6 años aproximadamente.
Segundo estadio:	desde los 5-6- años a los 7-8 años aproximadamente.
Tercer estadio (operatorio):	a partir de los 7-8 años aproximadamente.

El material de los ejemplos que utilizamos está constituido por nueve fichas rojas y nueve azules.

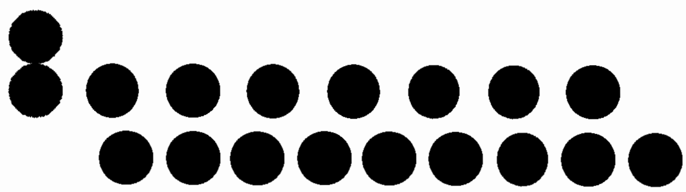


Características del primer estadio de la correspondencia



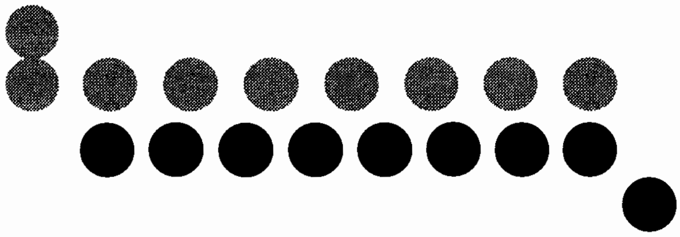
Cuando se le presenta al niño de este estadio una hilera de siete fichas rojas y se le propone a través de una consigna[6] que ponga la misma cantidad de fichas azules ("Pon igualito de fichas azules para que los dos tengamos lo mismo"), el niño de este estadio colocará tantas fichas azules como sea necesario para igualar la longitud de la hilera modelo de manera que la primera y la última ficha de ambas hileras coincidan, independientemente de la cantidad de fichas que necesite para hacerlo. ¿Por qué el niño lo hace así? Lo hace así porque considera las hileras como objetos totales centrándose en el espacio ocupado por los conjuntos y no en la cantidad de elementos, por lo tanto no establece la correspondencia biunívoca.

Si frente a este niño se juntan o separan las fichas de una de las hileras de manera que la longitud de ésta varíe, es decir al efectuar transformaciones espaciales en la ubicación de los elementos, él asegurará que ya no hay lo mismo y, al preguntarle qué habría que hacer para que hubiera igualito, propone quitar o agregar fichas para que las hileras queden nuevamente de la misma longitud,

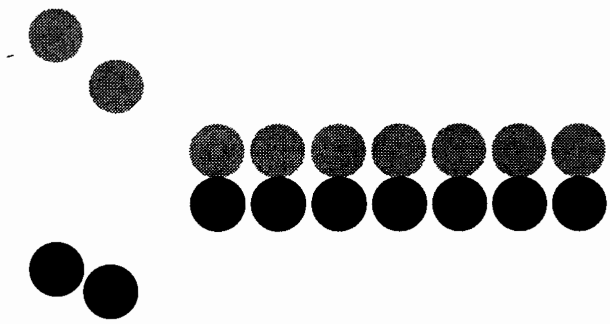


lo que para él es índice de que tienen la misma cantidad de elementos.

Como el niño está centrado en el resultado de la transformación que se ha efectuado y no en la acción de transformar —en este caso juntar— sugiere una nueva modificación (agregar o quitar elementos) que no está relacionada con la primera transformación pero que permite restablecer la igualdad de la longitud de las dos hileras.

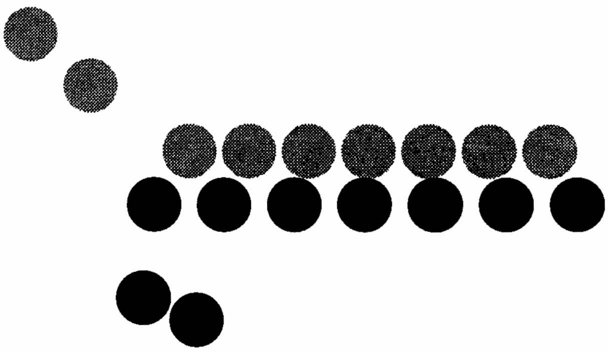


Características del segundo estadio de la correspondencia

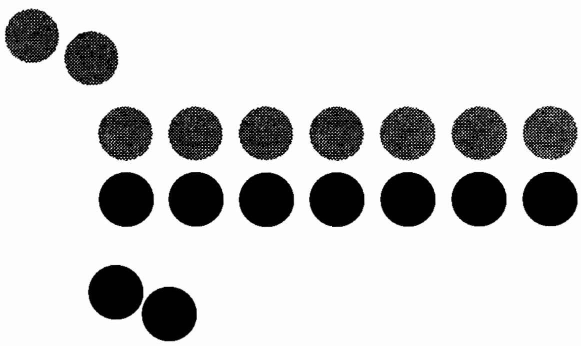


El niño en este estadio, a diferencia del estadio anterior, ya establece la correspondencia biunívoca ante la misma consigna. Al realizar su hilera de fichas busca que sea equivalente cuantitativamente a la del modelo. Para estar seguro que cada ficha de una hilera está en relación con cada ficha de la otra pone cada ficha azul exactamente debajo de cada ficha roja de manera que pueda observar fácilmente la correspondencia establecida; esto le permite afirmar que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.

Después que afirmó lo anterior y a partir de los dos conjuntos que puso en correspondencia, si se altera la disposición espacial de las fichas de uno de los conjuntos (juntándolas o separándolas), el niño dirá que ya no hay lo mismo sino que una de las hileras aumentó o disminuyó en cantidad. Afirma que ya no hay lo mismo porque aunque ya establece la correspondencia biunívoca, al dejar ésta de ser evidente perceptivamente se apoya nuevamente en la longitud de las hileras.

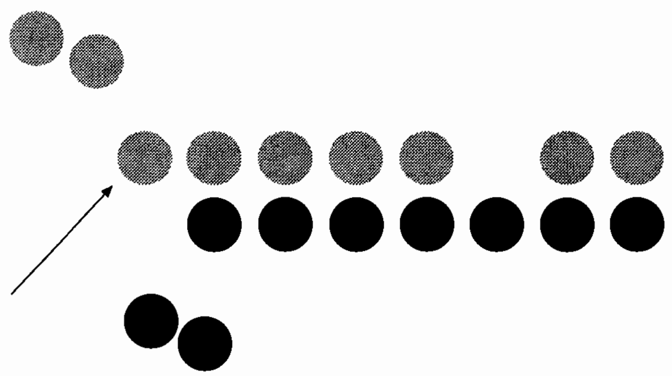


Cuando se le plantea cómo hay que hacer para que haya otra vez la misma cantidad de fichas en los dos conjuntos, vuelve a establecer la correspondencia biunívoca aproximando cada elemento de un conjunto con cada elemento del otro de manera que la correspondencia se perciba fácilmente. Esta forma de resolver la situación marca un avance respecto al primer estadio, ya que la acción que realiza para que la equivalencia sea visible nuevamente es la acción inversa a la que se efectuó en la primera transformación (si fueron separadas las vuelve a juntar, si fueron aproximadas las vuelve a separar) y no una acción ajena a ésta como en el estadio anterior en el que proponía quitar o agregar fichas. El niño de este estadio ante la imposibilidad de realizar en forma interiorizada la acción inversa necesita hacerla en forma efectiva.



Sin embargo esta posibilidad de invertir la acción para volver al punto de partida se da solamente en la práctica y aún no en forma interiorizada. Es por esto que, a pesar de que el niño ha descubierto ya una forma eficaz de establecer la equivalencia cuantitativa entre dos conjuntos, esta forma sólo es válida para garantizar la conservación de la cantidad en situaciones privilegiadas: cuando la correspondencia término a término entre los elementos de ambos conjuntos continúa siendo visible.

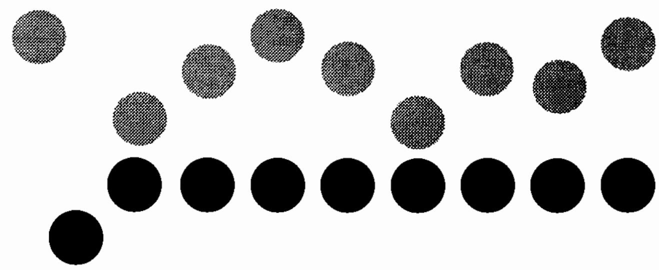
Es frecuente que en esta etapa conozca el niño el nombre de los números. ¿El hecho de que el niño pueda recitar la serie de los nombres de los números implica necesariamente que maneja el concepto de número? Aun cuando nos resulte sorprendente encontramos que los niños que saben decir cuántos elementos hay en cada conjunto, pero aún no han construido la conservación de la cantidad, hacen afirmaciones tales como: "En las dos hileras hay siete fichas pero en ésta (la hilera más larga) hay más porque esta ficha sobra".

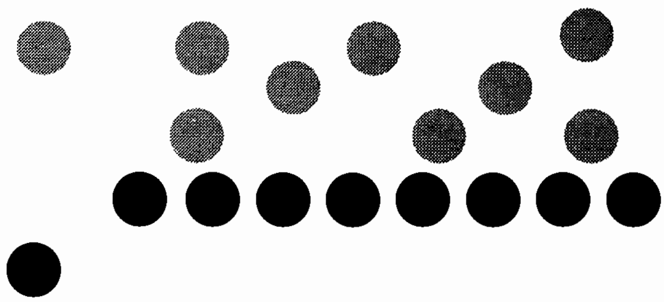


Los niños están estableciendo al contar, una correspondencia término a término entre la serie de los nombres de los números y un conjunto de elementos concretos. Por lo tanto, al elemento que nombran por ejemplo, en séptimo lugar, le corresponde el nombre "siete" pero no está claro aún para ellos que "siete" incluye también a todos los elementos contados anteriormente. En este momento la numeración verbal no implica la noción de conservación dado que para el niño puede haber sietes que tienen más y sietes que tienen menos. Puede decir que un siete es más que otro siete porque para él la palabra siete es solamente la etiqueta que le corresponde al séptimo elemento y no considera que el siete incluye a los seis elementos que están antes.

En cambio cuando el niño está en la transición hacia el tercer estadio contar los elementos de conjuntos equivalentes que tienen distinta distribución espacial lo lleva a entrar en contradicción con lo que él puede afirmar a partir de la longitud, ya que se pregunta cómo habiendo siete y siete puede haber más elementos en un conjunto que en el otro. La toma de conciencia de este conflicto contribuirá sustancialmente al avance hacia la conservación del número.

Características del tercer estadio de la correspondencia

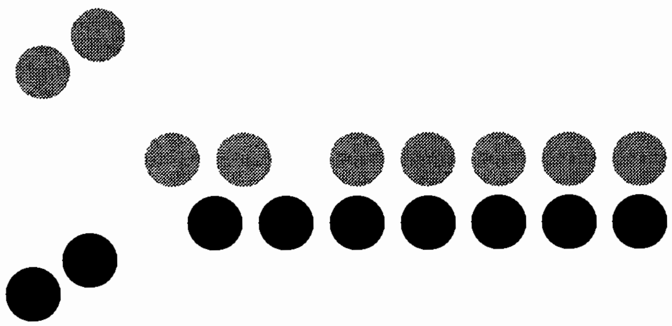




Al solicitarle al niño del estadio operatorio que tome tantos elementos como los de la hilera modelo, puede hacerlo como un niño del segundo estadio estableciendo la correspondencia término en forma visible, pero también, en algunos casos, escogiendo tantas fichas azules como fichas rojas le presentamos sin necesidad de colocar cada azul pegadita a cada roja.

Ante cualquier transformación que se efectúe en la disposición de los elementos de uno de los conjuntos sostiene la equivalencia numérica de los mismo, incluso si se le plantean contrasugerencias como: "A mí un niño me dijo ayer que si esta hilera era más larga tenía más fichas", el niño se muestra asombrado ante semejante idea y asegura la conservación de la equivalencia.

Los niños del tercer estadio afirman la conservación pero a veces no la argumentan aunque después pueden llegar a fundamentar por qué la cantidad se conserva, dando uno o varios de los siguientes argumentos: "Hay lo mismo porque no pusiste ni quitaste nada" o "Sigue habiendo igual, la hilera de las rojas es más larga porque las fichas están separadas y la de las azules es más cortita porque están juntitas" o "Hay lo mismo porque podemos volver a ponerlas como estaban antes".



¿Qué significan estos diferentes argumentos? En el primer caso el niño ya sabe que las dos únicas formas de alterar una cantidad discontinua son agregar o quitar elementos; en los estadios anteriores sabía que no se pudo ni se quitó elemento alguno pero como estaba centrado en los estados finales no tomaba en cuenta las acciones. En el segundo caso el niño compensa la mayor o menor longitud de cada hilera con los espacios existentes entre las fichas de cada conjunto: "Es más largo pero están más separadas". En el tercer caso se evidencia que toma en cuenta las acciones realizadas más que las configuraciones resultantes considerando esas acciones como inversas una de la otra en forma y eso es precisamente lo que le permite volver en forma interiorizada al punto de partida, sin necesidad de realizar efectivamente la acción inversa (si se alargó, acortar; si se acortó, alargar), para anular la transformación que se hizo. Llegado este momento podemos afirmar que el niño está en el estadio operatorio de la correspondencia y ha construido la noción de conservación de cantidades discontinuas.

¿Por qué es fundamental llegar a la correspondencia y a la conservación de la cantidad, respecto al número? Porque el niño podrá considerar que un conjunto de nueve elementos será equivalente a todos los conjuntos de nueve elementos, así como no equivalente a todos los conjuntos mayores o menores que nueve independientemente de la disposición espacial de sus elementos.

La operación de correspondencia representa una fusión de clasificación y seriación, ya que:

- Mientras se está clasificando con base en cualidades, la clasificación es una operación centrada en las semejanzas: los elementos se reúnen precisamente con base en los parecidos que guardan entre sí y se consideran equivalentes en función del criterio elegido, independientemente de sus diferencias.
- Mientras se está seriendo con base en criterios cualitativos, la seriación se centra en las diferencias, ya que consiste precisamente en ordenar esas diferencias.

Es decir que, en el terreno de lo cualitativo, clasificación y seriación se mantienen separadas. Pero cuando se trata de establecer equivalencia numérica entre dos conjuntos —es decir, cuando se prescinde de las cualidades— los elementos son considerados *al mismo tiempo* como equivalentes y como diferentes:

- Equivalentes, porque a cualquier elemento de un conjunto le puede corresponder cualquier elemento en el otro; son considerados como unidades intercambiables.
- Diferentes en el sentido de que pueden ordenarse: si, al establecer la correspondencia, se colocó la ficha B en el segundo lugar —es decir, entre la primera y la tercera— esa misma ficha no podrá ocupar ya otro lugar (salvo que se intercambie con otra).
  Dado que se hace abstracción de las cualidades, lo único que puede diferenciar cada unidad de las demás es el orden, es decir, la posición en que se coloca cada elemento. El único orden admitido es el que se establece en el acto mismo de establecer la correspondencia. Por lo tanto es una orden que varía de una situación a otra, pero que es necesario para que la correspondencia se lleve a cabo.[7]

Es en este sentido que puede decirse que la noción de número resulta de una síntesis de clasificación y seriación.

Notas de la lectura

1 Es necesario aclarar que cuando ordenamos las clases consideramos a un conjunto como representante de la clase a la cual pertenece, por ejemplo: al ordenar la clase del tres de previa a la clase cuatro, "tomamos" un conjunto cualquiera de tres elementos como representante de la clase, puesto que no necesitamos todos los conjuntos de tres elementos que existan en el universo, dado que todos ellos estarían previos a la clase de conjuntos de cuatro elementos.

2 Jean Piaget y Alina Szeminska. *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires, Guadalupe, 1975. p. 59.

3 El niño de este estadio no toma en cuenta las diferencias cuando clasifica, esto no implica que el niño no sea capaz de establecer diferencias en otras situaciones.

4 Jean Piaget y Alina Szeminska. *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires, Guadalupe, 1975. p. 177

5 En cuanto a la conservación de la cantidad nos referimos a las cantidades discontinuas, es decir formadas por elementos discretos, separables entre sí (lápices, flores, fichas, etc.), porque son los que atañen al concepto de número, a diferencia de las cantidades continuas que no pueden ser separadas en unidades (líquidos, gases, etc.).

6 Nos referimos con el término consigna a la instrucción u orden verbal que utiliza el maestro al organizar las actividades.

7 En efecto, si no se estableciera ningún orden, se correría el riego de considerar más de una vez algunos elementos, es decir, de que la correspondencia no se estableciera en forma biunívoca.

LECTURA: CONCEPTO DE NÚMERO. ASPECTO DIDÁCTICO*

PRESENTACIÓN

Partiendo de la idea de que los niños de preescolar están en un nivel de su construcción del concepto de número, es conveniente determinar en qué nivel o estadio se encuentran para diseñar estrategias didácticas que le ayuden a desarrollar sus posibilidades y a superar sus limitaciones.

De acuerdo con Lerner, no se trata de "enseñarle" (en sentido estricto) el concepto de número al niño, sino de diseñar situaciones que le permitan pasar de un nivel a otro, tomando en cuenta las características del estadio por el que atraviesa.

Para el diseño de tales situaciones Lerner propone tomar en cuenta elementos; el tipo de materiales, la consigna y las actividades.

Los materiales son de dos tipos, aquellos que son complementarios cualitativamente (p. ej. tazas y platos) y aquellos que son homogéneos cualitativamente (p. ej. dos conjuntos de botones). Los conjuntos deben tener por lo menos 6 o 7 elementos.

La consigna se encuentra en estrecha relación con los materiales. Por ejemplo, para los materiales que son complementarios cualitativamente, una consigna sería "pon una taza a cada plato". Para los materiales que son homogéneos cualitativamente; "haz con tus botones una fila que tenga igualito de botones que la mía, ni más ni menos".

Las actividades que propone Lerner se clasifican en situaciones que tienen que ver con la comparación de conjuntos (equivalentes, no equivalentes y utilizando tanto la correspondencia como la numeración hablada) y situaciones relacionadas con la correspondencia dinámica (intercambio) así como las referentes a la transitividad de la equivalencia numérica.

* Delia Lerner. "Concepto de número. Aspecto didáctico", en: *Clasificación, seriación y concepto de número.* Consejo Venezolano del niño, Venezuela, 1977 (división de primera y segunda infancia).

CONCEPTO DE NÚMERO

Aspecto didáctico

La orientación general del trabajo con el número es la misma que la correspondiente a la clasificación y la seriación: no se trata de "enseñarle" al niño el número, sabemos que todos los niños del jardín están en algún momento de su construcción espontánea de la noción de número, las características del estadio por el que están atravesando implican ciertas posibilidades de manejo de esta noción y también ciertas limitaciones. Será necesario por lo tanto en primer término que determinemos en qué estadio está cada niño y planteemos luego las situaciones adecuadas para ayudarlo a desarrollar sus posibilidades y —en los momentos de transición de un estadio a otro— a superar sus limitaciones. Sabemos que éstas no se superan por transmisión: verbal: si un niño nos dice que "hay más en la fila más larga", nada ganaremos con contestarle "Pero ¿cómo no te das cuenta de que hay igual? Yo no puse ninguno más". Mucho más útil será para él que registremos sus propias afirmaciones y le hagamos reflexionar sobre sus contradicciones (en el caso de que las haya) o sobre las que existen entre sus opiniones y las de otros niños a lo largo de cada situación. En algunos casos, de las contradicciones saldrá la luz: los niños que se centraban en una sola variable empezarán a considerar alternativamente las dos, los niños que se centraban en las dos, pero alternativamente, empezarán a coordinarlas, es decir a considerarlas simultáneamente. Pero en otros casos los niños no harán consciente la contradicción por más énfasis que pongamos en señalarla. Le propondremos entonces otro tipo de ejercicios o, simplemente, cambiaremos de tema por un tiempo hasta que su construcción espontánea le permita comprender los problemas que le planteamos.

Los materiales:

Trabajaremos en primer término con materiales complementarios cualitativamente, por ej., tazas y platos, pantalones y cinturones, perros y casillas, niños y chaquetas, niños y vasos, niños y cuadernos, etc.

En segundo término utilizaremos pares de conjuntos formados por material homogéneo cualitativamente, por ej.:

- dos conjuntos de caramelos (unos de menta, otros de café)
- dos conjuntos de botones (unos redondos, otros cuadrados)
- dos conjuntos de patitos, o cualquier otro elemento de plástico (unos de un color y otros de otro color)
- dos conjuntos de monedas, etc.

Cada uno de los conjuntos debe tener por lo menos 6 o 7 elementos, pues si son menos, el problema puede resolverse perceptivamente, sin apelar a la correspondencia.

La consigna:

Con el primer tipo de material las consignas serán en general del tipo: "¿alcanzan los... para los...? es decir, por ej., "Alcanzan los cuadernos para los niños?" Con el segundo tipo de material este tipo de consigna no puede utilizarse, ya que los elementos son homogéneos. Diremos entonces: "haz con tus botones una fila que tenga igualito de botones que la mía, ni más ni menos", o bien "estos caramelos son de Pablo y ésos de Pedro. ¿Los dos van a comer lo mismo o alguien va a comer más?"

Lo fundamental al dar la consigna es tener en cuenta que ésta se refiere a la cantidad de elementos. Las consignas del tipo "dale un vaso a cada niño" o "pon un cinturón en cada pantalón" son aconsejables exclusivamente en la primera etapa, cuando hemos comprobado que los niños no establecen aún espontáneamente la correspondencia para determinar la equivalencia. En este caso, puede ayudar a los niños a lograr la correspondencia. Pero, a partir del momento en que el niño establece espontáneamente la correspondencia, no tiene sentido darle ese tipo de consigna: el niño probablemente nos hará caso y le pondrá un cinturón a cada pantalón, pero se quedará sin saber para qué lo está haciendo, se le estará indicando la solución de un problema, sin decirle cuál es el problema. Si centramos en cambio la consigna en la averiguación de la equivalencia o no equivalencia numérica de dos conjuntos, el niño descubrirá la correspondencia como método para establecer dicha equivalencia. Comprenderá entonces el sentido de su actividad y encontrará por sí mismo la manera de resolver el problema que se le ha planteado.

Tipo de actividades

Las actividades que propondremos pueden clasificarse de la siguiente manera:

A. Comparación de conjuntos (equivalentes o no equivalentes), partiendo del establecimiento de la correspondencia óptica y sin utilizar la numeración hablada.

B. Comparación de conjuntos utilizando tanto la correspondencia como la numeración hablada.

C. Situaciones de correspondencia dinámica (intercambio).

D. Situaciones referentes a la transitividad de la equivalencia numérica.

E. Clasificación de conjuntos.

F. Seriación de conjuntos.

Haremos finalmente algunas reflexiones sobre la representación de la correspondencia.

A. Comparación de conjuntos (equivalentes o no equivalentes), partiendo del establecimiento de la correspondencia óptica, sin utilizar la numeración hablada.

El problema puede plantearse de tres maneras diferentes:

a. El maestro propone los dos conjuntos.
b. El maestro propone uno de los conjuntos y pide a los niños que formen el otro.
c. El maestro solicita a los niños que formen los dos conjuntos:

a. Dar dos conjuntos y preguntar: "¿alcanzan los... para los...?

   Proponer situaciones en que los conjuntos resulten equivalentes y otras en que no lo sean.

   En algunos casos se presentarán conjuntos que parezcan tener un número de elementos muy diferente, por ej.: una pila de bloques lógicos finos y otra de gruesos, una pila de hojas de papel y una pila de libros de cuentos. Se pedirá a los niños que, antes de establecer la correspondencia, estimen dónde habrá más o si hay igualito y justifiquen su previsión. Luego se establecerá la correspondencia y se pedirá que comparen su previsión con el resultado real. Esto ayudará a los niños a diferenciar la apariencia perceptiva del número de elementos.

b. Proponer uno solo de los conjuntos y pedir que se construya otro equivalente. Este tipo de ejercicios corresponde al estilo de las experiencias de Piaget citadas en el "Aspecto Psicológico". En este caso se debe disponer de más elementos de los que se piensa utilizar: por ej.: si trabajamos con caramelos, tendremos unos 15 caramelos de menta y 15 de café. Haremos una hilera de 7 caramelos de menta y pediremos al niño que haga con los de café una fila que tenga igualito de caramelos que la nuestra. Es importante que tanto nosotros como el niño dispongamos de más caramelos que los necesarios para hacer la hilera, por varios motivos.

1. Porque podremos ver si el niño coloca muchos más caramelos en lugar de colocar siete.
2. Porque puede ocurrir que efectuar la correspondencia con siete elementos sea demasiado fácil para el niño y nos veamos precisados a utilizar más.
3. Porque, en el curso de las transformaciones posteriores, el niño puede proponer agregar elementos en una u otra hilera para restablecer la igualdad.

c. Pedir al niño que forme dos conjuntos equivalentes o no equivalentes. En este caso el maestro no forma efectivamente los conjuntos, sino que simplemente alude a los elementos con los que el niño puede formarlos. Por ej.: "vas a formar un conjunto de pinceles y otro de hojas de papel, quiero que haya igualito de pinceles y de hojas". Los niños irán entonces al área de arte, buscarán los elementos necesarios y construirán los conjuntos. Por supuesto, esta situación tiene muchas respuestas "correctas", ya que los dos conjuntos a formar por el niño pueden tener 3 elementos, 10 o 15. El primer niño lo hará espontáneamente utilizando la cantidad de elementos que quiera, se podrá luego pedir a otro niño que trate de que los dos conjuntos sigan teniendo el mismo número, pero que en cada uno haya más (o menos) elementos. El interés de esto es que plantea el problema de agregar o sacar el mismo número de elementos de los dos conjuntos.
Otra derivación interesante de este tipo de ejercicio es pedir a dos niños diferentes que construyan dos conjuntos equivalentes (uno cada uno) en forma simultánea. La forma que encuentran los niños en general de resolver esto es ponerse de acuerdo en el ritmo con que van poniendo cada elemento, ya que, si uno lo hace más rápido que el otro, los conjuntos no resultarán equivalentes. Es frecuente que los niños no logren controlarse el ritmo y que los espectadores empiecen a gritar "Juan va más rápido, puso uno más". Algunos opinarán que pusieron igualito, otros que no. La única manera de zanjar la discusión será comprobarlo a través de una nueva correspondencia (por ej., apareando los elementos ya colocados). Es decir que de aquí puede resultar un doble ejercicio de correspondencia a través de una sola situación, además de que permite descubrir una manera diferente de establecer la correspondencia: controlar el ritmo de los movimientos en lugar de enfrentar los elementos o de colocarlos uno sobre otro.

Conducción de las actividades

1. Establecimiento de la correspondencia

En los tres tipos de situaciones citadas hasta ahora, el primer paso para los niños será encontrar la manera de determinar la equivalencia de los pares de conjuntos en cuestión. Es muy probable que los niños intenten en principio contar los elementos; como sabemos que el saber contar no implica el manejo del número y que la operación en la que se fundamenta la noción de número es la correspondencia, intentaremos en primer lugar que los niños encuentren otra manera de establecer la equivalencia, diremos por ej. "pero contar es muy fácil, eso ya sabemos hacerlo, tratemos de inventar otra manera de resolver este problema". En el caso (poco probable) de que los niños no encuentren otra manera, se continuará trabajando la situación de la manera en que lo sugeriremos luego, en las situaciones que incluyen la numeración hablada. (Es decir que en ningún caso nos conformaremos con que el niño cuente los elementos del conjunto propuesto, por ej., 7 y vaya luego a buscar 7 elementos para formar el otro conjunto, sino que, cuando el niño utilice la numeración, intentaremos poner en conflicto los datos que él extrae del "contar" con los que extrae de los indicios figurales).

Los niños de la primera etapa no serán capaces aún —como hemos visto— de establecer la correspondencia, sino que llenarán en general el espacio ocupado, sin colocar un elemento debajo de cada uno de los propuestos. En este caso, se puede sugerir al niño la solución, dándole una consigna referida más directamente al apareamiento: "Dale una chaqueta a cada niño" o "¿éste con cuál va?" (señalando el primer elemento del conjunto modelo) "¿y éste?". Otra posibilidad es reducir el número de elementos considerado, dejando, por ejemplo sólo el 4 y volver a darle la consigna. Si el niño está cerca de la segunda etapa, logrará por alguno de estos medios establecer la correspondencia. Si está al principio de la primera etapa, seguramente no lo logrará a pesar de todo. De todos modos, le preguntaremos si hay igualito de... que de..., si él está seguro de que hay igualito y por qué le parece que es así. Si el niño está seguro de que hay igualito (aunque esto no coincida con la realidad) se plantea el problema siguiente:

2. Transformaciones

Se puede alargar una de las hileras, juntar sus elementos, apilarlos, disponerlos en forma de figura cerrada (triángulo, círculo, etc.), formar con ellos un montón, etc. Se modifica cada vez una sola de las hileras, dejando la otra como testigo en la disposición original. Sólo se modifican las dos hileras al mismo tiempo cuando se quiere mostrar al niño una discrepancia muy evidente entre sus afirmaciones y la realidad. Por ejemplo, si el niño ha puesto 4 elementos en su hilera y dice que tiene igualito que en la otra hilera, en la cual hay 7 elementos, pueden juntarse los 4 elementos y separarse los 7 (o apilarse los dos conjuntos) y preguntarle si le parece que realmente hay igualito. En cada una de las situaciones planteadas se efectuarán dos o tres transformaciones sucesivas, haciendo después siempre las mismas preguntas. Es muy difícil decir en teoría cuáles son las transformaciones que deben elegirse en cada caso, pues esto depende enormemente de las respuestas de cada niño. La idea general que guía la elección de las transformaciones y de las preguntas a hacer es que el rol del maestro en este caso es hacer que el niño tome conciencia de las contradicciones que implican algunas de sus afirmaciones. Por ejemplo; si uno ha alargado una de las hileras y el niño dice que hay más en la más larga, tal vez la transformación siguiente podría ser volver a alargar, pero esta vez la hilera que ha quedado antes más corta. Si el niño persiste en decir que hay más elementos en la más larga, se le hace notar que antes él había dicho que había más elementos en la otra. Puede ocurrir que el niño se dé cuenta de que es muy raro que hay en un caso más en una hilera y en el otro caso más en la otra y que proponga entonces volver a la correspondencia óptica, pero también puede ocurrir que el niño no se desconcierte en absoluto y que le parezca totalmente normal esa situación que es para nosotros tan extraña. Haremos entonces otra transformación, por ejemplo juntaremos los elementos de una de las hileras. Puede ocurrir que el mismo niño nos diga ahora que "hay más en la hilera más apretada". Le diremos entonces "pero antes me dijiste que había más en la más larga, ahora me dices que hay más en la más apretada, ¿cómo es esto?" De nuevo el niño podrá captar o no el conflicto. Puede decirse en términos generales que la mayor conciencia con respecto al conflicto producido por afirmaciones contradictorias corresponde a un avance mayor dentro de la segunda etapa, ya que es la superación de ese conflicto, por coordinación de las variables en juego, la que llevará a la conservación. Pero para superar la contradicción, hay que ser consciente de que se está incurriendo en una contradicción. Los niños de principios de la primera etapa no son en absoluto conscientes de ella.

El trabajo en pequeños grupos colaborará también a que surjan estas contradicciones: si un mismo niño no se contradice, es posible que diferentes niños tengan opiniones diferentes, algunos dirán que hay más en la más larga, otros dirán que hay más en la más densa. Dejémoslos discutir.

Otra manera de generar el conflicto es que el maestro mismo haga contra-sugestiones, que pueden ser positivas o negativas. Por ejemplo, un niño dice "hay más en las que están apiladas, porque llega más alto". El maestro contesta: "¿sabes que un niño me dijo el otro día que había más en las que no están apiladas, porque forman una hilera mucho más larga?". Esta es una contra-sugestión "positiva" porque está dirigida a que el niño, que estaba centrado en una sola variable (el alto de la pila) llegue a tomar en cuenta la otra variable en juego (la longitud de la hilera). Ahora bien, supongamos que, ante una transformación cualquiera el niño nos dice "hay igualito porque lo único que hiciste es juntarlas". Podemos entonces contestarle: "un niño me dijo el otro día que había más aquí, porque esta hilera es más larga". Esta es una contra-sugestión "negativa": la primera respuesta del niño puede habernos llevado a pensar que ya conserva el número. Nuestra contra-sugestión lo lleva para atrás, lo que queremos saber es si su conservación resiste o no a las propuestas en contrario. Puede ocurrir que el niño nos conteste: "uy, es verdad, me equivoqué" o bien que se ría y diga "¿qué tiene que ver que sea más larga? no agregaste ni sacaste nada". En el primer caso deduciremos que está cerca de la conservación pero que ésta aún no se ha consolidado, en el segundo concluiremos que su conservación del número está ya construida dado que puede resistir a las sugestiones en contrario.

3. Después de cada transformación

—y en el caso de que el niño afirme que no hay igualito— se pregunta: "¿Qué habría que hacer para que haya igualito?" La respuesta a esta pregunta nos orientará también sobre la etapa por la que está atravesando el niño ya que, como hemos visto, los niños de la primera etapa suelen proponer que se agreguen o se saquen elementos para restablecer la longitud inicial, en tanto que los niños de la segunda etapa proponen volver a ponerlos como antes, es decir cuando estaban en correspondencia óptica. En este último caso se puede retomar lo dicho por el niño y preguntarle: "¿quiere decir que cuando están así hay igualito y cuando están así (se repite la transformación realizada) hay más en ésta?". Puede ser que el niño responda tranquilamente que sí, que en una disposición hay igualito y en la otra hay más; también puede ocurrir que el niño empiece a dudar y no sepa qué contestarnos, o bien que nos diga que antes se había equivocado y que en realidad hay igualito en los dos casos. La segunda y la tercera respuestas citadas nos revelan que el niño está avanzando dentro de la segunda etapa. La tercera, si bien puede ser una respuesta de transición, no debe hacernos pensar que el niño ha llegado a la conservación, pues bien podría ocurrir que cuando hagamos la transformación siguiente el niño vuelva a decirnos que hay más en una que en las dos hileras.

Variantes de las situaciones de tipo A (comparación de conjuntos)

En algunos casos se puede introducir un paso suplementario:

Una vez que el niño ha efectuado la correspondencia, se le pide que guarde su colección en una caja (cerrada y opaca) y la otra colección en otra caja de las mismas características. Hecho esto, se le pregunta si en las dos cajas hay, por ejemplo, igualito de caramelos o si en alguna hay más. El objetivo de esto es tener un elemento más de discusión: en la segunda etapa es muy probable que los niños afirmen la equivalencia cuando los elementos están guardados en las cajas, pero la niegue luego, cuando se espacien o junten los elementos puestos en correspondencia. Se le hará notar entonces la contradicción entre ambas afirmaciones.

Experiencias en las que las transformaciones son descompuestas en pasos: estas situaciones incluyen un aprendizaje del significado de las transformaciones, ya que será el niño mismo quien las realizará y ya no en forma global, sino a través de pasos bien definidos. Por ejemplo, una vez dispuestos los elementos en correspondencia óptica, se pide al niño que saque el primer elemento. Se le pregunta si hay igualito y qué habría que hacer para que hubiera igualito. En este caso, todos los niños, a partir de la segunda etapa, contestan que no hay igualito, porque se ha sacado uno de la hilera. Cuando sugieren volver a poner ese elemento, se les pide que lo coloquen al final, es decir que la configuración quedará así:

0 0 0 0 0 0 0
   X X X X X X X

Luego se vuelve a preguntar si hay igualito. Puede hacerse lo mismo con el segundo y el tercer elemento:

0 0 0 0 0 0 0
      X X X X X X X

La intención de estos ejercicios es que los niños del segundo estadio tomen conciencia de que una transformación espacial que provoca que haya más elementos de un lado, implica necesariamente que se sacaron elementos de otro sector de la hilera.

Una variante de esto sería que los elementos sean sacados del centro de la hilera y colocados sucesivamente en los extremos, es decir que, si partimos de la correspondencia óptica, sacaremos por ejemplo, el segundo elemento de una de las hileras y lo colocaremos antes del primero, luego sacaremos el penúltimo elemento y lo colocaremos después del último. Dibujamos a continuación las configuraciones sucesivas que tendríamos. La importancia de estas situaciones es la siguiente: cuando realizábamos las transformaciones características de las situaciones anteriores, lo evidente para el niño parecía ser que "la hilera era más larga" o que "los elementos están más juntos".

Correspondencia óptica:

   0 0 0 0 0 0 0
   X X X X X X X

   0 0 0 0 0 0 0
X X   X X X   X X

El niño se centraba en una de las variables y además no tenía en cuenta las transformaciones mismas, sino los resultados que éstas producían en las configuraciones. Las situaciones que acabamos de describir constituyen un esfuerzo, por una parte, para lograr que el niño se centre en las transformaciones y no en los resultados (puesto que se le hace participar de la realización de la transformación) y, por otra parte, para lograr que él descomponga las transformaciones en una acción directa y una acción inversa. Cuando los niños del segundo estadio dicen que "hay más en la más larga", están considerando la acción de alargar como irreversible: por una parte no se dan cuenta de que esa acción de alargar puede ser anulada por una acción de volver a juntar y, por otro lado, no ven que, al alargarse la hilera, su densidad disminuye, ya que los intervalos entre los elementos son mayores. En las situaciones que acabamos de describir los niños empiezan por disminuir la densidad, ya que lo primero que se les pide es que saquen un elemento. Cuando, una vez sacado, se les pregunta si hay igualito, los niños dirán sin duda que hay más en la otra hilera porque, al sacar el elemento, quedó un lugar vacío. Es decir que "empezarán"por tomar conciencia de la disminución de la densidad. Por lo tanto, cuando vuelva a colocar el elemento en el extremo de la hilera, obteniendo como resultado una longitud mayor, será más probable que comprenda que esa longitud mayor está en relación con la disminución de la densidad que él mismo acaba de provocar y, por lo tanto, coordine —al menos en esta situación— las dos variables en juego, lo cual le permitirá afirmar la conservación. Será de gran interés volver a hacer —después de varios de estos ejercicios— los anteriores, en los que las transformaciones no están descompuestas, para ver si se ha producido algún progreso en las respuestas que los niños encuentran.

B. Comparación de conjuntos utilizando tanto la correspondencia como la numeración hablada

a. Partiendo de dos conjuntos equivalentes:

1. Al igual que en los ejercicios anteriores, se comienza disponiendo 7 fichas (caramelos, botones, etc.). Se pide al niño que haga debajo otra hilera con las suyas, de modo que haya igualito de fichas.
2. Se efectúa una transformación. La que suele ser muy fructífera en este caso es la que consiste en desplazar la hilera de abajo, de tal modo que la primera ficha siga coincidiendo con la primera de la otra, las siguientes estén ligeramente corridas, la penúltima de abajo coincidirá con la penúltima de arriba y la última de abajo sobresaldrá:

```
0    0    0    0    0    0    0
X     X    X    X    X    X     X
```

   Se pregunta entonces "¿Y ahora, hay más rojos o más blancos?" "¿Por qué?"
3. Si el niño dice que hay más abajo, se pregunta cuántos más.
4. Se plantea: "¿cuántas fichas hay en la hilera de arriba?" "¿Cómo podrías hacer para saberlo?" "Cuéntalas".
5. Se tapa la fila de abajo y se solicita al niño que adivine cuántas hay abajo.
6. En caso de haber contradicción entre la previsión numérica y la afirmación con respecto a la cantidad, se hace notar esa contradicción. Por ejemplo, puede ocurrir que el niño haya dicho que hay más en la de abajo "porque el último no tiene compañero" y que, sin embargo, habiendo contado los siete elementos de la hilera de arriba prevea que en la de abajo también hay siete. Se le dirá entonces: "Pero antes me dijiste que había más abajo. Ahora dices que en los dos hay siete. ¿Cómo es esto?"
7. Se le pide que cuente los elementos de abajo (para estar seguro de que efectivamente hay siete, por ejemplo).
8. Se le pide que recuerde cuántos había arriba y cuántos abajo y se vuelve a preguntar si hay igualito o si en alguna parte hay más.

b. Partiendo de dos conjuntos no equivalentes:

1. El maestro alinea ocho fichas blancas y luego pone en correspondencia óptica con ellas siete fichas rojas.
2. Se pregunta si en las dos hileras hay igualito o en alguna hay más.
3. Se pide al niño que cuente las rojas (o sea la hilera de siete elementos).
4. Se le pide que adivine, sin contar, cuántas fichas blancas hay.
5. Se juntan las fichas blancas (ocho), de tal modo que "sobre" una ficha roja en cada extremo de la hilera. Se vuelve a preguntar entonces si hay igualito o si en alguna de las hileras hay más.
6. En el caso de que el niño conteste que hay más rojas, se le recuerda que antes (al contar) dijo que había más blancas.
7. Se pide nuevamente que cuente uno de los conjuntos y prevea cuántos elementos hay en el otro.
8. Finalmente, se le pide que cuente cuidadosamente ambos conjuntos y se le pregunta si hay igualito o no.

Este tipo de ejercicios puede realizarse aprovechando cualquier desigualdad que los niños hayan encontrado al poner en correspondencia dos conjuntos.

C. Situaciones de correspondencia dinámica (intercambio) empleando o no la numeración hablada.

La particularidad de estas situaciones es que, antes de disponer los elementos en una configuración determinada, se realiza un intercambio uno a uno de elementos:

a. "Trueque". Este puede realizarse con cualquier material que los niños tengan por costumbre intercambiar. Daremos un ejemplo: se trabaja con dos conjuntos de diez a doce figuritas. La maestra plantea que tiene algunas figuritas de mariposas repetidas y que quiere cambiarlas por figuritas de "el Chavo" para poder completar su álbum. Muestra las figuritas repetidas (por ejemplo siete) y le dice al niño: "¿Por cuál puedes cambiarme éstas?" hasta intercambiar todas, de modo que del lado de la maestra quede un montoncito con siete figuritas de "el Chavo" y del lado del niño el montoncito con siete figuritas de mariposas. Luego pregunta: "¿Hay igualito de figuritas en los dos montoncitos, o en alguno hay más?" Algunos niños dirán que no lo saben. Se les pedirá entonces que piensen cómo puden hacer para saberlo (sin contar). En el caso de que los niños digan que hay igualito se les pide que nos lo demuestren. Los niños establecerán entonces la correspondencia óptica (en los dos casos). Efectuaremos luego transformaciones siguiendo el modelo de los ejercicios anteriores.

b. "Venta". La situación es similar a la anterior, sólo que en este caso uno de los conjuntos está constituido por monedas de un bolívar y el otro por un conjunto de elementos cualesquiera que sean comprables con monedas de un bolívar (chocolate, jugueticos, cachitos, tarjetas). Se dice que se va a jugar al vendedor, se le dan al niño las monedas de un bolívar y se le pide que vaya eligiendo (y pagando) los jugueticos que quiera. Terminado el intercambio se continúa de la misma manera que en los ejercicios de trueque.

c. Estos dos tipos de ejercicios (a y b) pueden realizarse también utilizando la numeración hablada. La diferencia con la formulación anterior será entonces que el niño contará las figuritas del maestro y preverá cuántas figuritas suyas tendrá que ir a buscar para intercambiarlas o bien —en los ejercicios de venta— contará cuántos bolívares tiene y preverá cuántos juguetes podrá comprar. Una vez efectuada la previsión en función del número, se realizará efectivamente el intercambio y la experiencia continuará de la misma manera que las anteriores, pero utilizando el número para contraponerlo a las afirmaciones que estén basadas en la apariencia perceptiva. Por ejemplo, puede ocurrir que el niño haya contado siete bolívares y previsto en consecuencia que podrá comprar siete juguetes. Sin embargo, cuando se le deforma la configuración, el niño puede decir que hay más monedas porque la fila de los juguetes es más corta. Uno podrá plantearle entonces: "pero ¿cuántas monedas me dijiste que había?" y "¿cuántos juguetes?". "Entonces "cómo es esto?, ¿hay siete y siete pero hay más monedas?, explícame". Puede ocurrir que el niño siga afirmando lo mismo que antes, pero también puede ocurrir que empiece a ver la contradicción.

D. Situaciones referentes a la transitividad de la equivalencia numérica.

Material: tres conjuntos de quince elementos cada uno, por ejemplo:
un conjunto de fichas
un conjunto de ladrillitos
un conjunto de botones

a. La transitividad en base a la correspondencia óptica:

1. Se comparan en primer término dos de esos conjuntos, por ejemplo:
   • el maestro hace una hilera con nueve fichas y pide al niño que coloque igualito de caramelos que de fichas
   • una vez establecida la correspondencia, se pregunta al niño si está seguro de que hay igualito o si necesita alguna ficha más.
2. Se amontonan los caramelos puestos por el niño, se los coloca lejos, sobre una mesa y se pide que ahora haga con los ladrillitos una hilera donde haya igualito de ladrillos que de fichas. Una vez establecida la correspondencia, se le pregunta si está seguro de hay igualito.
3. Se le pregunta si él cree que hay igualito de ladrillitos que de caramelos o si hay más ladrillos o más caramelos.

b. La transitividad después de realizadas transformaciones sobre la configuración:

1. Se desarrolla de la misma manera que en el punto a.
2. Se efectúa una transformación (se juntan o espacian los elementos, se apilan, etc.) sobre la hilera hecha por el niño y se pregunta si sigue habiendo igualito o si ahora hay más en alguna de las hileras.
3. Se desarrolla de la misma manera que el punto 2 del ejercicio a.
4. Se efectúa una transformación sobre la hilera de ladrillitos y se pregunta si hay igualito de fichas que de ladrillos.
5. Se colocan los ladrillitos en una caja y los caramelos en otra (o bien se hace un montoncito con cada uno de esos conjuntos) y se pregunta si hay o no el mismo número de ladrillos y de caramelos.

   Hacemos notar que, tanto en el ejercicio a como en el b, el último punto se refiere al establecimiento de la equivalencia entre dos conjuntos que no han sido efectivamente comparados a través de la correspondencia término a término: el niño ha comparado el conjunto de las fichas con el de los caramelos y el conjunto de las fichas con el de los ladrillos y de allí deducirá (sin hacerla realmente) una comparación entre los caramelos y los ladrillitos. Si llamamos A al conjunto de las fichas, B al de los caramelos y C al de los ladrillitos, diremos que el niño ha establecido, por correspondencia, que A = B y que A = C. De la combinación de estas dos comparaciones deducirá que B = C.

Una variante de estos ejercicios sería hacer comparar por correspondencia A y B, luego B y C y finalmente preguntar, sin comparación efectiva, si A es o no igual a C. Es muy probable que los niños del segundo estadio respondan mejor a la situación a. que a la situación b., ya que en la situación b. no lograrán siquiera afirmar la igualdad cuando una de las hileras está transformada, pero será válido de todos modos plantearles el problema y dejarlos discutir y, en caso de que algunos afirmen la equivalencia numérica y otros no, permitirles verificar a través del establecimiento de la correspondencia.

E. Clasificación de conjuntos en base a la propiedad numérica.

a. Formar muchos conjuntos equivalentes a uno dado:

Los primeros ejercicios de este tipo se harán con conjuntos de muchos elementos (ocho elementos o más) para que los niños se vean obligados a utilizar la correspondencia término a término al formarlos. Luego se trabajará con conjuntos de pocos elementos: dos, tres, etc.

El trabajo con conjuntos de pocos elementos puede comenzarse con una actividad colectiva, en la que la maestra forme un conjunto de, por ejemplo, cuatro elementos, pida a un niño que forme otro que tenga el mismo número de elementos (es decir que se "parezca" al conjunto formado en el número de elementos). Luego se pedirá a otro niño que forme otro conjunto que se parezca a los dos ya formados en lo mismo y finalmente, se pedirá a todos los niños que formen todos los conjuntos posibles que tengan el mismo número de elementos que los anteriores. El aula empezará seguramente a "llenarse" con conjuntos de cuatro elementos. Es importante que los niños continúen formándolos hasta que comprendan:

1. Que podrían seguir indefinidamente formando conjuntos de cuatro elementos, lo cual constituirá una aproximación intuitiva al hecho de que el número cuatro puede ser representado por infinitos conjuntos de cuatro elementos.
2. Que, cuando lo que a uno le interesa es la propiedad numérica de los conjuntos, no importan —es decir, pueden abstraerse— las propiedades cualitativas de los conjuntos y de los elementos:

Al principio los niños formarán seguramente conjuntos con materiales similares a los utilizados por la maestra para el primer conjunto. Si éste estaba formado por libros, es posible que, cuando se acaben los libros del aula, los niños crean que ya no se puede seguir formando conjuntos. Si ocurre esto, la maestra preguntará si están seguros de que no se puede seguir "¿En qué se parecen estos conjuntos?" "¿Les parece que se puede formar algún otro que tenga 4 elementos?" En caso de que a ningún niño se le ocurra (lo que no es probable), la maestra formará, por ejemplo un conjunto de 4 gises y preguntará si ese conjunto se parece a los anteriores. Seguramente lo niños comprenderán entonces que no es necesario que sean libros, puesto que lo que ahora importa es que se parezcan en el número. Empezarán entonces a formar conjuntos con elementos diversos del aula.

Hasta este momento, los conjuntos seran de todos modos homogéneos, es decir que cada conjunto estará formado por elementos pertenecientes a la misma clase. Si no surge espontáneamente, la maestra puede formar un conjunto constituido, por ejemplo, por una silla, un niño, un lápiz y un libro y preguntar si ella puede formar ese conjunto y decir que se parece a los anteriores. En el caso de que algún niño lo haya hecho espontáneamente, se analizará también la situación. Los niños verán entonces que, cuando se trata de formar conjuntos que se parezcan entre sí, lo único necesario que los conjuntos tengan 4 elementos. Se podrá plantear el problema siguiente: "¿Cómo vamos a llamar a este conjunto?" Se verá entonces que una posibilidad es decir que es un conjunto de 4 cosas y otra posibilidad es decir que se trata de un conjunto constituido por "una silla, un lápiz, un niño y un libro". Es decir que en este caso sólo se puede definir al conjunto por extensión (nombrando todos y cada uno de los elementos que lo componen) ya que, como los elementos no se parecen entre sí, no se puede encontrar una definición por comprensión. Este problema no se nos había presentado antes, mientras clasificábamos a los elementos en base a propiedades cualitativas comunes, se nos presenta sólo cuando clasificamos los conjuntos en base a la propiedad numérica.

Este tipo de ejercicio puede repetirse con uno o dos números más, o sea formando conjuntos equivalentes de 3 o 5 elementos, hasta que estemos seguros de que los niños han comprendido los dos aspectos a los que acabamos de aludir.

b) Formar "familias" (o clases) de conjuntos:

La maestra formará varios conjuntos de 3 elementos, varios de 5 elementos, varios de 2, varios de 4, cuidando de que los conjuntos que tienen el mismo cardinal no queden cerca unos de otros. Se pedirá a los niños que "pongan juntos los elementos que se parecen". Los niños formarán así en un sitio la familia de los conjuntos de 4 elementos, en otro sitio la familia de los conjuntos de 3 elementos, etc. Se preguntará si en cada familia podría colocarse algún conjunto más. Los niños darán (verbalmente) ejemplos de otros conjuntos que podrían incluirse en cada familia, hasta que esté claro que, como dijo un niño, "todo el mundo" podría organizarse en conjuntos de 2, 3 o 5 elementos.

c) Transformar conjuntos pertenecientes a una familia en conjuntos pertenecientes a otra familia:

Esta situación puede plantearse a partir de la anterior, o bien puede empezarse pidiendo a los niños que formen una familia de conjuntos de 3 elementos, otra familia de conjuntos de 5 elementos, otra familia de 4, etc. (por ejemplo, que queden formadas las "familias de conjuntos" de 2, 3, 4 y 5 elementos).

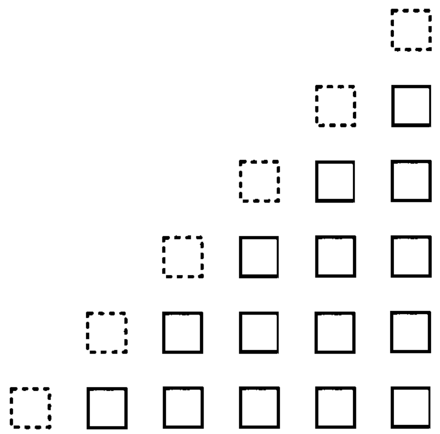
Se elegirá entonces a un niño que funcionará como "operador". Recordemos que en la tesis sobre clasificación hemos utilizado ya la noción de operador, en las situaciones de reunión y disociación de conjuntos. El operador es el que introduce una modificación sobre un conjunto dado. En este caso la modificación que introducirá será agregar un elemento en uno de los conjuntos de una familia determinada. Por ejemplo, se le pedirá: "vas a agregar un elemento en uno de los conjuntos de la familia de 3 elementos". El niño lo hará y luego se preguntará: "¿Qué ocurrió con este conjunto?" "¿Sigue perteneciendo a esa familia?" Los niños verán que ese conjuntos ya no se parece en la propiedad numérica a los otros de la misma familia. "¿Qué haremos entonces con él?" Sin duda los niños propondrán pasarlo a la familia a la que debe pertenecer ahora, es decir a la familia de los conjuntos de 4 elementos. Se repetirá esta situación partiendo de las distintas familias de conjuntos formadas y se verá que, en todos los casos, al actuar el operador "agregar un elemento", el conjunto sobre el cual actuó pasa a pertenecer a otra familia.

Luego se hará lo mismo con el operador "sacar un elemento". Finalmente se aplicarán sucesivamente los operadores "agregar 1" y "sacar 1", de la siguiente manera: supongamos que los niños agregan un elemento en uno de los conjuntos de la familia "2". Ese conjunto pasará a pertenecer a la familia "3". Se pedirá entonces al niño que representa al operador "sacar 1" que saque un elemento de uno de los conjuntos de la familia "3". Se verá entonces que ese conjunto pasa a pertenecer a la familia "2". El objetivo perseguido es que los niños comprendan que el operador "sacar 1" tiene un efecto exactamente contrario al del operador "agregar 1". Se hará esto varias veces, partiendo cada vez de una familia de conjuntos diferente, empezando a veces por el operador "agregar 1" y otras veces por el operador "sacar 1". Se reproducirá todo el trabajo realizado con estos operadores, pero utilizando "agregar dos elementos" y "sacar dos elementos".

F. Seriación de conjuntos

a) Formar conjuntos agregando un elemento cada vez:

La maestra comenzará formando un conjunto de dos elementos, luego formará al lado un conjunto equivalente y le pedirá a un niño que agregue un elemento, luego formará con conjunto equivalente al anterior y le pedirá a un niño que agregue un elemento, luego pedirá a los niños que continúen haciendo lo mismo. Mostramos el resultado de esto en el dibujo siguiente: Es importante que los niños entiendan que se trata, cada vez, de formar un conjunto equivalente al anterior y agregar luego un elemento, es decir que cada conjunto tendrá un elemento más que el anterior. Se señalará luego el primer conjunto de la serie, se preguntará cuántos elementos tiene y se pedirá a los niños que prevean cuántos elementos tiene el siguiente, que comprueben si su previsión es acertada y prevean cuántos elementos tiene el siguiente, y así sucesivamente hasta terminar la serie. Luego se hará lo mismo, pero empezando por el último conjunto de la serie y pidiendo que prevean cuántos elementos tiene el anterior. Si esto ocasiona dificultades, se puede construir otra serie, empezando esta vez por ejemplo por un conjunto de 7 elementos, formando otro conjunto equivalente y sacándole un elemento y así sucesivamente, hasta llegar a formar



el conjunto de un elemento. Será entonces sobre esta serie que se preguntará —después de enumerar un conjunto dado— cuántos elementos tendrán el siguiente y el anterior. Esto se hará primero en forma ordenada, luego salteando conjuntos.

b) Ordenar conjuntos, en forma creciente y decreciente:

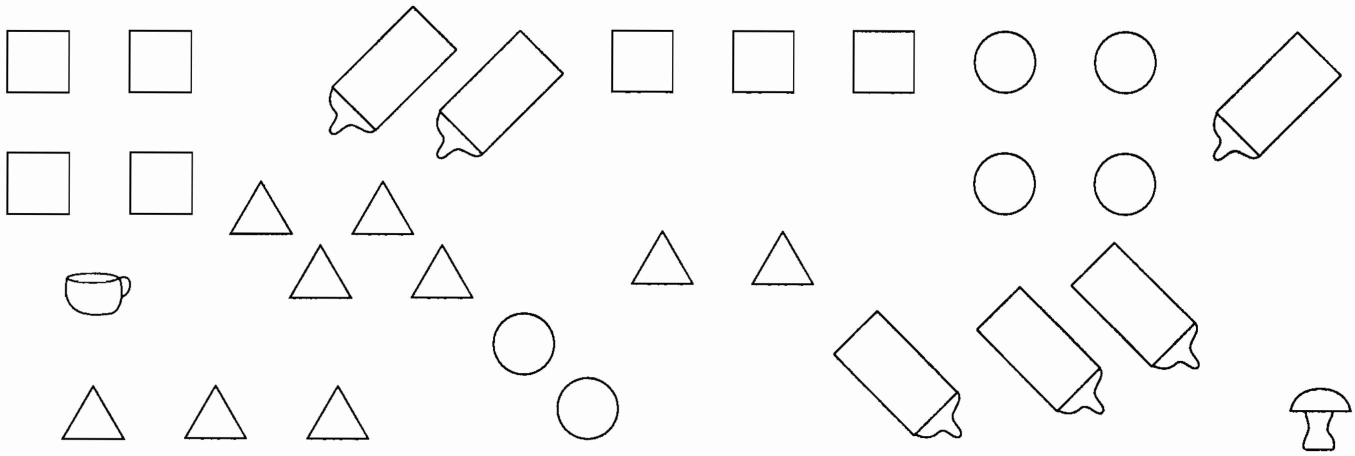
Se presentará un conjunto de 6 elementos, otro de 4, otro de 7, otro de 1, etc. (de modo que representen todos los números del 1 al 7), en forma desordenada. Se pedirá a los niños que los ordenen desde el que tiene menos elementos hasta el que tiene más elementos. Realizado el ordenamiento, se harán preguntas del siguiente tipo: "¿Qué habría que hacer para que éste (el de 1 elemento) tenga igualito de elementos que éste (el de 2)?" Y así sucesivamente, señalando (primero en forma ordenada y luego salteando conjuntos) cada conjunto de la serie y el siguiente. Luego se deshará la serie de conjuntos y se les pedirá que vuelvan a ordenarlos, pero esta vez de mayor a menor. Se efectuará entonces el mismo trabajo que antes: "¿Qué habría que hacer para que éste (el de 7 elementos) tuviera igualito que éste (el de 6)?"..., también primero en forma ordenada y luego salteando conjuntos. Luego se preguntará qué habría que hacer para transformar a cada conjunto en el siguiente, y en el anterior.

c) Ordenar familias de conjuntos en forma creciente y decreciente:

Se presentarán a los niños varios conjuntos de 2 elementos, varios conjuntos de 3, etc. (hasta 6 o 7), en forma desordenada, y se les pedirá que los ordenen de tal modo que cada conjunto tenga un elemento más que el anterior: (Gráfico página siguiente)

Es probable que los niños hagan varias series, poniendo en cada una un conjunto de dos elementos, un conjunto de 3, etc. Se les pedirá que queremos que haga una sola serie con todos los conjuntos. Seguramente se desconcertarán y dirán que eso no se puede hacer. Se insistirá en que encuentren una manera de hacerlo.

En caso de ser necesario, puede realizarse una situación de seriación por tamaño con los mismos niños: encontraremos niños que tienen el mismo tamaño "¿Qué hacemos con ellos?" Como ya hemos visto en la tesis sobre seriación, los niños dan dos soluciones: o bien dejan de lado los elementos "repetidos" y ordenan uno solo de los que tienen el mismo tamaño, o bien forman con los niños del mismo tamaño una hilera perpendicular a la serie. Ambas soluciones son válidas para el ordenamiento de familias de conjuntos: o bien se elige un solo conjunto de cada "familia", y entonces se lo está considerando como representante de su clase y se



ordenan esos representantes, o bien se forman las familias de conjuntos y se ordenan las familias mismas. Es indudable que, por analogía con la situación de seriación por tamaño, los niños podrán aplicar una de las dos soluciones a la seriación numérica.

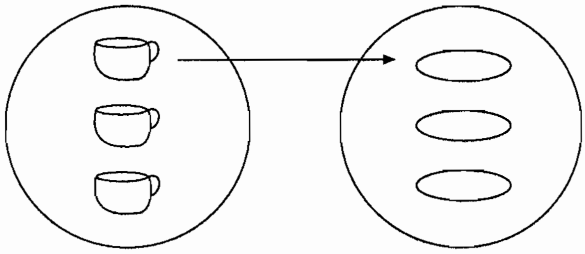
Queremos hacer notar que hemos omitido —voluntariamente— la consideración del "conjunto vacío" y del "conjunto unitario". Ambas nociones son muy difíciles para los niños en edad preescolar. La primera, porque el conjunto vacío es, por definición, el conjunto que no tiene elementos. El niño llega a la noción de conjunto a través de la clasificación de elementos concretos y pensar en un conjunto sin elementos resultará de un nivel de abstracción incomprensible para él. Está comprobado que los niños sólo comprenden esta noción hacia los 11-12 años. El caso del conjunto unitario es menos grave, pero presenta también sus dificultades: la noción de conjunto resulta, como dijimos recién, de la clasificación. Esta consiste, básicamente, en la agrupación de elementos. Es por lo tanto muy difícil para el niño pensar que va a "agrupar" un solo elemento. Piaget ha mostrado que los niños pequeños tienen, aun en los comienzos del periodo operatorio-concreto, una gran resistencia a utilizar los criterios de clasificación que los conducirán a formar un conjunto unitario. Contaremos al respecto una experiencia personal: los niños de un grupo preparatorio estaban realizando una actividad de clasificación espontánea, en la que el universo considerado eran ellos mismos. Eligieron, entre otros, como criterio clasificatorio el color del cabello. Los niños de cabello oscuro comenzaron a agruparse, los rubios también. La maestra vio que una niñita (Laura) caminaba desorientada por el salón. Laura era pelirroja y no había en el grupo ningún otro niño pelirrojo. La maestra preguntó a todos los niños "¿Y qué hacemos con Laura?" Un decidido coro infantil le contestó: "¡Que se vaya!" La maestra tuvo que dar entonces una sesuda explicación diciendo que Laura sola podía constituir un conjunto, puesto que su color de cabello era diferente al de los demás y que podía haber ocurrido que hubiera en la clase otro niño pelirrojo y en ese caso ellos no hubieran dudado en constituir un conjunto de pelirrojos, etc. Pero el objetivo de esta explicación era exclusivamente que Laura no se sintiera mal. La maestra sabía (y era difícil dudarlo a juzgar por lo ocurrido) que los niños no podían entender muy bien lo que ella decía.

De cualquier manera, este problema surgirá cuando efectúen los ejercicios en que interviene el operador "sacar": si los niños le han sacado un elemento a un conjunto de 3 o 4, seguramente se lo sacarán también al conjunto de 2 y les quedará un elemento. Lo más probable es que ellos no se cuestionen si ese elemento es un elemento o un conjunto. También se le ocurrirá a alguien sacarle un elemento al conjunto de un elemento y entonces no quedará ningún elemento. Dirán entonces "¡Pero no queda nada!". Dejémoslo así. La educación no se termina en el nivel preescolar. En el futuro tendrán tiempo de reflexionar sobre el conjunto vacío, sobre el conjunto unitario y también sobre muchas otras cosas.

La representación de la correspondencia

En los libritos de Matemática para uso de los niños preescolares, las tareas representativas de la correspondencia suelen ser presentadas de la siguiente manera:

"Une con una flecha cada tacita con su platico"



Si analizamos en función de lo que ya hemos dicho esta forma de plantear el problema, podemos observar que:

1°) La consigna no se refiere al número de elementos, de modo que el niño no sabrá qué es lo que está haciendo cuando, obedeciendo la consigna, traza las flechas.

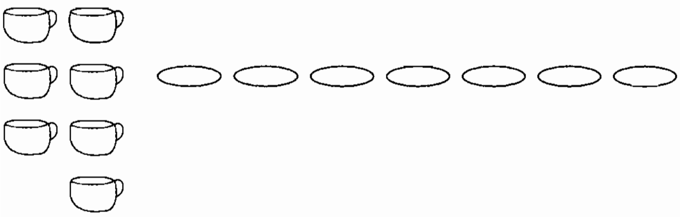
2°) Como el trazado de la flecha ya está sugerido en el dibujo, y como los elementos están dispuestos ya uno frente a otro, el niño no tendrá siquiera el esfuerzo de decidir cómo apareará los elementos, es decir que su trabajo se limitará pura y simplemente a copiar un dibujo, a trazar una flecha.

No presentaremos entonces el trabajo representativo de esta manera, sino que, en primer lugar, trataremos —como lo hemos hecho en el caso de la clasificación— de que el niño comprenda la novedad del problema que se le plantea: como los elementos están dibujados en una hoja de papel, no pueden moverse para enfrentarlos y establecer así la correspondencia óptica. Habrá que encontrar entonces una manera diferente de establecerla.

En primer término, presentaremos una situación de transición, con objetos que no pueden moverse. Supongamos, por ejemplo, que acabamos de establecer una correspondencia efectiva, utilizando las chaquetas de los niños y el perchero (fijo en la pared). Hemos preguntado si alcanzan los ganchos del perchero para colgar las chaquetas de los niños. Ellos habrán colgado cada chaqueta en un gancho y encontrado, por ejemplo, que sobran algunos ganchos. La maestra preguntará entonces "¿Y qué pasaría si fueran los niños del otro preparatorio los que estuvieran en este salón?" "¿Alcanzarían los ganchos?" "¿Sobrarían?" Los niños preguntarán cómo pueden hacer para saberlo, ya que las chaquetas de los otros niños no están allí. La maestra dibujará entonces en el pizarrón las chaquetas (sería mejor que el pizarrón no estuviera muy cerca del perchero). "Bueno, y ahora? cómo podemos hacer?" Los niños verán que no pueden mover ni los ganchos del perchero ni las chaquetas dibujadas en el pizarrón. Entonces intentarán inventar alguna manera de poner en correspondencia chaquetas y ganchos. Algunos propondrán dibujar un ganchito en cada chaqueta. Otros propondrán atar un trozo de pabilo en cada gancho y llevarlo hasta cada chaqueta, fijándolo con una chinche, otros dirán que un niño señalará cada chaqueta mientras otro señala cada gancho, otros pensarán que se puede poner un número en cada chaqueta y escribir el mismo número al lado del gancho correspondiente. Todas estas soluciones se llevarán a la práctica. Una niña propuso una vez fijar los ojos en un gancho y hacer girar su cabeza hasta que sus ojos se posaran en una chaqueta, y así sucesivamente. La maestra le dijo que lo hiciera y salió del aula. Luego volvió y preguntó: "Bueno, ¿qué hiciste? Yo no veo nada". Los niños dijeron entonces que era mejor hacerlo de una manera que se conservara, para que pudieran enterarse los que no lo hubieran visto. La importancia de esto es justamente el valor de la representación: no desaparece cuando se pasa a otra tarea, sino que permanece a la disposición de los que necesitan o quieran "leerla".

— Establecimiento de correspondencia entre dos conjuntos dibujados:

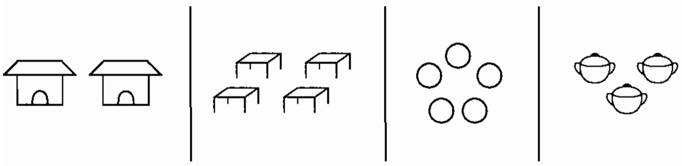
Se dibujan en el pizarrón dos conjuntos, de 10 a 12 elementos cada uno, para que el problema no pueda resolverse por simple percepción, lo cual haría difícil la correspondencia. Por otra parte, el dibujo debe estar hecho de modo que los elementos No estén puestos ya espacialmente en correspondencia: como sobre la hoja de papel no podemos transformar la disposición espacial, será necesario proponerla ya transformada, por ejemplo:



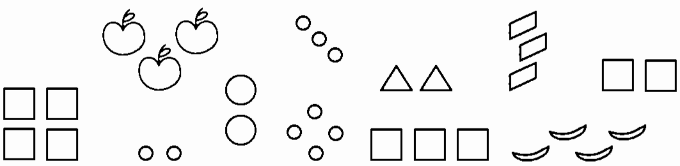
— Dado un conjunto (dibujado en una tarjeta) pedir al niño que dibuje otro que tenga el mismo número de elementos (o que tenga un elemento más o un elemento menos).

— Pedir a los niños que dibujen dos conjuntos que tengan el mismo número de elementos.

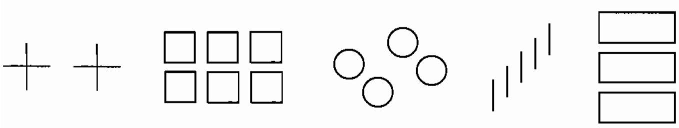
— Dibujar muchos conjuntos (de elemento diferentes) equivalentes a uno dado. La tarjeta puede presentarse así:



— Formar familias de conjuntos, dados varios conjuntos equivalentes y no equivalentes. Los niños podrán utilizar aquí la forma de representación que emplean para la clasificación. Ejemplo de tarjeta:



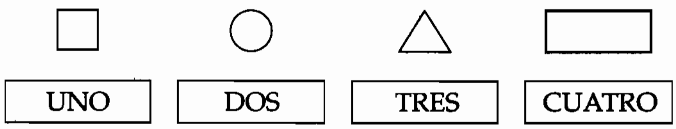
— Ordenar conjuntos de tal modo que cada uno tenga un elemento más (o un elemento menos) que el anterior.



Conclusiones

Deseamos recordar, a modo de síntesis, que los aspectos fundamentales a tener en cuenta cuando se planifica una situación didáctica referida al número, sea ésta concreta o representativa, son los siguientes:

- Nunca debemos conformarnos con situaciones que plantean los conjuntos en disposiciones espaciales privilegiadas, ya que el reconocimiento del número o la equivalencia numérica en una disposición determinada no garantiza de ningún modo que el número se conserve al variar dicha disposición. Será por lo tanto necesario efectuar siempre transformaciones sobre las configuraciones presentadas.
- No debe enfatizarse en absoluto el aprendizaje "en vacío" de la numeración hablada ya que, como hemos visto, el hecho de "saber contar" no garantiza de ningún modo el manejo del número. Puede alentarse, en cambio, la utilización del esquema de contar colecciones reales de objetos, ya que el contar objetos es una forma del esquema más general de poner en correspondencia. Pero, para que este esquema sea operativo no debe utilizarse aisladamente, sino en situaciones en las que esté en juego la equivalencia numérica de dos conjuntos. Utilizado aisladamente, el esquema de contar puede ser simplemente colocarle una etiqueta verbal a cada objeto:



Cuando, en situaciones como ésta, el niño dice "cuatro", esto no significa necesariamente que comprende que "cuatro" es el cardinal del conjunto constituido por el 4º y todos los precedentes, sino que "cuatro" puede ser simplemente para él un nombre adjudicado a ese cuarto elemento: por lo tanto lo importante es que el niño cuente en situaciones en las que el número obtenido será puesto en comparación (o en contradicción) con las conclusiones que extrae de las deformaciones de la configuración, tal como hemos propuesto en el punto B.

Dado que uno de los factores importantes que lleva a la conservación del número es la coordinación de las diversas variables en juego, será fundamental tratar de que el niño tome conciencia de las contradicciones en que incurre al centrarse en forma alternativa (y no coordinada) en cada una de esas variables, tal como hemos propuesto en los ejercicios de tipo A.

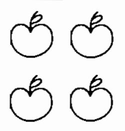
Tema 2. *Representación gráfica de cantidades y su génesis hacia los numerales*

LECTURA: REPRESENTACIÓN GRÁFICA*

PRESENTACIÓN

La función simbólica es una capacidad que permite representar un objeto a través de otro, así por ejemplo, el dibujo de una manzana no es la manzana en sí, sino un objeto que lo sustituye. Asimismo el dibujo permite evocar una realidad que no está presente. En este sentido sustitución y evocación son características de la función simbólica, dicha función permite que un objeto ausente se pueda hacer presente mediante la sustitución de otro.

Tomando el ejemplo anterior, el dibujo de una manzana es un significante gráfico que nos remite a una realidad a la que se le atribuye un significado. De esta manera las marcas trazadas sobre un papel (o cualquiera otra superficie que se preste para ello) que evocan y sustituyen objetos, reciben el nombre de significantes gráficos.

* * * *		IV	CUATRO	4

Por ejemplo, para representar gráficamente un conjunto de cuatro elementos se pueden utilizar los siguientes significantes gráficos:

Independientemente del significante utilizado, éstos remiten al significado que tenemos de cuatro. Sin embargo, el significante gráfico 4 es una forma convencional de representar gráficamente el concepto de número. Dichos significantes (al igual que el 1, 2, 3, etc.) reciben el nombre de numerales.

El numeral 2, por ejemplo, es una forma convencional de representar gráficamente el concepto de "dos", es decir, de cualesquier conjunto de dos elementos.

De acuerdo con lo anterior, el numeral (significante gráfico) no es el concepto de número en sí sino una forma convencional de representarlo. Numeral y concepto no son idénticos, por lo que es erróneo pensar que, por el hecho de enseñar el numeral al niño, se está enseñando el concepto de número.

* P. Bollás. *Representación gráfica*. México, UPN,1995. (mimeo).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Presentación

Jean Piaget ha propuesto, en el campo de la psicología, una teoría sobre el desarrollo de la inteligencia para ilustrar la progresión de los conocimientos tal y como son constituidos por los niños. Esta inquietud por el desarrollo cognitivo, se propone captar la génesis de las estructuras lógicas propias del niño antes que imponerle una lógica ya construida. En este sentido habrá que tener cuidado para no atribuirle al niño nuestra propia lógica. Pensar que el niño tiene nuestra propia lógica (como adultos) es caer en el "adulto-morfismo"; por el contrario, se debe partir del principio de que el niño cuenta con esquemas interpretativos sobre lo real que difieren de las interpretaciones adultas; las investigaciones contemporáneas reconocen dicho principio. Así por ejemplo Nemirovsky afirma que el niño tiene "... maneras propias de entender la realidad y éstas no son deficientarias o erróneas, sino modos muy particulares de organizar los datos que provienen del medio en función de esquemas asimilatorios propios de un sujeto en desarrollo" (Nemirovsky 1988, pág. XV).

En los estudios realizados por Piaget y colaboradores, se establecen periodos (senso-motor, representaciones preoperacionales, operaciones concretas, etc.) por los que atraviesa el niño en su conocimiento progresivo del mundo que lo rodea. Si se designan tales periodos no es porque el sujeto responda de forma exclusiva según una determinada edad y una determinada situación. Antes bien, porque entre el niño y el medio se establecen relaciones que dependen de una particular estructuración de la inteligencia que le permite atribuir significaciones a lo real.

Función simbólica. Sustitución y evocación

Hacia finales del segundo año (por término medio), en el periodo de las representaciones preoperacionales, aparece en el niño la función simbólica. Se trata de una capacidad (cognitiva) que permite representar un objeto a través de otro. Así por ejemplo, el dibujo de una casa realizado sobre un papel no es la casa en sí, sino un objeto (marcas gráficas) que la representa.

De esta manera, mediante la función simbólica un objeto ausente (o cuando no es directamente perceptible) se le puede hacer presente por *sustitución* de otro objeto que lo re-presenta. Veamos los siguientes ejemplos:

En el juego simbólico, cuando el niño es capaz de atribuir un significado representativo a un palo de escoba en el cual se "monta", sabe bien que no es el caballo (en sí); sin embargo lo hace presente por intermedio del palo que lo sustituye. Por su parte, en la imitación diferida, el niño es capaz de representar un modelo ausente; el gesto imitador es un objeto sustituto que permite evocar al modelo que no es directamente percibido. Asimismo, en la representación gráfica, las marcas realizadas sobre un papel constituyen objetos sustitutos que permiten evocar pensamientos, conceptos y sentimientos.

Los objetos representados pueden tener algo de presente o actual o bien nada de ello, en este segundo sentido se trata de un contexto *evocado*, lo cual constituye un elemento importante para comprender la representación (Cfr. Piaget 1983). En efecto, toda representación tiende a sustituir al objeto representado y hacer presente lo ausente, lo que exige por parte del sujeto una capacidad cognitiva de evocación. Así, *sustitución y evocación* son características propias de la función simbólica.

Con la función simbólica las actividades amplían considerablemente su campo de acción, no sólo porque liberan al niño de las limitaciones temporales del presente inmediato, sino porque la representación introduce nuevas relaciones entre él y el mundo que lo rodea.

Ahora bien, en los ejemplos arriba citados, el palo de escoba, el gesto imitador y las marcas trazadas sobre un papel, constituyen *significantes* que remiten a una realidad significada. En tanto que los significantes son objetos sustitutos *no son* la realidad significada sino una forma de representarla. El dibujo de una casa (significante) no es la casa en sí, sino un objeto sustituto que permite representarla.

El numeral 5, por ejemplo, no son cinco sillas, cinco lápices, cinco "cualesquiera cosas", sino una forma de representación gráfica (convencional) de todos los conjuntos que tienen la misma propiedad numérica. Dicho numeral[1], en tanto que significante gráfico convencional, nos remite a un *significado*; todos los conjuntos con cinco elementos. En este mismo sentido se expresa Piaget (1984) cuando indica que la función simbólica permite la representación de lo real por intermedio de significantes distintos de las cosas significadas. Significantes a los que designa con el nombre de significantes diferenciados (de su significado).

Los símbolos y los signos son significantes diferenciados, sin embargo, símbolo y signo difieren uno del otro.

Los símbolos son motivados en el sentido de que son una construcción particular del sujeto y, aunque es un objeto sustituto, se definen por una relación de semejanza figurativa entre significante y aquello que representa. Por ejemplo, el dibujo de una taza tiene una relación de semejanza figurativa (se parece) con el objeto taza. Cabe señalar que dicha relación no siempre se presenta en el niño pequeño quien utiliza símbolos idiosincrásicos, es decir, símbolos privados que no necesariamente guardan alguna relación de semejanza con el objeto representado. Así por ejemplo, el niño puede realizar sobre el papel una serie de garabatos incomprensibles para el adulto pero que, sin embargo, para el niño son las marcas inequívocas de un coche.

1 El numeral es una forma de representar convecionalmente el concepto de número.

En la representación gráfica, se habla de significante gráfico arbitrario cuando el significante utilizado no tiene una relación de semejanza figurativa con aquello que representa. Dentro de estos significantes los hay aquellos que son convencionales y otros que no lo son como en el ejemplo arriba citado.

Los signos gráficos (por ejemplo: +, =, 6) son arbitrarios y requieren de la convención social para ser comprendidos. Arbitrarios porque no guardan relación de semejanza figurativa con aquello que representan y convencionales porque son producto (cultural) de la vida social. Al respecto Nemirovsky señala que "... cuando se trata de transmitir algo al otro surge entonces un requisito adicional: que la representación sea *convencional*; es decir, compartida por un grupo social. De esta manera la información se transmite mediante el conocimiento y uso de representaciones convencionales" (Nemirovsky, 1988, 27).

Significante gráfico y significado

Hemos señalado que la función simbólica se refiere a la capacidad representativa en el niño que permite el empleo de significantes diferenciados (símbolos y signos). Asimismo, mencionamos que símbolos y signos difieren unos de otros, en el sentido de que los primeros son motivados y los segundos arbitrarios y convencionales. Ahora bien, la función simbólica se presenta en el niño mediante varias modalidades que se construyen simultáneamente; la imitación diferida, el juego simbólico, la expresión gráfica, la imagen mental (incluyendo a la memoria o recuerdo imagen) y el lenguaje. Cuando se habla de todas estas modalidades, se está indicando una función general a diferencia de una función específica que sólo se refiere a una de ellas.

De acuerdo con lo anterior, la expresión gráfica es una modalidad de función simbólica que se refiere a la capacidad representativa en la cual el sujeto utiliza marcas sobre un papel (significantes gráficos) que permiten sustituir y evocar objetos, personas o acontecimientos, mismos que pueden o no estar presentes en el momento del registro gráfico.

Cuando Nemirovsky se propone aclarar el sentido de la representación gráfica, la delimita con los términos siguientes:

> "Con el término *representación* designamos a la actividad humana que crea un objeto material en sustitución de otra, como por ejemplo: la realización de maquetas, planos, mapas, esquemas, etc.; en todos estos casos el objeto producido está en lugar de aquel que representa. Por ello una re-presentación o una representación es un objeto sustituto (...). La representación gráfica (se refiere) a las marcas trazadas sobre un papel que constituyen objetos sustitutos (Nemirovsky 1988, 22).

En efecto, los significantes gráficos se refieren a las marcas trazadas sobre un papel o sobre cualquier otra superficie que se preste para ello y, aunque son objetos sustitutos, permiten dar significado o interpretación de aquello que sustituyen. Esto es, que en la representación gráfica está presente un significante y un significado. El significado se refiere al "... concepto o idea que un sujeto ha elaborado sobre algo y existe en él sin necesidad de que lo exprese gráficamente" (Nemirovsky y Carbajal, 1987, 23). Por su parte, el significante gráfico es un objeto sustituto a través del cual puede ser expresado (gráficamente) dicho significado.

En el caso del concepto de número, "La convención social determinó que la representación gráfica del concepto "dos" sea la siguiente: 2 y el numeral no se parece, desde ningún punto de vista, al concepto que representa. Es una representación absolutamente arbitaria" (Ferreiro y Fuenlabrada, 1987, 25).

De esta manera, el numeral no es el concepto sino una manera de representación convencional. Esto es importante subrayarlo porque frecuentemente se enseña el numeral como si fuera el concepto de número, o bien el signo + como si fuera el concepto de suma (acción de reunir o agregar".

> "Es frecuente escuchar a padres y maestros decir que los niños "ya saben contar" cuando son capaces de repetir las palabras de la serie numérica, en el orden convencional (sin embargo) sólo está pronunciando de memoria los nombres de los números, cuando se dice "Juan, Pedro, Margarita", o cuando se repite un verso

de una canción. Del mismo modo, se piensa, que si el niño sabe escribir los numerales es que "ya conoce el concepto de número". Esto es un error, puesto que una cosa es repetir una palabra, o bien copiar una grafía, y otra comprender un concepto. (SEP-DGEP, pág. 76).

Es conveniente, para fines didácticos, abordar "... la representación gráfica de un concepto cuando el niño lo ha construido o lo está construyendo" (Cfr. Nemirovsky y Carvajal, 1987, 19).

México D.F., marzo de 1995

LECTURA: EL DESCUBRIMIENTO INFANTIL DE LA ARITMÉTICA ESCRITA*

PRESENTACIÓN

En este artículo, Martín Hughes examina las nociones que tienen los niños acerca del simbolismo escrito, particularmente, se interesa por las representaciones gráficas de conceptos aritméticos sencillos como la cantidad, el cero y la representación de la suma y la resta.

Para realizar el estudio de la representación gráfica de la cantidad, Hughes presentaba a los niños una cantidad de "n" elementos que funcionaba como modelo, posteriormente les solicitaba su producción gráfica. En dichas producciones se observó que los niños recuperaban de manera progresiva la cantidad de elementos presentados. El autor clasifica los datos en distintos métodos de producción descritos abajo:

En la producción Idiosincrásica los niños se muestran incapaces para recuperar la cantidad de elementos que se les han presentado. En la producción Pictográfica realiza una copia del modelo recuperando tanto los aspectos cualitativos (forma, tamaño, posición, etc.) como los aspectos cuantitativos, es decir, la cantidad de elementos que se le presentan. En la producción Icónica los niños recuperan la cantidad, estableciendo una correspondencia estricta entre su producción y el número de elementos. Dado que este tipo de producción se caracteriza por la utilización de marcas (rayas, puntos, cruces, etc.), se dejan de lado los aspectos cualitativos. Finalmente, en las producciones simbólicas es común que los niños utilicen numerales.

Para la representación de la ausencia de cantidad o "cero" se encontraron respuestas variadas; desde actitudes desconcertantes dada la imposibilidad de representar la "nada", hasta producciones en donde se utilizaba el cero como símbolo convencional; pasando por producciones en las que los niños colocaban una marca (por ejemplo una raya o bien), dejaban la tarjeta en blanco. Hughes concluye que la representación gráfica del cero (ausencia de cantidad), no resultaba para los niños más costoso que representar pequeñas cantidades (uno, dos o tres elementos).

Para el estudio de la representación gráfica de la adición y la sustracción, Hughes presentaba a los niños situaciones-problemas como el siguiente: se construye una torre de cuatro cubos delante del niño, después se le quitaba (o añadía) otros y se le pedía que enviara un mensaje (a través de un registro gráfico) a otro compañero de lo que había sucedido. No obstante que algunos de los niños podían representar cantidades, presentaban dificultades para representar sumas y restas, incluso, también en aquellos que ya utilizaban los signos aritméticos convencionales.

EL DESCUBRIMIENTO INFANTIL DE LA ARITMÉTICA ESCRITA

Aunque en todo momento estén rodeados de cifras, en la mayoría de las sociedades occidentales los niños no suelen entrar en contacto con la aritmética escrita hasta que comienzan su escolarización. Varía entre los distintos países la edad exacta a la que esto se produce, pero siempre aparece el mismo problema básico: los niños tienen que aprender a vincular la nueva forma escrita de representación con la comprensión numérica concreta que ya poseían antes de entrar en la escuela. Por ejemplo, han de aprender que la suma de un bloque a dos bloques puede representarse mediante la fórmula "2+1=3" y que, a la inversa, la fórmula "3-2=1" puede representarse concretamente quitando dos bloques de un grupo de tres. Para emplear la terminología introducida en el capítulo anterior, los niños tienen que aprender a traducir su comprensión concreta de los números al simbolismo escrito de la aritmética.

Una manera de examinar las nociones que tienen los niños acerca del simbolismo escrito consiste en pedirles que *creen* sus propias representaciones escritas de conceptos aritméticos sencillos. Por ejemplo, a un niño se le puede dar un lápiz y pa-

M. Hughes. "El descubrimiento infantil de la aritmética escrita", en: *Los niños y los números*. Barcelona, Ed. Paideia, 1987.pp. 75-105.

pel, mostrarle determinada cantidad de objetos y pedirle que ponga en el papel algo que sirva para mostrar cuántos objetos hay. De manera alternativa, pueden efectuarse sumas y restas en los objetos, y pedirse al niño que represente lo que se haya hecho. El empleo de este método con niños en edad preescolar nos indicará qué nociones poseen acerca del simbolismo escrito antes de que entren en contacto en la escuela con el sistema convencional. El mismo método puede utilizarse con niños escolarizados que ya conozcan el sistema convencional: ¿se dan cuenta por completo de la relación existente entre estos símbolos y las sumas y restas donde intervienen *objetos* reales?

En el presente capítulo aparecen las interesantes e inesperadas respuestas a estas interrogantes, proporcionadas por la investigación llevada a cabo con niños de la ciudad de Edimburgo. Primero vamos a examinar los ensayos realizados por los niños con el propósito de representar la cantidad de objetos que hay en un grupo, y después veremos sus intentos de representar sumas y restas sencillas.

Las representaciones infantiles de la cantidad

Cuando di los primeros pasos en esta línea investigadora, sólo pude hallar otro estudio anterior que hubiese hecho algo parecido. En dicho estudio Barbara Allardice (1977) había pedido a niños estadounidenses de edades comprendidas entre los tres y los siete años que escribiesen mensajes para que *Snoopy* (un perro de juguete "con los ojos vendados") los leyese más tarde. Empleando este método, Allardice logró extraer sus representaciones espontáneas de cantidad, suma y resta. Informó asimismo que los niños consideraban que la cantidad era mucho más fácil de representar que la suma y la resta. Allardice dejó constancia de que muchos niños inventaban sus propios métodos, pero ofreció pocos ejemplos específicos.

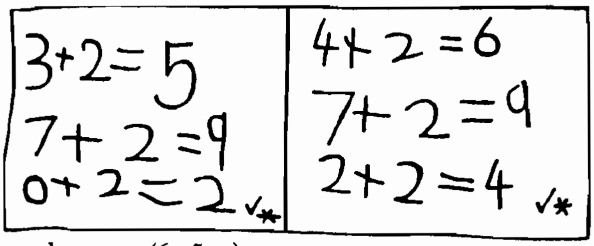
Los hallazgos de Allardice me interesaron y decidí comprobar yo mismo cuántos niños británicos respondían a la misma situación. Al principio utilicé un método muy parecido al de Allardice: pequeños bloques y un oso panda de juguete —llamado *Chu-Chu*— que actuaba como receptor de los mensajes infantiles. Si bien este procedimiento suscitaba respuestas en los niños, parecía innecesariamente artificial y complicado. Liberé a *Chu-Chu* de sus funciones y me limité a pedir a los niños que "pusiesen algo en el papel" para mostrar cuántos bloques había, o qué había ocurrido con ellos. La mayoría de los sujetos respondió con presteza a la solicitud: al principio hubo algunos que vacilaron un poco, pero después de recibir un poco de aliento y de repetir la pregunta también ellos crearon signos sobre el papel.

En aquel momento se unió a mi investigación Miranda Jones, estudiante del último curso del Departamento de Sicología de la Universidad de Edimburgo. Basándonos en mi estudio piloto decidimos llevar a cabo un estudio a gran escala. Dividimos a noventa y seis niños (de edades comprendidas entre los tres años y cuatro meses y los siete años y nueve meses) en cuatro grupos de veinticuatro niños correspondientes a cada nivel educativo, desde guardería hasta tercer curso. El centro de enseñanza en el que estaban escolarizados correspondía a una zona mixta de la población, y los niños procedían de diversos niveles socioeconómicos. Los sujetos del grupo preescolar no habían recibido ninguna instrucción aritmética formalizada; los niños de primero habían comenzado con sumas sencillas, sumando 1 y 2; y los de segundo y tercero trabajaban casi todos los días en problemas de aritmética escrita (véase la figura 5.1).

Miranda Jones vio individualmente a cada niño y les pidió que representaran las cantidades uno, dos, tres, cinco y seis. Se les dio papel y lápiz y se puso determinada cantidad de bloques delante de ellos, sobre la mesa. A continuación se les decía "¿Puedes poner algo en el papel que sirva para mostrar cuántos bloques hay sobre la mesa?" Se eligió esta frase en particular, ya que en ella no aparecen los términos "escribir" o "dibujar" y por lo tanto abría ante los niños todas las opciones posibles. Después que los sujetos habían "puesto algo sobre el papel" se quitaban los bloques y se colocaba un nuevo conjunto de bloques y una nueva hoja de papel delante de ellos. (Véanse más detalles en Jones, 1981.)

Los niños utilizaron diversos métodos para representar los bloques. Un examen más detenido nos permitió descubrir que estas respuestas podían clasificarse fácilmente en cuatro grandes categorías.

Primer curso (5 años)



Segundo curso (6 años)

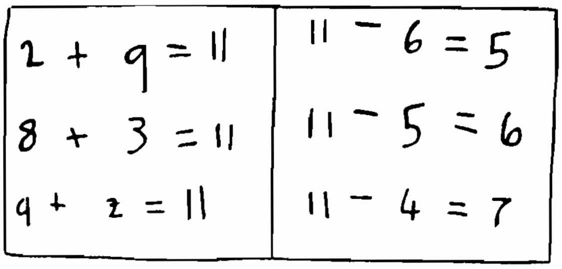


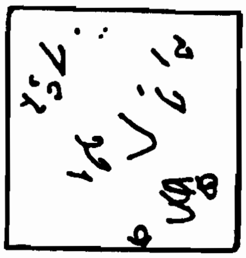
Figura 5.1. *Páginas de los cuadernos de los niños.*

Respuestas idiosincrásicas

Las respuestas se clasificaban como idiosincrásicas si en las representaciones hechas por los niños no podíamos descubrir algún tipo de regularidad que estuviese relacionada con la cantidad de objetos existentes. Esto no excluía la posibilidad de que tales respuestas tuviesen significado para los propios niños: quería decir sencillamente que carecían de significado para nosotros (véase la figura 5.2).

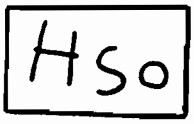
La respuesta idiosincrásica más común era simplemente cubrir el papel de garabatos, como en el caso de la representación de dos bloques hecha por Alison. Algunos niños, empero, no dibujaron un garabato continuo sino que hicieron ganchos separados en forma de letra. Por ejemplo, Leanne dijo: "Estoy haciendo escritura", mientras ponía con mucho cuidado sus marcas en el papel. Un tercer tipo de respuesta idiosincrásica consistió en letras reconocibles del alfabeto, como las que hizo Halla. Finalmente hubo algunos niños que se limitaron a dibujar objetos irrelevantes, como Nicola, que afirmaba que aquello era una silla.

a) Alison (4 años y 2 meses): 2 bloques



b) Leanne (4 años y 3 mese): 5 bloques

c) Nicola (4 años y 4 mese): 5 bloques



c) Halla (3 años y 6 mese): 1 bloque

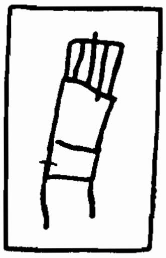


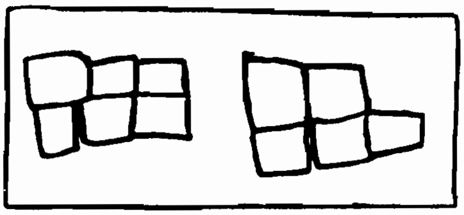
Figura 5.2. *Ejemplos de repuesta idiosincrásica*

Respuestas pictográficas

El término "pictográfico" se utiliza a menudo para describir ciertos sistemas de escritura utilizados en otras culturas. Aquí el criterio de asignación consistió en que los niños hubiesen intentado representar algo parecido a lo que tenían delante, dejando constancia asimismo de la cantidad existente de objetos. Una respuesta se consideraba pictográfica si el niño colocaba en ella alguna indicación correspondiente a la forma, posición, color u orientación de los bloques (véase la figura 5.3).

La respuesta pictográfica más corriente consistía sencillamente en dibujar los bloques, como trató de hacer Daniel. Unos cuantos niños, como Raquel por ejemplo, intentaron sin embargo colocar cada uno de los bloques sobre el papel y dibujar su contorno. Esto quizá haya sido una respuesta al pie de la letra a la instrucción recibida acerca de "poner algo sobre el papel": ¡el sujeto había puesto efectivamente el bloque sobre el papel y no un signo, que era lo que nosotros pretendíamos! También podía ser un auxilio para trabajar con más precisión: un niño dibujó los bloques sin ayuda cuando eran pocos, pero los colocó sobre el papel y dibujó su contorno cuando había una cantidad mayor.

Daniel (5 años y 11 meses): dibujo (representa 6 bloques y 5 bloques)



Raquel (4 años y 10 meses): dibujo contorneado de 6 bloques

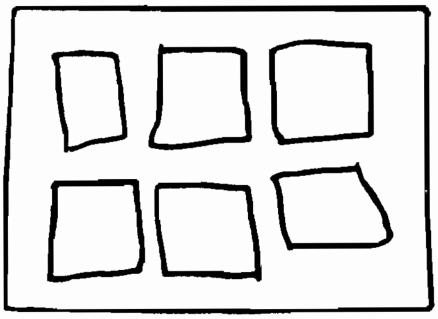


Figura 5.3. *Ejemplos de repuesta pictográfica*

Respuestas icónicas

Al igual que las pictográficas, estas respuestas se basaban en una correspondencia estricta con los bloques, pero aquí el niño utiliza un sistema mediante el cual cada símbolo diseñado por él representa a un bloque distinto. Las respuestas icónicas suelen consistir en simples marcas, como las que Mutale (véase la figura 5.4). En algún caso, sin embargo, los niños dibujaron otras formas para representar a cada bloque: Emma, por ejemplo, trazó círculos, y Pamela dibujó casas.

Matute (4 años y 3 meses): 5 bloques

Figura 5.4. *Ejemplos de repuesta icónica*

El término "icónico" tal como aquí se utiliza se ajusta a la noción de ícono como signo no arbitrario, propuesta por Charles Peirce (véase Lyons, 1977, p. 102). Los elementos individuales de estas respuestas pueden ser arbitrarios, pero la respuesta en conjunto —considerada dentro del contexto de la tarea— no lo es. Satisface el requisito esencial que consiste en expresar la cantidad de objetos que hay en el grupo. (Jerome Bruner (1964) utiliza el término "icónico" en un sentido ligeramente diferente.)

Respuestas simbólicas

En este caso los niños emplearon símbolos convencionales para representar la cantidad. El tipo más frecuente de respuesta simbólica consistió en escribir cifras, como Neil y Leigh en la figura 5.5. Sin embargo, unos cuantos niños del grupo de más edad, por ejemplo Kashif, escribieron materialmente los nombres de los números: "uno", "dos", "tres", etc.

Los niños mostraban gran coherencia en el método de respuesta empleado: si su primera respuesta era pictográfica, solían continuar con el mismo estilo en las demás cantidades. No obstante, los métodos empleados variaron de modo considerable según las edades, y la diferencia más clara se produjo entre los niños de nivel preescolar y los de primer a tercer curso. Como se aprecia en la figura 5.6, los niños de nivel preescolar preferían los métodos icónicos e idiosincrásicos, mientras que los niños de más edad creaban con más frecuencia respuestas pictográficas y simbólicas. Los métodos simbólicos convencionales enseñados en la escuela, empero, sólo en tercer curso se convirtieron en la respuesta más frecuente de los niños.

Habíamos esperado que muchos niños de nivel preescolar iban a crear respuestas idiosincrásicas

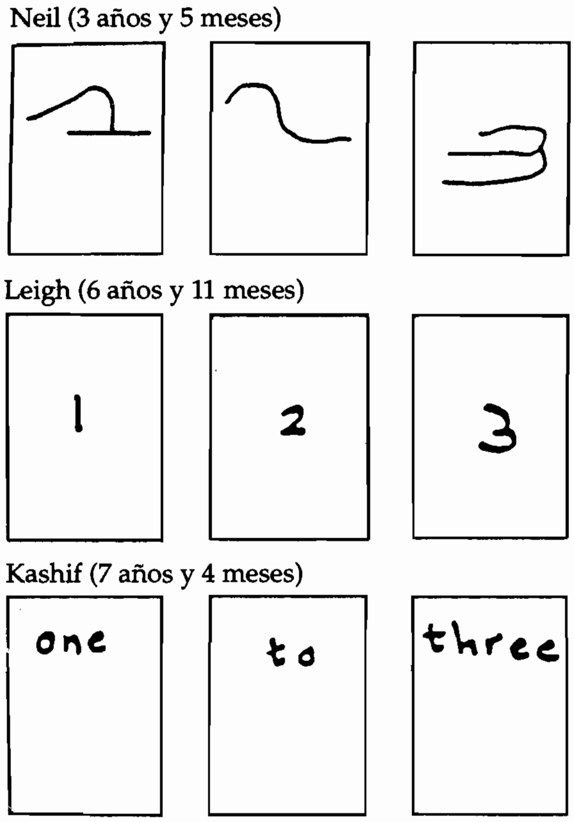


Figura 5.5. *Ejemplos de repuesta simbólica (representando en todos los casos 1,2 y 3 bloques).*

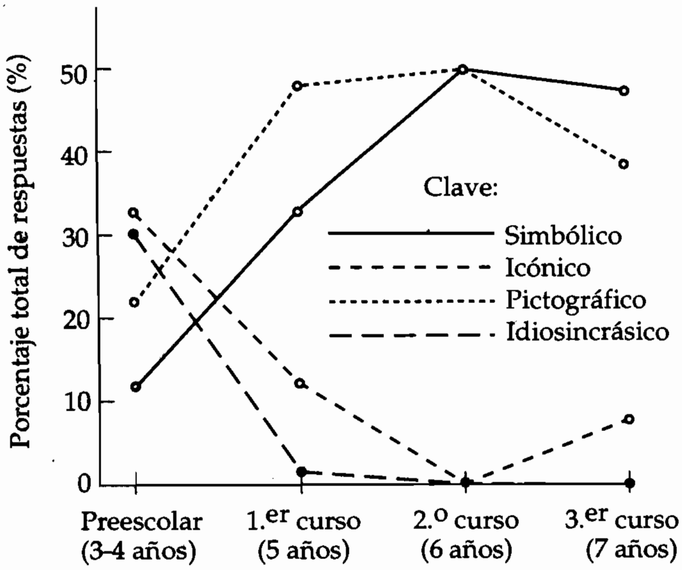


Figura 5.6. *Tipo de respuesta: variaciones según la edad.*

si no comprendían la naturaleza de la tarea, o si eran incapaces de pensar una forma de respuesta. Sin embargo, no habíamos pronosticado tantas respuestas icónicas entre estos niños más pequeños. Al igual que las respuesta simbólicas, a primera vista las representaciones icónicas parecen relativamente abstractas: no contienen ninguna información acerca del tipo de objeto representado y se centran exclusivamente en su número. De hecho parecen representar una propiedad muy fundamental: que el objeto esté presente o no. Aquí el uso de marcas se asemeja al generalizado empleo de los dedos para representar objetos (o personas, etc.). Esta semejanza entre marcas y dedos convierte en menos sorprendente la frecuencia de respuestas icónicas en el grupo preescolar.

El hecho de que los niños creen una representación del número de bloques no significa por fuerza que dicha representación sea completamente exacta. A veces los niños se equivocaban al contar los bloques y representaban una cantidad errónea u omitían la correspondencia biunívoca. Era más probable que los niños fuesen más precisos con los números pequeños (1, 2 y 3) que con los grandes números (5 y 6), y lógicamente, los sujetos de más edad eran más precisos que los más jóvenes.

Cualquier modalidad de representación, si se utiliza de forma sistemática, puede aceptarse como representación escrita de un número. Incluso es posible que un niño construya un sistema idiosincrásico que sólo tenga significado para él, aunque al parecer ninguno de los sujetos de esta investigación llegó a hacerlo. Sin embargo los diferentes métodos de respuesta divergen el *modo* en que transmiten información acerca del número y en la cantidad de información adicional proporcionada. Las pictografías, por ejemplo, son útiles porque no se limitan a proporcionar información acerca del número sino también sobre otras propiedades (tamaño, forma e incluso color) de los objetos representados. Por otro lado un sistema icónico de marcas no nos dice nada acerca de los objetos, pero con frecuencia constituye el sistema más apropiado para seguir el rastro de los acontecimientos (lo veremos con más detalle en el próximo capítulo).

Esta propiedad de los sistema icónicos fue demostrada de un modo muy elocuente por una niña llamada Lindsay (cuatro años y siete meses) que ya había tomado parte en mi estudio piloto. A diferencia de los niños de nuestra investigación principal, Lindsay utilizó siempre la misma hoja de papel. Coloqué bloques sobre la mesa delante de ella, uno cada vez, hasta que hubo un total de siete. A medida que aparecía cada bloque, Lindsay respondía haciendo una única señal vertical. Quise comprobar cómo reaccionaría cuando desapareciesen los bloques y comencé a quitarlos uno por uno. La respuesta de Lindsay consistió en poner un puntito debajo de la marca correspondiente de cada bloque que se suprimía. Acabamos sin ningún bloque sobre la mesa y con el patrón de líneas y puntitos que se ilustra en la figura 5.7.

Figura 5.7. *Las creativas respuestas icónicas de Lindsay (4 años y 7 meses).*

Un sistema simbólico suele ser el modo más eficiente de representar números, pero por lo general no transmite ninguna otra información sobre los objetos representados. Juliette (tres años y diez meses), otra niña procedente de nuestro estudio piloto, encontró sin embargo una ingeniosa forma de enfocar el problema. A pesar de su juventud, Juliette empleó un sistema simbólico de manera sistemática y regular: un "1" para un bloque, un "2" para dos bloques, un "3" para tres bloques, y así sucesivamente. Una de las limitaciones de los sistemas simbólicos es que no representan la posición de los objetos, y me pregunté qué haría Juliette si yo colocaba los tres bloques formando una torre. Ella respondió escribiendo las cifras "1", "2" y "3" en forma vertical. A continuación añadí dos bloques más a la torre. Juliette señaló que en su papel no tenía sitio para añadir otros números encima de su construcción anterior, de modo que escribió el "4" y el "5" en otra disposición vertical al lado de la anterior, como se ve en la figura 5.8. Juliette manifestó gran inventiva para adaptar su sistema simbólico de una forma que incorporaba elementos icónicos y pictográficos al mismo tiempo.

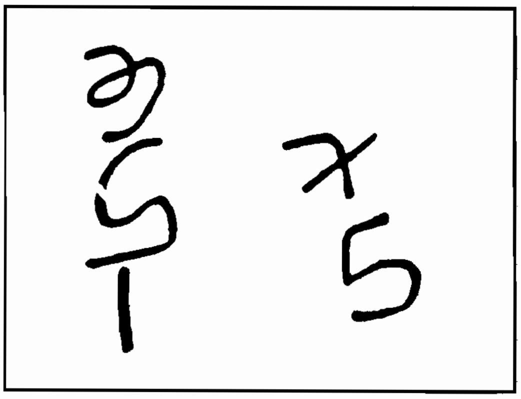


Figura 5.8. *Las creativas respuestas simbólicas de juliette (3 años y 10 meses).*

La representación infantil del cero

Uno de los problemas a los que se enfrenta cualquier sistema de representación consiste en mostrar la *ausencia* de cantidad o "cero". Para averiguar cómo resolvían los niños este problema se quitaron de la mesa todos los bloques y se preguntó a cada niño: "Ahora ¿puedes mostrar que no hay bloques sobre la mesa?"

Como era de esperar, prácticamente todos los niños que emplearon métodos simbólicos para representar la cantidad también utilizaron el símbolo convencional "0" para representar la ausencia de bloques. Sin embargo hubo algunas versiones idiosincrásicas de este fenómeno, como cuando Nicola (cinco años y seis meses) escribió "10" y dijo llena de satisfacción: "Esto es lo que se pone cuando no hay nada, ¿eh?" Los niños que en las demás pruebas habían utilizado métodos icónicos y pictográficos respondieron de formas diversas. Algunos utilizaban también el símbolo convencional "0" o bien inventaban sus propios símbolos, por ejemplo un punto o un guión. Otros dibujaban una caja o una mesa vacías. Hubo quienes dibujaron un único bloque o una única marca. Por último, ciertos sujetos dejaron el papel en blanco, y a menudo se hizo difícil aclarar si habían hecho esto de forma deliberada para representar la "nada" o si se sentían sencillamente incapaces de responder.

A diferencia de las preguntas anteriores, muchos niños parecían desconcertados ante el problema de representar la "nada" y les costaba mucho comprender qué era lo que les pedíamos que hicieran. Nosotros éramos muy conscientes de que, por lo general, nadie les había explicado nada acerca de estos signos hechos sobre el papel: sus representaciones al parecer no servían para nada, desde el punto de vista de ninguno de los que intervenían. En conjunto, esto no les inhibió de ponerse manos a la obra, y de los niños surgió en realidad un amplio abanico de respuestas interesantes. A pesar de todo seguía planteada la cuestión de cuál era el significado que aquellas respuestas tenían en realidad —si es que tenían alguno— para los propios niños.

Crear símbolos para un objetivo: El juego de las latas

Decidí diseñar un juego en el que las representaciones escritas de los niños adquiriesen un claro propósito comunicativo. La idea de crear este juego surgió de forma muy natural, a partir de mi trabajo anterior con cajas y bloques. Los niños pequeños parecían sentirse atraídos por una caja cerrada que contuviese muchos bloques, y pensé que les llamaría la atención el colocar un mensaje escrito sobre la tapa de una caja para mostrar cuántos bloques había dentro.

En el juego intervenían tres latas de tabaco idénticas, que contenían diferentes cantidades de bloques: por lo general había uno, dos o tres bloques dentro de cada caja, o no había ninguno. Después de dejar que el niño mirase dentro de las latas, yo variaba su posición sobre la mesa y pedía al niño que tomase "la lata con dos bloques dentro", "la lata sin ningún bloque dentro" y así sucesivamente. Durante esta fase el niño se limitaba a adivinar. Después de unas cuantas adivinanzas, yo interrumpía el juego diciendo que tenía "una idea que podía ser útil". Adhería un trozo de papel a la tapa de cada lata, le daba un lápiz al niño y le sugería que "pusiese algo sobre el papel" de manera que supiese cuántos bloques había dentro. El niño se enfrentaba con cada lata por separado, quitándoles la tapa para que pudiese mirar dentro. Después de acabar, las latas se desordenaban otra vez y se le pedía de nuevo al niño que identificase determinadas latas, viendo si sus representaciones le habían "ayudado a jugar el juego". El juego de las latas proporcionó de este modo una clara justificación a las representaciones escritas, y además brindó la oportunidad de descubrir qué niños comprendían lo que habían hecho.

Realicé un estudio en el cual jugábamos al juego de las latas con veinticuatro niños que tenían entre tres años y un mes y cinco años y diez meses. Quince de los niños asistían a un centro preescolar, y los otros diez pertenecían al primer curso de una escuela predominantemente de clase media. Cada niño era entrevistado de forma individual en una pequeña habitación alejada del aula. (Véanse más detalles en Hughes y Jones, 1986.)

La popularidad del juego no dejó lugar a dudas. A los niños les pareció muy atractivo el juego inicial de las adivinanzas y quedaron entusiasmados ante la idea de efectuar representaciones con lápiz y papel. Sus comentarios pusieron de relieve que eran muy conscientes de que esto les iba a ayudar; por ejemplo: "Ahora es fácil porque he escrito algo".

También era indudable que las representaciones elaboradas los ayudaron de hecho en el juego. Antes su capacidad para identificar cada lata dependía de la suerte, pero después su rendimiento mejoró de manera significativa: más de dos tercios del grupo preescolar y todos los niños de primer curso lograron identificar las latas gracias a las representaciones efectuadas.

¿Qué métodos emplearon los niños para representar los bloques? Del mismo modo que anteriormente, sus representaciones de cantidades diferentes de cero fueron clasificadas como idiosincrásicas, pictográficas, icónicas o simbólicas. Una comparación con nuestro estudio previo mostró que desde muchos puntos de vista los niños respondían de una forma semejante. En ambas investigaciones los niños crearon una gran diversidad de representaciones; en ambos casos el grupo preescolar produjo gran cantidad de respuestas idiosincrásicas e icónicas; y en los dos estudios el grupo de primer curso creó respuestas simbólicas, pero no idiosincrásicas. A pesar de todo, entre ambas investigaciones hubo dos diferencias claras.

La primera tenía que ver con la representación del cero. En nuestro estudio anterior la petición de mostrar que no había nada sobre la mesa había provocado caras de desconcierto. En el juego de las latas representar el hecho de que en una lata no había nada fue considerado como algo tan viable como el resto de las representaciones. La respuesta más común en el grupo preescolar consistió en dejar el papel deliberadamente en blanco (a menudo con comentarios de este estilo: "No escribo nada aquí porque no hay bloques en la caja"), mientras que en primer curso la mayoría de los niños utilizaron el cero convencioal. Otros niños escribían un guión, como hizo Anna (figura 5.9) o dibujaban una lata vacía.

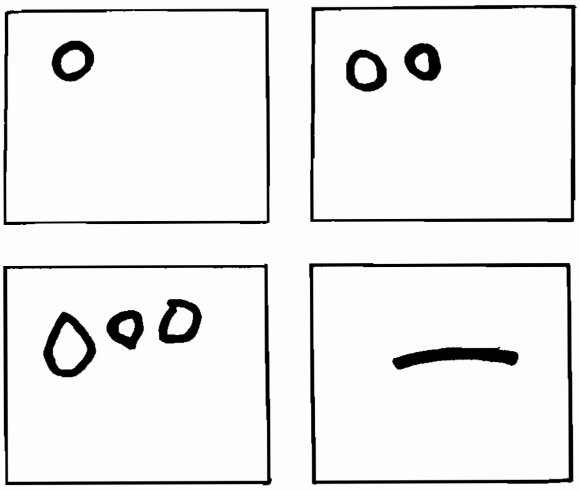


Figura 5.9. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Anna (4 años y 0 meses).*

La respuesta de Anna suscita la cuestión de si los niños consideraban su representación del cero desde la misma perspectiva que las demás representaciones. Quizá se dieron cuenta de que podían identificar la lata vacía por descarte: después de identificar las otras como teniendo en su interior determinada cantidad de bloques, sabían que la restante no contenía nada. No puede eliminarse esta posibilidad, si bien no hubo señal alguna de que los niños considerarsen la representación de "ningún bloque" como algo diferente del resto de representaciones.

La segunda diferencia entre este estudio y el anterior reside en la cantidad de respuestas pictográficas. Este tipo de respuesta —dibujar el contorno de los bloques o, con más frecuencia, dibujarlos libremente— era la respuesta global más frecuente en nuestro estudio anterior. Sin embargo, en el juego de las latas muy pocas respuestas de los sujetos en edad preescolar eran de carácter pictográfico, y en los niños de primer curso no se produjo ninguna. Cabe presumir que esto haya sido así porque en el juego de las latas los niños sabían que lo único que tenían que hacer era discriminar entre diferentes *números* de bloques, y estaban más atentos a hacerlo correctamente: era mucho menos probable que apareciese el impulso de representar otros rasgos de los bloques o las latas.

Evidentemente, se puede representar el número de bloques de las latas dibujando la correspondiente cantidad de un objeto cualquiera. Algunos niños parecían conscientes de este hecho. Shona (figura 5.10), por ejemplo, dedicó un tiempo a decidir qué objetos iba a dibujar para representar los bloques. Finalmente optó por "una niña" para un solo bloque, "dos pelotas" para dos bloques, y "una niña y dos perritos" para tres bloques. En el caso de la lata vacía dejó el papel en blanco expresamente.

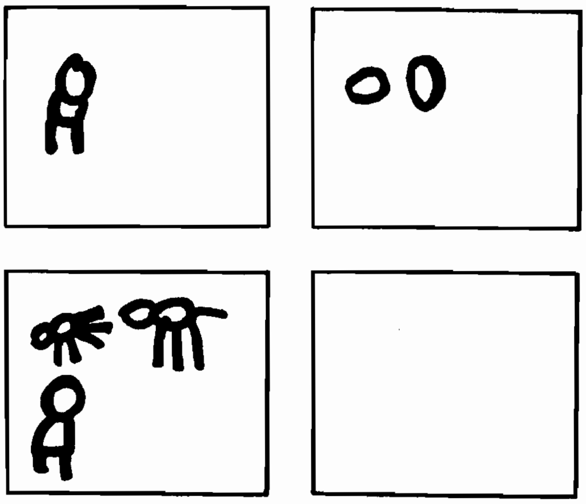


Figura 5.10. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Shona (4 años y 4 meses).*

Esta clase de respuesta se puso de manifiesto sobre todo dentro del grupo de primer curso, donde fue dada por cuatro de los diez niños. Fiona (cinco años) era uno de los cuatro. Miró por la ventana hacia afuera durante largo rato como si buscase inspiración. Acabó por dibujar un árbol, dos casas y tres puertas, elementos todos ellos visibles a través de la ventana (véase figura 5.11). Aarón adoptó una solución distinta (figura 5.12). Era un gran aficionado a la *Guerra de las Galaxias* y sus representaciones consistieron en "una nave espacial —un caza—" para simbolizar un bloque, y "un elefante y un Walker" para simbolizar dos bloques. En el caso de tres bloques dibujó "tres naves espaciales, los dos de atrás vienen persiguiendo al de adelante; eso es fuego que sale por la cola". Después de realizar los dibujos ¡añadió las cifras "1", "2" y "3" para que le ayudasen a recordar!

Los niños cuyas representaciones eran fáciles de reconocer por un sujeto adulto —por ejemplo Aarón, Fiona, Shona o Anna— solían identificar satisfactoriamente las latas. En cambio los niños cuyas respuestas fueron clasificadas como idiosincrásicas casi nunca lograron reconocerlas. Sarah es un ejemplo de ello (figura 5.13): dibujó la misma forma de bloque en todas las cajas, lo cual no le sirvió para identificar su contenido.

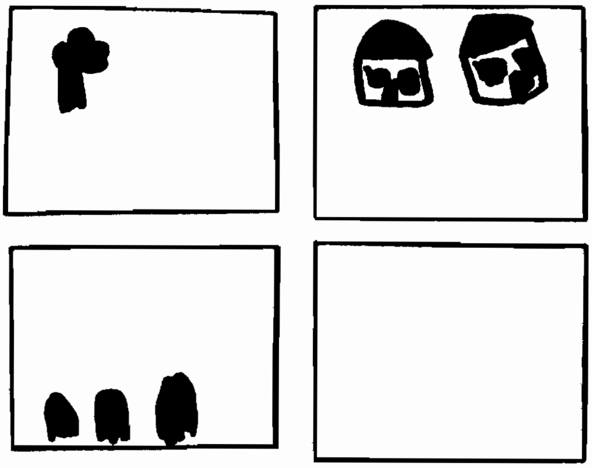


Figura 5.11. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Fiona (5 años y 0 meses).*

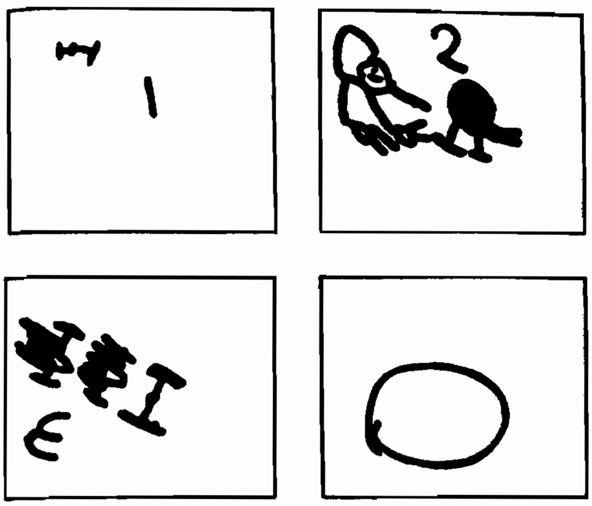


Figura 5.12. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Aaron (5 años y 6 meses).*

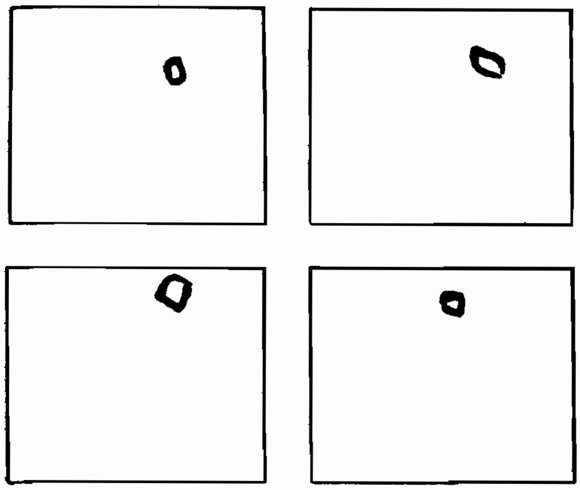


Figura 5.13. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Sarah (4 años y 3 meses): primera sesión.*

Sin embargo, aparecieron algunas excepciones interesantes. Una estuvo constituida por Richard, que puso una marca para representar un bloque, dos marcas para dos bloques y tres marcas para tres bloques. En el caso de la lata vacía también puso una sola marca, como se aprecia en la figura 5.14. Cuando más tarde se le pidió que identificase estas representaciones, no manifestó la menor confusión entre la lata vacía y la que contenía un bloque. "Aquí dentro no hay nada", dijo mientras señalaba la lata vacía. "¿Cómo lo sabes?", le pregunté. Richard indicó la pequeña línea lateral que había en la marca: "Porque ésta tiene un rabo, de manera que no hay nada dentro".

Paul (figura 5.15) mostró una habilidad semejante para reconocer una respuesta idiosincrásica.

También él había dibujado una marca para un solo bloque y dos marcas para dos bloques, pero a continuación había creado una forma intermedia entre una "C" y una "U" para representar tres bloques. No tuvo problemas para identificar más tarde este signo como representativo de tres bloques.

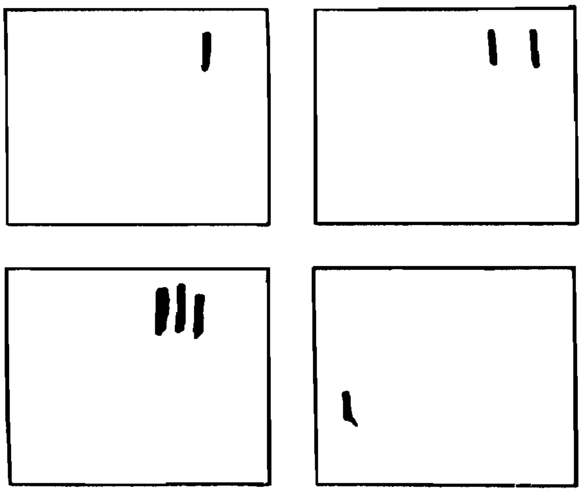


Figura 5.14. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Richard (4 años y 2 meses).*

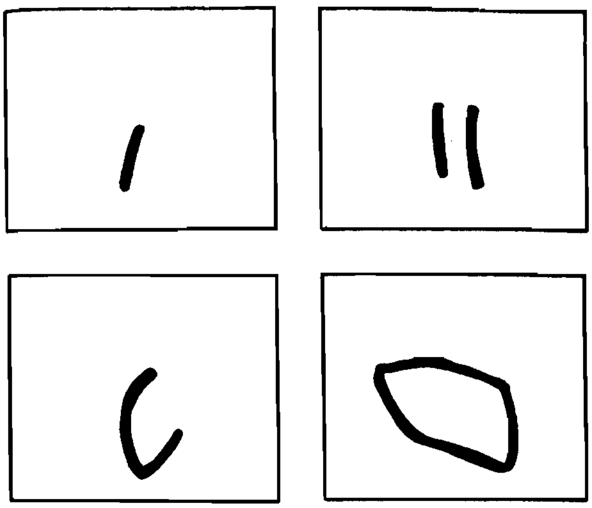


Figura 5.15. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Paul (3 años y 8 meses).*

El juego de las latas:
Una semana después

La capacidad de los niños para reconocer sus representaciones me impresionó bastante, y sentía curiosidad por saber si seguirían siendo capaces de reconocerlas después de un tiempo. Por lo tanto volví al centro escolar una semana más tarde y mostré a cada niño las latas con las representaciones que habían hecho la semana anterior. Como de costumbre, desordene las latas y los niños tenían que adivinar qué lata contenía una cantidad determinada de bloques.

Los resultados fueron sorprendentes: los niños mostraron la misma capacidad de reconocimiento que en la primera ocasión. Aquellos niños que, como en el caso de Sarah, habían elaborado representaciones idiosincrásicas y no habían logrado reconocerlas durante la primera sesión, tampoco lo lograban siete días después. Por otro lado, tanto Richard como Paul consiguieron reconocer sus representaciones idiosincrásicas y Richard se refirió espontáneamente al "rabo" de su representación del cero.

Utilicé asimismo esta segunda visita al centro escolar para averiguar si aquellos niños que en la primera sesión habían creado representaciones idiosincrásicas irreconocibles mejorarían su rendimiento al dárseles otra oportunidad. A estos niños —eran siete, todos ellos en el grupo preescolar— se les preguntó primero lo siguiente: "¿Te gustaría intentarlo de nuevo?" La mayoría de los niños se limitaron a responder que no podían o no querían imaginarse otra forma de hacerlo, y los que sí lo intentaron no tuvieron mejores resultados que antes. A continuación sugerí la idea de señalar una correspondencia biunívoca, diciendo por ejemplo:

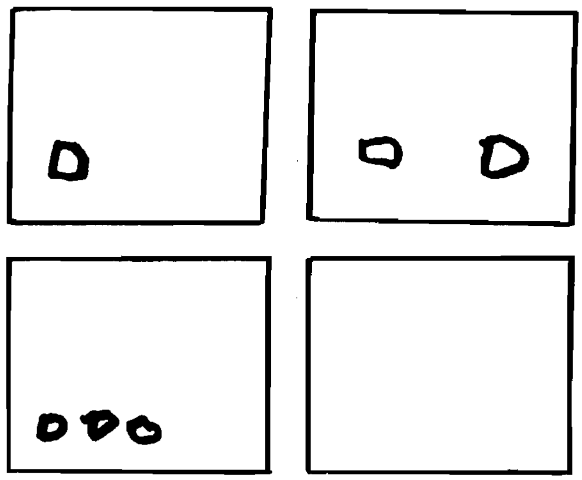


Figura 5.16. *Representaciones de 1, 2, 3 y 0 bloques, hechas por Sarah (4 años y 3 meses): segunda sesión.*

"¿Por qué no haces dos marcas en la lata que tiene dos bloques dentro?" Esto provocó una inmediata respuesta. Cinco de los siete adoptaron en seguida la estrategia icónica a partir de un único ejemplo, y luego la generalizaron al resto de latas sin necesidad de nuevas sugerencias. Uno de los cinco niños fue Sarah, que había creado las primeras cuatro formas que imitaban a bloques y que aparecen en la figura 5.13, cuyo segundo intento se muestra en la figura 5.16. Los otros dos niños, del grupo de siete, requirieron nuevos ejemplos, pero también acabaron adoptando la regla en cuestión. Todos estos niños fueron capaces de identificar correctamente sus respuestas. Así, al final de estudio los veinticinco niños en su totalidad habían creado conjuntos reconocibles de respuestas, con necesidad de estímulo adicional o no.

La representación infantil de la suma y la resta

A los niños estudiados por Miranda Jones y por mí, que hemos mencionado antes en este capítulo, no sólo se les pidió que representasen cantidades de bloques, sino también sumas y restas sencillas que se llevaron a cabo con los bloques. Habíamos previsto que esto resultaría más difícil que representar cantidades, pero pensamos que los niños descubrirían cosas de interés, tal como había ocurrido al pedírseles que representaran cantidades. Esperábamos asimismo que los niños de más edad utilizarían los símbolos convencionales "+", "-" e "=" que empleaban normalmente en la escuela.

Utilizamos dos tareas para suscitar las representaciones infantiles de la suma y la resta. En la primera —la tarea de las "operaciones completas"— había que representar la cantidad inicial y aquello que le había sucedido. Un ejemplo normal de esta tarea consistía en que Miranda Jones colocaba dos bloques delante del niño, sobre la mesa, y luego añadía dos más, diciendo: "¿Podrías mostrar que primero teníamos dos bloques y después hemos añadido otros dos?" También se emplearon otras versiones de la tarea: tres bloques añadidos a un bloque, cinco añadidos a seis, cinco quitados de seis y uno quitado de tres.

Para sorpresa nuestra descubrimos que ni un solo niño se mostró capaz de crear una representación adecuada de estas sumas y restas. Con gran diferencia la respuesta más frecuente —comprobada en casi dos tercios de los niños— se limitó a representar la cantidad final que quedó sobre la mesa. Sin embargo los niños también crearon otras respuestas: algunos representaron la cantidad inicial, otros mostraron la cantidad sumada o restada, y hubieron quienes creaban diversas combinaciones de las cantidades iniciales, sumadas/restadas y finales.

Un reducido grupo de niños, en particular aquellos cuya respuesta predominante era de carácter pictográfico, trataron de mostrar lo que había ocurrido apelando al dibujo de manos o de flechas (véase la figura 5.17). Estos intentos eran bastante ingeniosos, y cuando se nos dice qué clase de transformación tratan de representar, el significado suele apreciarse con claridad. Sin embargo ninguna de las representaciones infantiles transmitió suficiente información como para resultar completamente inequívoca. Por ejemplo la representación que hizo Rosanne de "uno quitado de tres" podía identificarse fácilmente con la de "uno añadido a dos", mientras que la representación de Leigh de "dos añadido a dos" se parecía

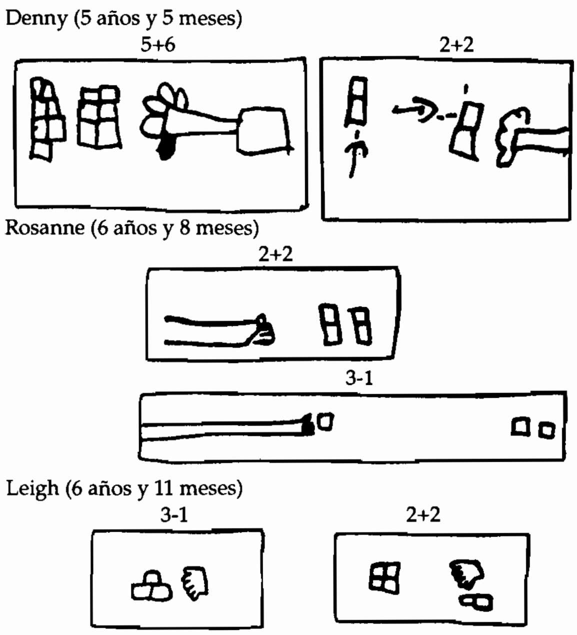


Figura 5.17. *Intentos de representar sumas y restas en la tarea de operaciones completas.*

mucho a "dos añadido a cuatro" o "dos quitado de seis".

La segunda tarea que utilizamos, la denominada tarea del "montón" era mucho más sencilla. En su versión habitual, se colocaba un gran montón formado por unos veinticinco bloques sobre la mesa, delante del niño. En este caso Miranda Jones decía: "Tenemos aquí un gran montón de bloques. Quiero que muestres lo que hago en el montón. La primera cosa que haré será esto". Entonces, por ejemplo, se quitaba un bloque del montón y continuaba diciendo: "¿Puedes mostrar que he quitado un bloque?" Si el niño comenzaba a contar el montón, Miranda decía: "No, no cuentes los bloques. No me interesa saber cuántos hay. Lo único que quiero es que muestres lo que yo he hecho en el montón". Esperábamos que al negar a los niños la posibilidad de representar la cantidad inicial o la final, tendrían que centrarse en la suma o resta efectivas. Las otras versiones utilizadas consistían en añadir tres bloques, añadir seis bloques y quitar cinco bloques.

Nos sorprendió aún más descubrir que la tarea del montón resultaba tan infructuosa como la de las operaciones completas en lo que se refiere a suscitar representaciones de la suma y la resta. La respuesta más frecuente, dada por más de la mitad de los niños, se limitaba a representar la cantidad añadida o restada en el montón, sin informar si lo que se había efectuado era una suma o una resta. Sólo once de los noventa y seis niños trataron de distinguir entre suma y resta en su respuesta, y sólo cuatro lo consiguieron de una forma inteligible para un observador no informado. Estos cuatro niños fueron Christopher (siete años y dos meses), que escribió con letras y números "quitado 1" y "añadido 3"; Habib (seis años y cinco meses), que dibujó los bloques añadidos superponiéndolos al montón, y colocó dentro de la caja los bloques sustraídos (figura 5.18); Denny (cinco años y cinco meses), que dibujó una mano añadiendo bloques para representar a los añadidos, y dibujó los bloques quitados poniéndolos otra vez dentro de la caja (figura 5.18); y finalmente Alec (cinco años y dos meses), que dibujó dos bloques para representar los que se añadían, y trazó guiones para señalar los que se quitaban. Otros niños se decidieron por opciones muy imaginativas para representar lo que había ocurrido. Por ejemplo Scott (siete años y siete meses) que representó los bloques añadidos a través de la cantidad correspondiente de soldados británicos marchando de izquierda a derecha, mientras que los bloques sustraídos eran representados por soldados japoneses que marchaban de derecha a izquierda (figura 5.18).

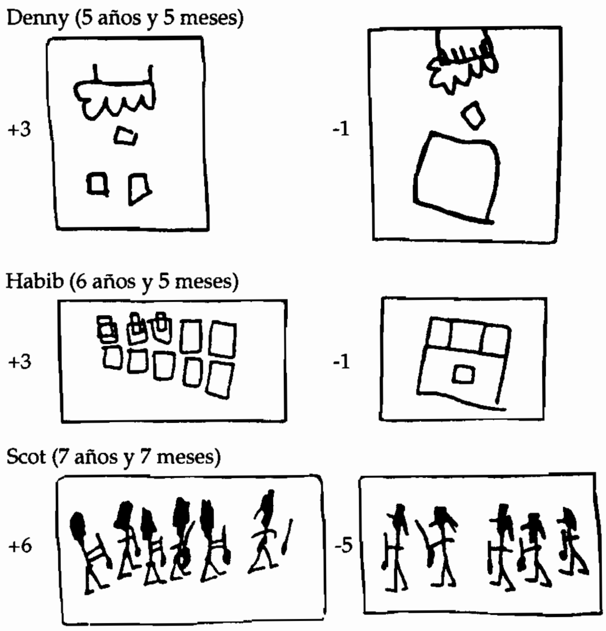


Figura 5.18. *Intentos de representar sumas y restas en la tarea del montón.*

En conjunto los niños en cuya respuesta predominante aparecían cifras o términos numéricos mostraban menos diversidad: solían representar la adición de tres bloques, la sustracción de uno, la adición de seis y la sustracción de cinco mediante un "3", un "1", un "6" y un "5" respectivamente. Sin embargo aparecieron a este respecto dos variantes de interés. Algunos niños ignoraron los bloques del montón y trataron las cuatro operaciones como si se tratase de una operación acumulativa: por lo tanto la secuencia anterior se representó mediante "3", "2", "8" y "3". Otros asignaron al montón una cantidad arbitraria de bloques, y a continuación efectuaron sumas o restas acumulativas con base en dicho número arbitrario: creaban así una secuencia del tipo "53", "52", "58" y "53".

En contraste con esta demostración de inventiva, no hubo un solo niño que utilizase en las tareas de operaciones completas o del montón los operadores convencionales "+" y "-" para representar la suma y la resta. Esto resulta especialmente chocante si se recuerda que, salvo los pertenecientes al grupo de nivel preescolar, todos los niños que participaron en el estudio utilizaban cada día en sus cuadernos de clase el simbolismo formal de la aritmética (véase la figura 5.1). Sin ninguna duda estos niños no consideraron que tales signos estuviesen relacionados con los problemas que les habían sido planteados. Habíamos previsto que no sería fácil para los niños el representar la suma y la resta, pero no esperábamos en absoluto esta generalizada reticencia ante el uso de los símbolos propios de la aritmética escolar.

Un objetivo para representar la suma y la resta

Había que conceder una reflexión muy atenta a la posibilidad de que los niños creasen representacionese más perfeccionadas de la suma y la resta, si existía una explicación o un propósito más claros que lo justificasen. En consecuencia, intenté diseñar un juego similar al de las latas, en el que los niños tuviesen que representar sobre cada lata las sumas o restas que hubiesen llevado a cabo en su contenido. Esto se reveló como algo inusitadamente difícil: al igual que había ocurrido anteriormente, la atención de los niños estaba centrada en el resultado de la transformación, y casi invariablemente aspiraban a representar la cantidad final que quedaba en la lata.

Miranda Jones adoptó un enfoque diferente de este mismo problema. En un estudio posterior (Jones, 1982) estableció una tarea de comunicación en la que dos niños se sentaban a ambos lados de una pantalla, cada uno de ellos con un grupo de bloques. A los niños se les planteaban dos problemas diferentes en los que tenían que enviar mensajes escritos al otro niño. Se intentaba que ambos problemas requiriesen que el niño representase sumas y restas sobre un papel. Los niños participantes en este estudio tenían entre cinco y nueve años de edad.

El primer problema comenzaba construyendo una torre de cuatro bloques delante de uno de los niños. Se pedía a éste que comunicase al otro niño la información suficiente como para que el segundo construyese una torre de la misma altura exactamente. A continuación Miranda Jones quitaba (o añadía) bloques a la torre y le pedía al primer niño que transmitiese la información correspondiente al otro niño: "Ahora voy a hacer una cosa en tu torre. Le pondré más bloques o le quitaré alguno y tú tendrás que enviarle un mensaje —al otro niño— para que él pueda hacer lo mismo en su torre".

Esta diferencia de procedimiento afectó muy poco las representaciones de los niños, pero eran escasos los que lograban representar sumas y restas. Una vez más la respuesta más frecuente consistió en limitarse a describir el resultado final de la operación, con cifras (por ejemplo "7") o con palabras ("ahora tengo siete bloques"). Fueron muy pocas las respuestas que describieron efectivamente las operaciones llevadas a cabo en la torre y todas ellas utilizaban el lenguaje corriente (por ejemplo "añadidos 3 arriba" o "quitados 2 de 5") en lugar de los signos aritméticos convencionales.

De hecho quizás tales símbolos hayan sido innecesarios, ya que entre los niños parece existir el supuesto predominante según el cual los mensajes que consistían en un solo número mostraban la cantidad final de bloques que había en la torre. Un par de niños de siete años, sin embargo, fracasó de manera sistemática en sus comunicaciones. Paul, por ejemplo, escribía "puestos cinco bloques" (lo cual significaba cinco bloques en total), cosa que Leila consideró como instrucción para añadir cinco bloques a los que ya tenía. Un exceso de información originó un malentendido entre dos niños de nueve años: Gareth, que tenía delante una torre de cuatro bloques, escribió: "cuatro bloques en un montón, uno encima del otro", y Catriona interpretó el mensaje como una instrucción consistente en colocar un conjunto de cuatro bloques sobre otro conjunto de cuatro.

El otro problema que se planteaba a los niños era una versión "comunicacional" de la tarea del montón. Los sujetos comenzaban con un gran montón de bloques delante suyo. A continuación Miranda Jones quitaba bloques del montón de uno de los niños, o bien añadía nuevos bloques; la tarea de este niño consistía entonces en enviar un mensaje al otro niño para que éste pudiese hacer lo mismo en su montón. En este caso, como en la tarea del montón, no era posible representar la cantidad final porque se desconocía el número de bloques que había en cada montón.

Al igual que anteriormente, esta diferencia de procedimiento no varió demasiado la situación y la respuesta que se dio más a menudo consistió en representar la cantidad que se había añadido o quitado. Sólo una de las niñas empleó los operadores convencionales ("+" y "-") y lo hizo de forma idiosincrásica: escribió "4-4" cuando se trataba de añadir cuatro bloques, y "6+6" cuando se trató de quitar seis. Su compañero no logró interpretar correctamente estos mensajes. Otras respuestas iban desde el sucinto "quitar uno" hasta el locuaz "toma cuatro bloques con la mano, de los que hay en la caja, y después ponlos sobre los bloques que ya están fuera, de este modo" (acompañado por un diagrama). Por lo tanto, aunque en lo referente a suscitar adecuadas representaciones de las sumas y restas, no se mostró más eficaz en conseguir que los niños utilizasen los símbolos aritméticos convencionales.

Resumen

En este capítulo se han descrito con detalle diversos estudios realizados en Edimburgo, donde a los niños se les pedía que representasen cantidades —o cambios en los que intervenían cantidades— utilizando lápiz y papel. Estos descubrimientos confirman el anterior estudio efectuado por Barbara Allardice (1977) con niños estadounidenses, y a su vez han sido confirmados por otras investigaciones llevadas a cabo en diferentes partes del mundo, entre las que se cuentan tres estudios sobre niños suizos (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980; Sinclair, Siegrist y Sinclair, 1983; Sinclair, 1984), un estudio sobre niños australianos (Litwin, 1984) y otro estudio sobre niños escoceses (Potts, 1983). Todos estos investigadores utilizaron tareas ligeramente distintas y tenían propósitos diferentes, pero a pesar de todo surge un cuadro global notablemente coherente.

En primer lugar ahora se ha puesto de manifiesto que hasta los niños en edad preescolar están capacitados para representar pequeñas cantidades, espontáneamente o con un pequeño estímulo. Sus representaciones apelan primordialmente a una correspondencia biunívoca (es decir, son pictográficas o icónicas). La demostración más clara de ello nos la facilita el juego de las latas en el que los niños no se limitaban a dar respuestas aisladas sino que generaban sistemas de notación coherentes.

En segundo lugar, la mayoría de los niños de esta edad también pueden representar el cero. A pesar de las frecuentes afirmaciones de que el concepto de cero es intrínsecamente difícil, los niños estudiados aquí no parecen experimentar una dificultad especial ante esta noción. Una vez más esto lo demuestra con la máxima claridad la tarea de las latas, donde los niños deben identificar una lata vacía por medio de una representación colocada en la tapa. En este estudio representar el cero no les resultaba más costoso que representar las cantidades uno, dos o tres.

En tercer lugar, a diferencia de su disposición para representar la cantidad, incluso a los niños de nueve años se les plantean dificultades para representar las operaciones de sumar y restar. Siempre que pueden, optan por representar una cantidad que suele ser el resultado final de la operación y no la cantidad sumada o restada. En tareas como la del montón, donde no se puede representar la cantidad final porque la desconocen, representarán la cantidad sumada o restada, pero no informarán acerca de la dirección específica del cambio.

Finalmente varios de estos estudios muestran en los niños de edad escolar un llamativo rechazo ante el empleo de los operadores aritméticos convencionales. Esto resulta particularmente desconcertante, ya que por lo general les cuesta representar la suma y la resta. Cabría esperar que se manifestasen más dispuestos a utilizar signos cuyo propósito específico consiste en representar precisamente estas operaciones. Es algo aún más desconcertante si se tiene en cuenta que, por lo menos los niños de la investigación de Edimburgo, utilizaban estos signos en su trabajo escolar cotidiano.

Estos hallazgos poseen numerosas consecuencias de importancia (a las que más adelante nos referiremos) con respecto a la forma en que se introduce el simbolismo escrito. En especial señalan una llamativa falta de coincidencia entre el sistema de símbolos que se exige que aprendan los niños y las conceptualizaciones espontáneas que surgen en ellos. En lo que tiene que ver con la representación de la cantidad, al parecer los niños mismos tienden a utilizar métodos basados en la correspondencia biunívoca, pero se les exige, por el contrario, que empleen un sistema simbólico. En lo que tiene que ver con la representación de sumas y restas, el problema es de un orden completamente distinto. Al parecer, la noción global de representar por escrito estas transformaciones es algo que a los niños les cuesta mucho captar, si bien no se sabe con precisión por qué. A pesar de todo, desde edades muy tempranas a los niños se les presentan símbolos ("+" y "-") que aspiran a cumplir este objetivo. Esto explica en cierta medida por qué la comprensión infantil de estos símbolos no supera el contexto dentro del cual se enseñan. Parece surgir una tajante y perturbadora separación entre el empleo de los símbolos en el aula y la capacidad que tienen los niños para aplicarlos a problemas que se les plantean en otros lugares.

LECTURA: DE LA CUALIDAD A LA CANTIDAD EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS CANTIDADES*

PRESENTACIÓN

El presente artículo es el reporte de una investigación psicogenética sobre la representación gráfica de las cantidades. Los autores realizan el estudio con niños de edad preescolar con el propósito de analizar los tipos de producción gráfica que conducen a los numerales.

Para realizar dicho análisis, Bollás y Sánchez consideran que es importante examinar la manera a través de la cual los niños construyen progresivamente la correspondencia biunívoca en el nivel de la representación gráfica. Distinguen dos tipos de correspondencia: cualificada y cuantificada. La primera es una correspondencia, uno a uno, a través de semejanzas de los elementos, se recuperan los aspectos cualitativos como la forma, la posición o el tamaño. La segunda es una correspondencia, uno a uno, de elementos cualesquiera dejando de lado aspectos cualitativos.

Cuando se le presenta al niño una cantidad determinada de elementos, por ejemplo ocho cubos y se le solicita su producción gráfica. Se pueden observar las siguientes respuestas:

> *Una copia de las características cualitativas, pero no así de la cantidad de elementos presentados (ausencia de correspondencia biunívoca).*
>
> *En las producciones de los niños se recupera la cantidad de elementos que se le presentan (características cuantitativas). Se establece una correspondencia estricta entre cada uno de los elementos del modelo y los elementos representados gráficamente. Se trata de una copia del modelo donde se recuperan también las características cualitativas (correspondencia biunívoca cualificada).*
>
> *En las producciones, se recuperan las características cuantitativas a través de una correspondencia estricta. Las características cualitativas ya no son tomadas en cuenta (correspondencia biunívoca cuantificada). En este tipo de producción los niños frecuentemente utilizan numerales.*

Citando los trabajos de Hughes (1987), subrayan la importancia de las producciones pictográficas y la génesis de la correspondencia biunívoca dentro de este tipo de producciones. Encontrando así varios niveles de la producción pictográfica (sin cantidad, intermedio I, con poca cantidad, intermedio II, y con cantidad).

De igual manera, indican que las producciones mixtas (donde aparecen simultáneamente aspectos cualitativos y cuantitativos) con un precedente importante para la representación gráfica convencional.

DE LA CUALIDAD A LA CANTIDAD EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS CANTIDADES

Resumen

Uno de los aspectos implicados en la noción de número tiene que ver con su representación gráfica convencional, con el uso de numerales. Consideramos que la representación gráfica de las cantidades es una de las vías que permite esclarecer la forma en que los niños se aproximan a este conocimiento. En el presente artículo presentamos los resultados de una investigación psicogenética que explora los tipos de representación gráfica que conducen a los numerales. Se sostiene que éstos son el resultado de modificaciones progresivas en la representación gráfica de las cantidades que espontáneamente realiza el niño cuando registra una cantidad de "n" elementos. Se trata de una génesis en donde se distinguen tres niveles: producciones pictográficas, mixtas y estereotipadas. Niveles que dan evidencias del paso de la cualidad a la cantidad.

* Pedro Bollás y M. Sanchéz. "De la cualidad a la cantidad en la representación gráfica de las cantidades", en: *Educación Matemática*. vol. VI, No 3. México, Ed. Iberoamericana, 1994. pp. 5-20.

Presentación

En este documento presentaremos los niveles encontrados en un estudio sobre la representación gráfica de las cantidades, en niños de edad preescolar (4 a 6 años). En estos niveles examinaremos los procesos de cambio por los que transita el sujeto para la adquisición de los números escritos. Asimismo analizaremos el pasaje de la cualidad a la cantidad, dado que es fundamental para acceder a una representación convencional (Bollás, 1991).

Para comenzar, nos parece oportuno dar algunas consideraciones de orden teórico y metodológico.

Consideraciones teóricas

Partimos de la premisa de que la adquisición de la noción de número por parte del niño implica dos aspectos distintos pero complementarios: el concepto y la escritura numérica. Ambos aspectos tienen como base común a las cantidades.

El concepto, desde una perspectiva piagetiana, hace referencia a la conservación de las cantidades, en función de una construcción progresiva de los agrupamientos cualitativos (lógica de clase y de relación-seriación). Pero los agrupamientos cualitativos, si han de contribuir a la conservación de las cantidades, exigen al niño dejar de lado las cualidades de los objetos que se están agrupando. Este "dejar de lado" es lo que Piaget llamó la abstracción de las cualidades diferenciales (Piaget e Inhelder, 1984; Piaget, 1978). Es decir, la capacidad en el niño para dejar de lado las cualidades de los objetos que se están agrupando y, así, considerarlos como unidad, hacer cada elemento individual y equivalente a cada uno de los otros.

Sin embargo, en la adquisición de la noción de número, no solamente interviene el concepto, sino que es necesaria también su escritura en un sistema de signos y reglas convencionales. Los numerales son una forma de representar gráficamente el concepto, por lo que numeral y concepto no son idénticos. Además, la relación entre numeral y el conjunto de elementos de lo real es arbitrario, en el sentido de que podrían estar convenientemente representados por cualquier otro grafismo; sin embargo lo arbitrario descansa en una convención social. El numeral es, necesariamente, colectivo y es transmitido de manera particular por la escuela. Se trata de uno de los primeros conocimientos que, en el campo de las matemáticas, la escuela le ofrece al niño.

Hemos querido mencionar la relación de no identidad entre numeral y concepto porque, en el trabajo usual que se realiza en las escuelas primarias, se otorga una exagerada confianza a la representación gráfica convencional (Labinowicz, 1988). Así, es usual encontrar en los libros de texto la asociación entre numeral y una serie de dibujos, con la pretensión de hacer referencia a dicho numeral, sin tomar en cuenta que los dibujos mismos son otra forma de representación.

Probablemente, si se da una exagerada confianza a la representación gráfica convencional, se deba a que subyace el supuesto de una equivalencia entre concepto y su representación. En otros términos, se supone que si el niño desconoce los numerales, no sabe dar significado a las cantidades. Por el contrario, en este documento se sostiene que el niño en edad preescolar utiliza grafismos que no son convencionales, tratándose de una construcción más individual que le permite representar e interpretar las cantidades a su manera (Nemirovsky, 1988). Estos grafismos pueden consistir en dibujos, marcas, seudografías, etc., que son trazados por el niño sobre un papel (o cualquier otra superficie que se preste para ello) para representar una cantidad de *n* elementos. En tanto que son una construcción individual y no convencional, los designamos con el nombre de símbolos gráficos.

El simbolismo en el niño es considerado como una tarea importante, a través de la cual se puede favorecer su capacidad representativa y, con ello, el pasaje del símbolo al signo (SEP, 1981). Si el estudio se centra en torno a la representación gráfica referida a cantidades, permitiría esclarecer el simbolismo gráfico que conduce a los numerales. Resulta interesante entonces examinar si las producciones gráficas son semejantes para todas las edades (de 4 a 6 años) o si, por el contrario, se trata de una génesis, es decir, de modificaciones progresivas.

También puede analizarse si en estas modificaciones progresivas se va construyendo la diferencia entre lo cualitativo y lo cuantitativo en el niño porque, a final de cuentas, un numeral representa cantidades. En este sentido cabe preguntarse ¿qué tipo de producciones gráficas emplea el niño en edad preescolar para representarse las cantidades?, ¿qué tipo de producciones gráficas caracterizan la abstracción de las cualidades que conducen a los numerales?

Si al niño se le presenta una determinada cantidad de elementos, por ejemplo nueve piedras, y le solicitamos su registro gráfico, cabe preguntarse si su producción será una copia fiel del modelo presentado, si representará tantos elementos como el modelo lo indica, es decir, si establecerá una correspondencia biunívoca; de ser así, ¿qué tipo de correspondencia: cualificada o cuantificada?

Recordemos que la correspondencia biunívoca se refiere al hecho de que los elementos de un conjunto A se correspondan con los de un conjunto B, de tal suerte que a cada elemento de A le corresponde un elemento de B.

Piaget (1978) menciona dos tipos de relación biunívoca: a) la relación biunívoca cualificada, que está fundada en una correspondencia a través de semejanzas de los elementos; en este tipo de correspondencia priman las características cualitativas tales como la forma, el color, el tamaño, etc.; y b) la relación biunívoca cuantificada que se refiere a la acción de vincular elementos cualesquiera, uno a uno, haciendo abstracción de las cualidades diferenciales.

De esta manera el estudio de la correspondencia biunívoca, en el nivel de la representación gráfica, es importante ya que a través de ella nos aproximamos al análisis de lo cualitativo y de lo cuantitativo que presentan los significantes gráficos producidos por los niños.

Los estudios relacionados con la representación gráfica de las cantidades llevadas a cabo por Sastre y Moreno (1988) en España y por Martín Hughes (1987) en Edimburgo, Escocia, han demostrado que los niños apelan en sus producciones a una correspondencia biunívoca.

Al realizar el análisis de 350 representaciones gráficas de niños entre 6 y 10 años, Sastre y Moreno distinguen cuatro tipos de conducta que dan indicio de "... una génesis de la representación gráfica de la cantidad" (Sastre y Moreno, 1988, p. 32):

Conducta I. En este tipo de producción el niño realiza un dibujo sin ninguna relación con la cantidad de elementos que debe representar; sin embargo el niño mismo la considera como una expresión inequívoca de la cantidad.

Conducta II. Los dibujos realizados en este tipo de producción establecen una relación biunívoca con los elementos presentados. Según el nivel de progresión, se distinguen tres apartados:

> Conducta IIa. Los niños realizan un dibujo que se considera global, en donde están representados los elementos. Estos se encuentran relacionados figuralmente entre sí. El ejemplo que presentan las autoras es el siguiente:
> Supóngase el dibujo (global) "... un paisaje compuesto de una casa, dos árboles, un sol y una nube (es decir, cinco elementos) y de los que el niño afirma que constituye una expresión inequívoca de cinco caramelos" (*Idem*).
> Conducta IIb. En este tipo de producción, la correspondencia es evidente entre la cantidad y el grafismo del niño. Los elementos están claramente diferenciados. Sin embargo las características cualitativas siguen estando presentes. "Así, por ejemplo, para expresar 8 caramelos, el niño dibuja ocho personajes, ocho árboles, etc., o bien copia la realidad: dibuja tantos caramelos como el experimentador ha colocado sobre la mesa". (*Ibidem*, p. 33.)
> Conducta IIc. En este tipo de producción, el niño realiza dibujos esquemáticos; no se recuperan las características cualitativas de los objetos a representar. En esta producción, los significantes gráficos están claramente individualizados, como el hecho de trazar "... tantas cruces, trazos verticales, puntos, círculos, triángulos, etc., como elementos quiere representar" (*Idem*).

Conducta III. Este tipo de producción se caracteriza porque el niño utiliza cifras (numerales). Sin embargo los asimila a su propio sistema cuantitativo. Así, por ejemplo, si se colocan cinco elementos, el niño realiza: 1 (para un elemento), 2 (para dos), 3 (para tres), etc., lo que no toma el carácter inclusivo del número.

Conducta IV. Los niños utilizan numerales con su carácter inclusivo: sin embargo no quita que algunos niños utilicen ambos tipos de conducta (III y IV).

Las investigadoras indican que las primeras dos conductas parecen propias de los niños más pequeños. En ellas predominan las características cualitativas y permanecen "... ausentes o inidentificables las propiedades cuantitativas de los objetos que se le pide (al niño) que represente" (*Idem*).

Por su parte, Martin Hughes, al realizar un examen de las producciones encontradas por él, clasifica las respuestas en cuatro categorías, brevemente descritas enseguida:

Respuesta idiosincrásica. Se trata de producciones en las cuales no había relación entre la cantidad representada y la producción gráfica. Este tipo de producción consistía en la utilización de garabatos, grafías aisladas, o bien objetos irrelevantes, como por ejemplo una silla, el dibujo de una muñeca, etc.

Respuesta pictográfica. En este tipo de producción el niño representa algo parecido al modelo que tiene enfrente, "...dejando constancia asimismo de la cantidad existente de objetos. Una respuesta se considera pictográfica si el niño colocaba en ella alguna indicación correspondiente a la forma, posición, color u orientación de los bloques" (Hughes, 1987, p. 8).

Respuesta icónica. Las producciones de este tipo, al igual que las pictográficas, consisten en dar evidencia de la cantidad presentada en una correspondencia estricta. Sólo que en este caso las producciones no dan evidencia de las características cualitativas de los objetos a representar. Son arbitrarias, en el sentido de que no guardan ninguna relación de semejanza, pero no son convencionales.

Respuesta simbólica. Hughes llama simbólica al tipo de respuesta que utiliza significantes gráficos convencionales. En este tipo de producción el niño emplea numerales para representarse la cantidad pero también es común que los niños escriban los nombres de los números.

Se puede apreciar que las respuestas pictográficas y las icónicas se distinguen en que, en las primeras, priman las características cualitativas, en tanto que las icónicas, al igual que las simbólicas, resaltan el aspecto cuantitativo. Pero, al mismo tiempo, los dos tipos de respuesta se parecen en el hecho de hacer patente la correspondencia biunívoca: la respuesta pictográfica hace referencia a una correspondencia biunívoca cualificada, en tanto que la respuesta icónica (y simbólica) hace referencia a una correspondencia cuantificada.

Por nuestra parte, realizamos un estudio de la representación gráfica de las cantidades para realizar un análisis más enfocado en la génesis de la relación biunívoca, que nos permita aclarar el pasaje de la cualidad a la cantidad y de ésta a la representación gráfica convencional.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS Y SITUACIONES EXPERIMENTALES

Sujetos de investigación

Después de realizar un sondeo previo con 30 niños de 4 a 8 años de edad, en esta investigación se decidió entrevistar a 18 niños de educación preescolar, en una escuela oficial ubicada al sur de la ciudad de México. Las entrevistas tuvieron una duración promedio de 30 a 40 minutos. Los sujetos fueron seleccionados según el grado que cursaban: seis niños de primer grado, ocho de segundo y cuatro de tercer grado.

Método

Para realizar este estudio nos orientamos según las características del método crítico. La adopción de este método nos exige rehusar a preguntas fijas y estandarizadas, que puedan sugerir o limitar las producciones espontáneas de los niños. Sabemos bien que todo cuestionario, así como el desconocimiento del vocabulario del niño, son susceptibles de sugerir la respuesta (Piaget, 1978).

Recordemos que el término "crítico" que define a este método introduce una controversia sistemática a las respuestas del niño, no porque éstas sean erróneas, sino para captar su estructura de pensamiento. En este sentido nos interesa sobre todo un análisis cualitativo más que estadístico. De ahí la necesidad de utilizar contraargumentos extraídos, principalmente, de las variaciones en las condiciones de las situaciones experimentales presentadas, con el fin de explorar en profundidad las producciones gráficas de los niños.

A continuación presentamos las situaciones experimentales y sus variaciones, a través de las cuales se realizó el estudio:

Primera situación

Esta primera situación permite orientar al niño para que realice producciones gráficas de pequeñas cantidades (uno, tres y cuatro). Al mismo tiempo está destinada para la producción gráfica de la ausencia de cantidad.

Se le presenta al niño cuatro cajas pequeñas (tapadas) exentas de todo tipo de impresión gráfica en sus exteriores, para evitar la sugestión. La primera de ellas contiene una piedra, la segunda tres piedras, la tercera cuatro y la cuarta caja se encuentra vacía. Inicialmente nos aseguramos que el niño reconozca los materiales que se le presentan. Posteriormente se le presenta la primera caja y se le invita a que la destape y que nos diga qué es lo que ve; dada la respuesta le señalamos que vamos a jugar con esa piedra y la tenemos que sacar, pero que después tendremos que regresarla a su lugar original: "para que nos acordemos en dónde estaba, hay que poner algo (en ese momento se le da una tarjeta y un plumón) que nos diga lo que estaba en la caja". Terminada su producción, se saca la piedra y se introduce la tarjeta en la caja; la piedra es colocada sobre la mesa y la caja se retira. Enseguida se le presenta la segunda caja (tres piedras) y el experimentador sólo dice: "ahora quiero que me hagas lo mismo con ésta" y se le da una nueva tarjeta. Así sucesivamente para las cajas restantes, de tal suerte que, terminada la situación, sólo quedaban sobre la mesa las ocho piedras. Cabe señalar que el niño no necesita recibir la indicación que aluda a retener la cantidad, ya que ésta ese parte del diseño experimental.

Si bien se presentaron niños que iniciaban su producción con presteza, también hubo quien dudaba ("¿cómo?"). En estos casos el examinador se limitaba a contestar: "como tú quieras". En esta primera situación se evitaban términos como "número", "cantidad", "palitos", "bolitas", "escribir" y "apúntalo", a menos que el propio niño los mencionara como parte de su código lingüístico. Esto implica, sencillamente, aceptar el nombre que los mismos niños le dan a los objetos.

Segunda situación

Esta situación está destinada para producciones gráficas de cantidades relativamente grandes (ocho y nueve elementos).

Con las ocho piedras de la situación anterior el examinador forma una hilera horizontal, misma que utiliza como modelo para solicitarle al niño suu producción; para ello se le daba una nueva tarjeta que, una vez realizado el registro, se retira.

Una primera variación consiste en colocar las piedras en un montón cuidándose de que no quedaran encimadas. Ya realizada su producción, se colocan las piedras a un lado, sobre la mesa. Asimismo se retira la tarjeta.

En una segunda variación, se le presentan al niño cuatro cubos pequeños en hilera en forma horizontal y después en forma vertical. Si su producción gráfica apelaba a una correspondencia biunívoca, se le presentaba una tarjeta (previamente elaborada por el examinador) que contradecía dicha producción.

Una tercera variación consiste en presentar los cuatro cubos y cinco piedras en forma horizontal, de tal manera que unos y otras estén intercalados. De nueva cuenta se solicita al niño su producción gráfica, para lo cual se le da una tarjeta nueva.

Tercera situación

Esta situación está destinada para la producción de pequeñas cantidades (de cero a seis elementos).

Se le presenta al niño un dibujo de un payaso[1] de un metro por medio metro; la boca de éste es un orificio por el que pueden introducirse pequeñas pelotas que van a parar al reverso de la figura y las cuales pueden sacarse con facilidad. Asimismo, a metro y medio de distancia, se encuentra una petaca que contiene seis pelotas.

Se le pide al niño que juzgue la situación. Se le invita a que lance las pelotas a través de la boca del payaso. Controlando la distancia, el examinador también controla determinada cantidad de elementos. Una vez introducidas las pelotas, se le pide que las saque y realice su producción. Llevada a cabo ésta, se repite la actividad. Una vez que se tienen de dos a tres producciones, las tarjetas se colocan sobre la mesa y todas las pelotas en la petaca.

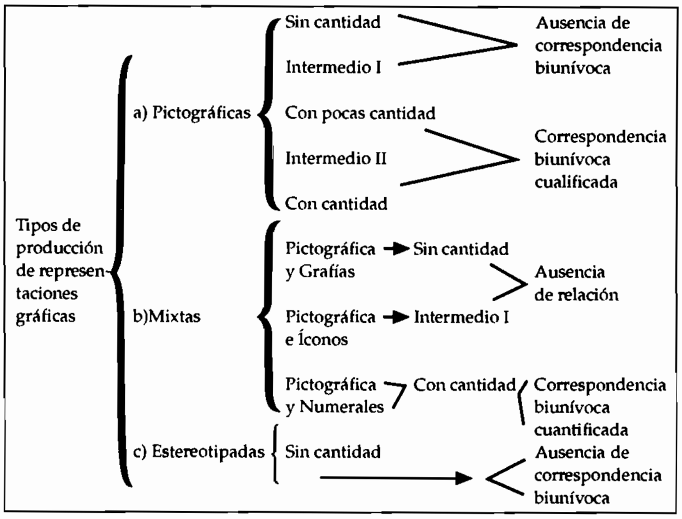
RESULTADOS[2]

Tipo de producciones de representaciones gráficas encontradas

Con respecto al tipo de producción, con los datos encontrados hemos construido un método de análisis que es conveniente presentar, para tener una visión de conjunto. La presentación de dicho modelo es conveniente, ya que en él se ilustra la producción gráfica encontrada y su vinculación con la correspondencia biunívoca. He aquí, esquemáticamente, el modelo:

a) Producciones pictográficas

En este tipo de producción predominan las características cualitativas, es decir, las representaciones de los niños tienen algo de parecido con el modelo que se les presenta: forma, posición, etc. En las respuestas pictográficas señaladas por Hughes, el niño "deja constancia de la cantidad existente de objetos". Por nuestra parte, en las representaciones analizadas consideramos que dejar constancia de la cantidad a través de la representación es tan sólo un nivel, entre otros, de la producción pictográfica. En este sentido subdividimos a este tipo de respuesta en:



Modelo propuesto para el análisis de la producción gráfica.

a.1) Producción pictográfica sin cantidad

En las producciones de este tipo predominan las características cualitativas de los objetos por representar y el niño no toma en cuenta la cantidad de los mismos, por lo que los significantes utilizados para la representación pueden ser considerados como pictográficos con ausencia de relación biunívoca.

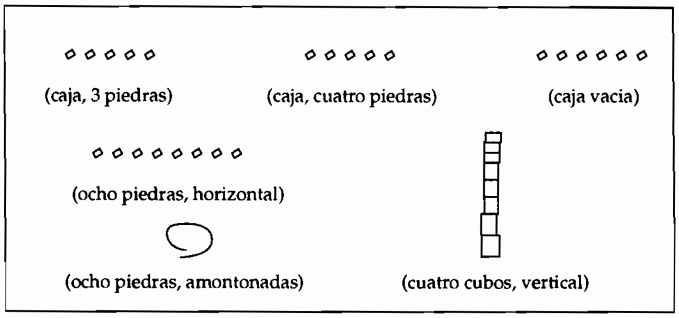


Figura 1. Producciones pictográficas sin cantidad
Laura (4;10)

a.2) Producción pictográfica intermedio I

Este tipo de producción se caracteriza por un nivel intermedio entre producciones pictográficas con ausencia de relación biunívoca (sin cantidad) y aquellas producciones en donde se da un inicio de correspondencia.

La respuesta pictográfica intermedia I sigue recuperando el aspecto cualitativo de los objetos (por ejemplo la forma). Se da un comienzo para establecer la correspondencia biunívoca con pequeñas cantidades (de uno a cinco elementos); sin embargo dicha correspondencia no está sólidamente establecida en la respuesta, ya que ante una contraargumentación el niño deja de admitirla (Fig. 2). Recordemos que la contraargumentación es una característica del método crítico que permite precisar distintos niveles en el niño cuando resuelve una determinada tarea.

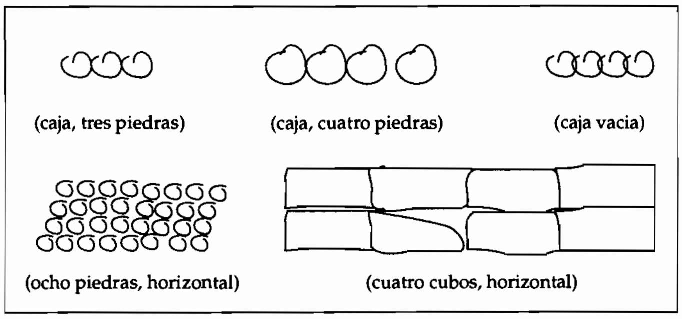


Figura 2. Produccion pictográfica intermedio I
Nayeli (4;8)

a.3) Producción pictográfica con poca cantidad[3]

En este tipo de representación gráfica la correspondencia término a término está sólidamente establecida, pero sólo con pequeñas cantidades (de uno a cinco elementos), ya que cuando se le presentan al niño ocho o nueve elementos dicha correspondencia ya no es admitida (Fig. 3).

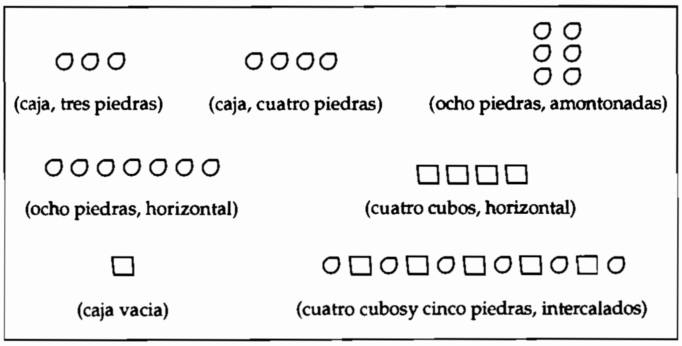


Figura 3. Producciones pictográficas con poca cantidad
Arlem (6;0)

a.4) Producción pictográfica intermedio II

Las producciones de este tipo se caracterizan por un nivel intermedio entre pictográficas con poca cantidad y pictográficas con cantidad. Si bien la correspondencia biunívoca con poca cantidad se encuentra establecida, lo típico de estas producciones se refiere al hecho de que se presenta un inicio de correspondencia con ocho o nueve elementos. Se trata de un inicio, dado que no es una respuesta consecuente, pues ante una contraargumentación el niño continúa realizando este tipo de producción (Fig. 4).

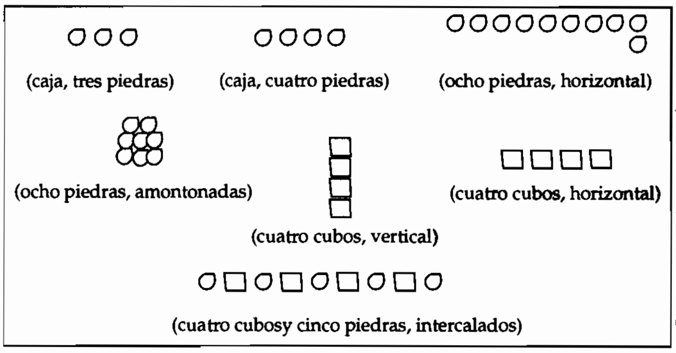


Figura 4. Producciones pictográficas intermedio II
Rafael (6;7)

a.5) Producción pictográfica con cantidad

Dos son los criterios para considerar a este tipo de producción como pictográfica con cantidad: por una parte se recuperan las propiedades cualitativas del modelo, y por otra se establece una correspondencia biunívoca de uno a ocho y nueve elementos (Fig. 5).

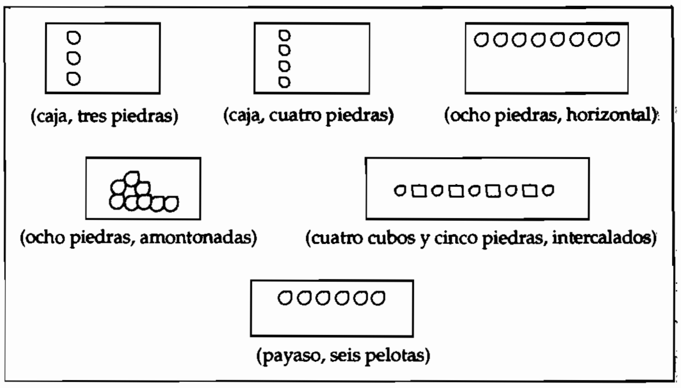


Figura 5. Producciones pictográficas con cantidad
Cinthia (6;4)

b) Producciones mixtas

Se considera una producción mixta cuando el sujeto emplea más de un método en la realización de sus representaciones. A diferencia de lo que señala Hughes en el sentido de que el método de producción empleado por los niños es el mismo, nosotros encontramos a sujetos que emplearon por lo menos dos métodos, aunque uno de ellos es el que predomina en las representaciones. Lo curioso de las producciones mixtas es que la producción pictográfica siempre estuvo presente. Asimismo observamos que la producción mixta remite a distintos niveles en cuanto a correspondencia biunívoca se refiere. Así, encontramos:

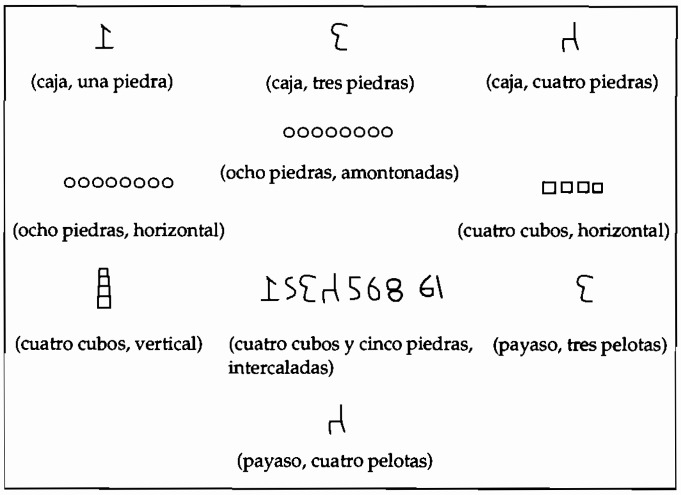


Figura 6. Producción mixta: pictográfico y numeral
Minerva (6;0)

Tipo de Produción Mixta	Correspondencia biunívoca
Pictográfica y Grafías	Sin cantidad
Pictográfica e Íconos	Intermedio I
Pictográfica y Numerales	Con cantidad

El hecho de utilizar un método distinto al pictográfico y emplear íconos y numerales, significa dejar de lado las propiedades cualitativas de los objetos y recuperar, desde ahí, las propiedades cuantitativas. Este "dejar de lado" las cualidades (abstracción), es más evidente cuando se utiliza un método mixto con cantidades. Es decir, en sus producciones el niño recupera las cualidades de los objetos y, al mismo tiempo, las deja de lado, ya sea porque utiliza íconos o numerales. Asimismo recupera las cantidades que se le presentan en el modelo. Así por ejemplo, cuando un niño no reproduce las cualidades propias de un objeto —una piedra— puede utilizar rayas o puntos, que son propiamente íconos en donde se dejan de lado dichas cualidades (Figura 6).

c) Producciones estereotipadas

Las producciones de este tipo se caracterizan por una persistencia en la utilización de las marcas graficadas. Los niños emplean un método rígido que, con frecuencia, olvida el modelo presentado, ya que el sujeto se centra en su propia actividad en el momento de la producción realizada. Las producciones estereotipadas se encuentran estrechamente relacionadas con una ausencia de la relación biunívoca (Fig. 7).

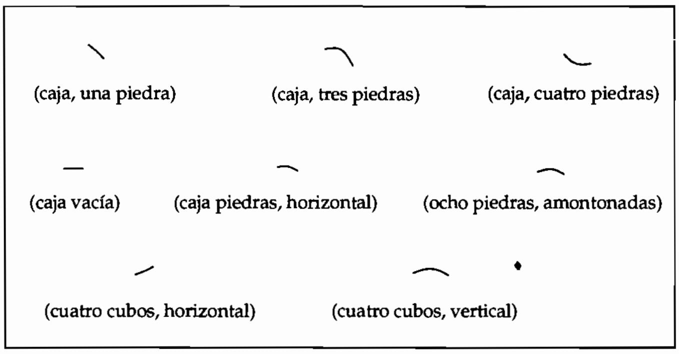


Figura 7. Producción estereotipada
Cristina (5;7)

Con respecto al tipo de producciones que hemos presentado, se puede decir que el porcentaje más alto (67%) corresponde a la producción pictográfica, mientras que el 22% corresponde a producciones mixtas y el 11% a producciones estereotipadas. (Cuadro página siguiente)

Estos datos indican que, en los 18 casos estudiados, existe un alto porcentaje de niños preocupados por las características cualitativas en el momento de sus representaciones gráficas.

En cuanto a la correspondencia biunívoca encontramos que el 61% de los niños no la admiten,

Tipos de producción		Correspondencia biunívoca			
		Ausencia	Cualificada	Cuantificada	%
Estereotipada	Sin cantidad	2			11
Pictográfica	Sin cantidad	1			
	Intermedio I	5			
	Poca cantidad		3		67
	Intermedio II		2		
	Con cantidad		1		
Mixta: Pictográfica y Grafías	Sin cantidad	2			
Pictográfica e Icónica	Intermedio I	1			
Pictográfica y numerales	Con cantidad			1	
N 18		(11) 61%	(6) 33%	(1) 6%	100

otro 33% establece una correspondencia cualificada y sólo el 6% admite una correspondencia cuantificada:

Correspondencia biunívoca		Edad			%
		4 años	5 años	6 años	
Ausencia	Sin cantidad	1	4		61
	Intermedio I	3	3		
Cualificada	Poca cantidad	2		1	33
	Intercambio II		1	1	
	Con cantidad			1	
Cuantificada	Con cantidad			1	6
Total		6	8	4	100

CONCLUSIONES

Las conclusiones que se pueden extraer de este estudio son las siguientes:

El simbolismo en el niño, expresado a través de los significantes gráficos no convencionales se caracteriza por la presencia de los aspectos cualitativos en el momento de la representación de las cantidades. Las producciones pictográficas y mixtas dan evidencia de dicha presencia.

Las características cualitativas (pictográficas) predominan en las producciones gráficas encontradas; a través de estas características se va estableciendo progresivamente la correspondencia biunívoca (cualificada).

Es notorio que en los niños de cuatro y cinco años no se establezca una correspondencia (ausencia de correspondencia biunívoca); sin embargo los momentos iniciales de construcción se pueden encontrar en la producción del tipo pictográfico I. Recordemos que se habla de un momento inicial porque dicha correspondencia no está propiamente construida.

Posteriormente la correspondencia es establecida pero inicia con pocas cantidades, de uno a cinco elementos (pictográfica con poca cantidad). Este tipo de producción supone una progresión importante porque el niño, cuando representa cantidades, lo hace ya no tan sólo por sus cualidades sino por lo que representan de individual. Ello es indicio de que toma en cuenta la cantidad. Ciertamente se trata de una cantidad permeada por aspectos cualitativos, de ahí que la consideremos como correspondencia cualificada con poca cantidad.

Después aparecen producciones gráficas en donde se comienzan a tomar en cuenta cantidades más grandes (pictográfico intermedio II). En este nivel los niños establecen una correspondencia cualificada con poca cantidad y, al mismo tiempo, se inicia la correspondencia con ocho y nueve elementos.

Finalmente aparece un nivel en el cual los niños establecen una correspondencia cualificada con ocho y nueve elementos (pictográfico con cantidad). Las producciones pictográficas intermedio II y con cantidad fueron características de los niños de seis años.

Ahora bien, en los tres últimos niveles (con poca cantidad, intermedio II y con cantidad) la cualidad y la cantidad coexisten, esto es, la individualidad de los elementos considerados en una determinada cantidad surge de los aspectos figurales o cualitativos de los mismos elementos. Es decir, considerar los elementos por su individualidad no supone abstraer o dejar de lado las características cualitativas, pues es a través de ellas donde los elementos pueden ser individualizados.

También encontramos, aunque en un porcentaje menor (11%), producciones a través de las cuales los niños dejan de lado las cualidades de los objetos. Así, por ejemplo, en el tipo de producción mixta encontramos sujetos que representan los elementos, ya sea íconos o bien por numerales. En ambos tipos de producción lo pictográfico está presente.

La abstracción de las cualidades propiamente se encontró en dos niveles: en la producción mixta con cantidad y en la producción mixta intermedio I. En la primera se establece una correspondencia cuantificada, mientras que en la segunda se da un comienzo de dicha correspondencia.

Esto quiere decir que la abstracción de las cualidades no es exclusiva de la correspondencia cuantificada. Sin embargo abstraer las cualidades y, al mismo tiempo, establecer una correspondencia, es un paso significativo en la apropiación de las representaciones convencionales, dado que estos niños usualmente representan un numeral por cada elemento del modelo que se les presenta.

De esta manera el estudio de la representación gráfica de las cantidades permite examinar lo cuantitativo a través de lo cualitativo y ello porque desde el inicio son inseparables, es decir, desde un punto de vista genético, la cantidad se encuentra contenida en la cualidad de los elementos.

Para finalizar diremos que la representación gráfica de las cantidades constituye un aspecto del pensamiento matemático en el niño que se relaciona directamente con la escritura de los numerales.

Notas de la lectura

1 Este dibujo es ampliamente conocido por muchos educadoras como el "payaso tragabolas" y entre otras cosas es utilizado para mejorar las habilidades motrices en el niño.

2 Cabe mencionar que en un estudio reciente con 100 niños 60 de 3er grado y 40 de 1er grado de primaria se corroboraron los niveles que aquí presentamos (véase Corona, *et. al.* 1993)

3 De acuerdo con Piaget, citado por Kant (1985), las cantidades pequeñas (4 o 5 elementos) pueden distinguirse "de un vistazo perceptivamente". Sin embargo, en el plano de la representación los "números perceptivos" introduce nuevas dificultades para el sujeto.

Tema 3. *El conteo en los niños*

LECTURA: EL CONTEO EN LOS NIÑOS DE LOS PRIMEROS AÑOS: CAPACIDADES Y LIMITACIONES*

PRESENTACIÓN

En este artículo Labinowicz sostiene que el conteo es un proceso que el niño va construyendo gradualmente en estrecha relación con el lenguaje cultural de su entorno. En dicho proceso el autor distingue tres niveles generales; el conteo de rutina, contar objetos y la atribución de significados numéricos.

El conteo de rutina se caracteriza por la recitación oral de series de palabras, los niños pequeños recitan oralmente la serie numérica en la que se puede observar un conteo convencional y estable, un conteo no convencional pero estable y un conteo al azar y no estable. Ejemplo

Uno, dos, tres, cuatro, nueve, diez, once, ocho, tres, ocho, doce, quince.
Uno, dos, tres, cuatro, nueve, diez, once, ocho, cuatro, cinco, diez, once.

convencional y estable	no convencional pero estable	conteo al azar y no estable

De acuerdo con Labinowicz los niños de 3-4 años pueden contar eficazmente hasta el número trece de una manera convencional y estable y los niños de 5-6 años hasta el número 31. Sin embargo esto no quita que otros niños de la misma edad puedan recitar la serie numérica, convencional y estable, hasta números más avanzados.

Contar objeto o eventos se refiere al hecho de asignar una etiqueta verbal (o palabra-número) a cada uno de los objetos contados. El niño pequeño puede ser capaz de contar oralmente hasta el número treinta, por ejemplo, sin embargo sólo podrá contar objetos hasta ocho o nueve elementos, inclusive resulta que el niño puede contar objetos hasta ocho en un arreglo lineal fijo (en hilera), pero puede presentar errores de conteo en un arreglo que no sea lineal (por ejemplo circular o desordenados). En este sentido contar objetos o eventos indica un nivel superior respecto al conteo de rutina.

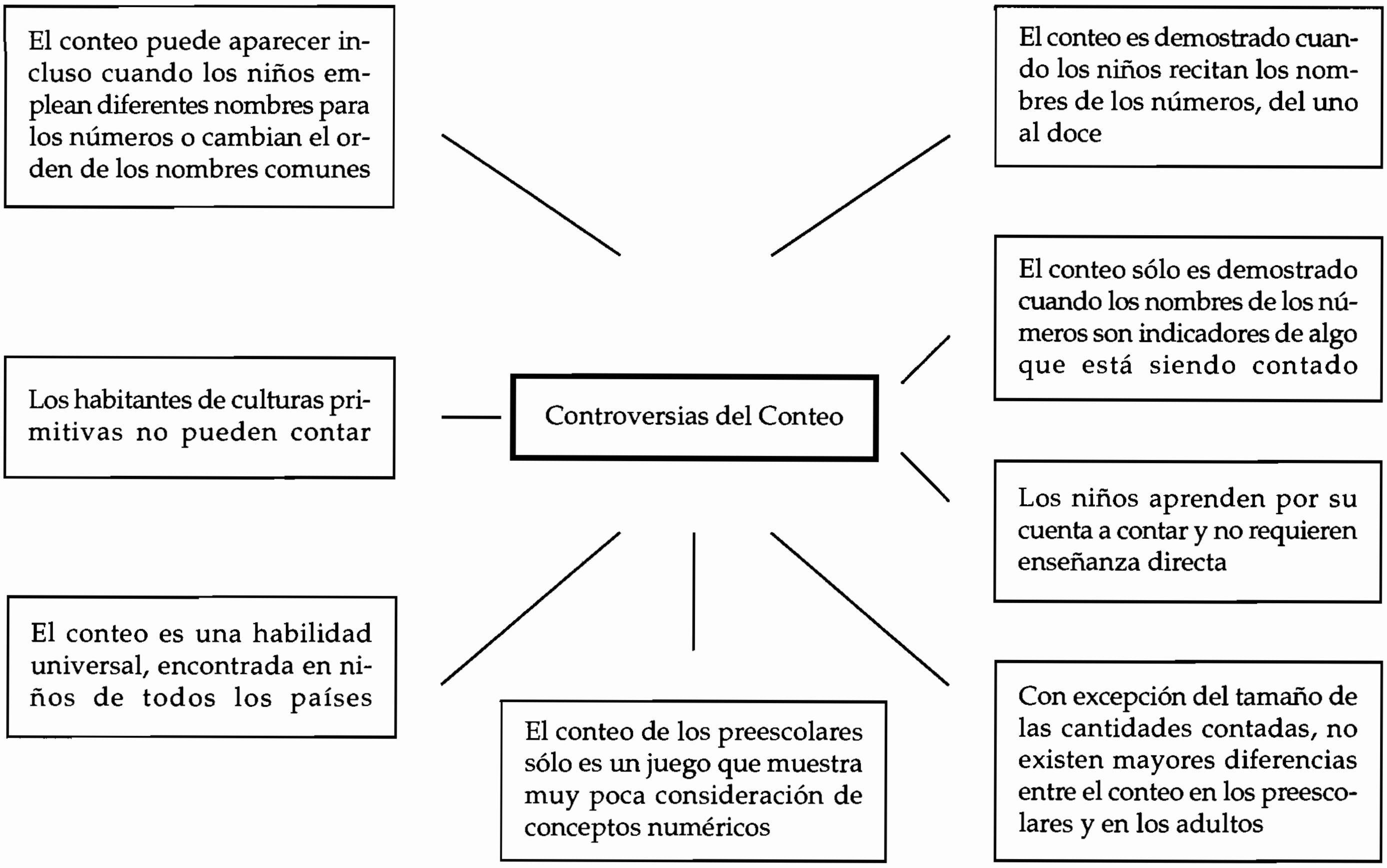
Una tercera fase en la que los niños siguen ampliando su secuencia de conteo verbal y que resulta más lenta de desarrollar, consiste en la atribución de significados numéricos a las palabras de conteo. Así por ejemplo en un conjunto de cinco elementos, la última palabra contada ("cinco") tiene un significado numérico especial ya que es considerado como el grupo total de elementos (lo que determina la magnitud del conjunto). Este significado numérico, que permite cuantificar colecciones de objetos, puede facilitar el uso del conteo como herramienta confiable de resolución de problemas de suma y resta.

* Ed Labinowicz. "El conteo en los primeros años: capacidades y limitaciones", en: *Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking. A piagetian approach.* Addison-Wesley Publishing Company, 1985. pp. 41-48 (Trad. por Mario A. Sánchez R.).

EL CONTEO EN LOS PRIMEROS AÑOS: CAPACIDADES Y LIMITACIONES[1]

La mayoría de los niños entran a la escuela con impresionantes habilidades de lenguaje y de conteo. No obstante, a la vez que continúa desarrollándose el conocimiento infantil de las palabras y de significados sutiles del lenguaje cotidiano a través de la escolarización, también ocurre lo mismo con las capacidades para el conteo durante los años siguientes. Ya que el conteo parece ser una vía primaria para la adquisición infantil de la numeración y de las operaciones numéricas, es importante observar el conteo en los niños pequeños y la manera en que evoluciona. Este capítulo se enfocará en las capacidades y limitaciones de los niños, en cuanto al conteo durante los primeros años, de los años de preescolar al primer grado de primaria. Se discutirán ejemplos de sus capacidades y limitaciones para el conteo dentro del contexto de la investigación referida y las controversias actuales.

Para iniciar el estudio del conteo en los niños, consideremos las siguientes afirmaciones y seleccionemos aquellas que son más consistentes con las observaciones y comprensiones iniciales. (Esquema página siguiente)



Los niños pequeños como contadores activos

Los observadores de los niños pequeños se asombran de su actividad independiente en la adquisición de habilidades de conteo. La evidencia de su actividad auto-dirigida, citada por Ginsburg (1977) incluye las siguientes conductas: el conteo espontáneo resultante de una complacencia por practicar y contar casi todo, experimentación activa en los ciclos de decenios en los nombres de los números como un intento de expandir su secuencia numérica verbal y una disposición para preguntar por más información requerida sobre los nombres de los números. En un incidente reportado por Gelman (1978) un niño pequeño mostró su disposición a practicar al repetir veinte veces su conteo de manera voluntaria.

El conteo parece ser el medio primario de las ideas numéricas para la mayoría de los niños. Es una respuesta natural de los niños pequeños, a pesar de que no es la única en cuanto a las preguntas siguientes expresadas por ellos mismos u otros:

¿Cuántos? ¿Cuántos son todos juntos? ¿Cuántos quedan?

¿Ambos grupos son iguales? ¿Alguno de ellos tiene más? ¿Cuántos más?

En las secciones siguientes se discutirán ejemplos de conteo y de otras respuestas a dichas preguntas.

Los antropólogos han observado que en la mayoría de las culturas se utiliza un procedimiento de conteo. En vista de que los procedimientos de conteo pueden estar basados en agrupamientos numéricos diferentes de 10, algunos observadores se han extraviado al concluir que algunas tribus primitivas no tienen sistema de conteo. En la Costa de Marfil africana, Ginsburg se percató de que todos los niños empleaban el conteo para resolver problemas numéricos simples, independientemente del contexto (no escolarizado, escolarizado, perteneciente o no a la sociedad de intercambio). Sobre la base de estas observaciones generales, los psicólogos (Ginsburg, 1977; Gelman, 1978) concluyen que *el conteo es una habilidad universal de la gente normal.*

A pesar de que su desarrollo se apoya enormemente en la actividad propia, las habilidades de conteo infantiles también dependen de influencias culturales. Las palabras de conteo empleadas por los niños dependen de un lenguaje cultural, modelado por los adultos dentro de su contexto. A pesar de que, inicialmente, las palabras de conteo están disponibles sólo a través de los adultos, posteriormente las mismas palabras sirven como materia prima en la que los niños advierten patrones repetidos y derivan nuevos nombres numéricos para ampliar sus secuencias de nombre numéricas. Una indicación de esta actividad es la invención de combinaciones originales de palabras de conteo, como *veinte-diez* y *veinte-once* para *treinta* y *treinta y uno* antes de escuchar y ajustarse a los nombres convencionales de los adultos. Es este enfoque en la extensión de sus secuencias de palabras de conteo hasta el cien y el enlace de estas palabras a objetos, lo que caracteriza el conteo en la mayoría de los niños hasta la edad de seis o siete años. Otro indicador de la actividad infantil es su construcción de significados numéricos que pueden ser leídos en las palabras de conteo. Las limitaciones en las habilidades de conteo infantiles resultantes de una naturaleza gradual de su proceso de construcción producen un retraso en las aplicaciones prácticas del conteo en situaciones de resolución de problemas. Estas capacidades y las limitaciones del conteo en los niños pequeños serán discutidas en mayor detalle en las secciones siguientes.

Capacidades de conteo de los niños pequeños

Para ayudarle a apreciar la extensión de los logros infantiles, la discusión siguiente ilustrará las numerosas habilidades requeridas para un conteo exitoso. También se ilustrarán las dificultades encontradas en niños de dos a cinco años de edad, antes de la coordinación de los diversos aspectos del conteo básico.

Conteo de rutina

La recitación oral de series de palabras de conteo estándar caracteriza el conteo de rutina. Estas secuencias son producidas con esfuerzo considerable por los niños pequeños y contienen más que una parte convencional que es repetida de ensayo en ensayo. Fuson (1980) reporta un patrón general en los intentos de los niños pequeños para aprender la secuencia numérica. Señala las similitudes entre las recitaciones repetidas de dos niños diferentes.

	Convencional y estable	No convencional pero estable	Al azar no estable
Niño A	1 2 3 4	9 10 11 8	6 9
	1 2 3 4	9 10 11 8	10 3 4
	1 2 3 4	9 10 11 8	4 5 10 11 8 2 4
	1 2 3 4	9 10 11 8	3 8
Niño B	1 → 7	11 12 13	16 11 16 11
	1 → 7	11 12 13	14 18 20
	1 → 7	11 12 13	1 6

Después de recitaciones repetidas, las secuencias de conteo verbales contienen una porción que es una secuencia estable de nombres estándar. Las secuencias también incluyen una parte que contiene omisiones o cambios de orden que, asimismo, son producidos de la misma manera después de ensayos repetidos. Entonces cada secuencia termina con un "vómito" [spew] al azar de nombres de números que representan los intentos de ensayo y error infantiles por ampliar la secuencia. La parte media puede ser empleada de manera consistente por el mismo niño durante un periodo de varias semanas, aunque el contenido del patrón estable variará de un niño a otro. La parte final no tiene patrón, variando en cada niño ante los intentos por ampliar la secuencia.

Iniciándose alrededor de dos años, la adquisición y extensión de la secuencia convencional de conteo verbal continúa durante varios años. Una indicación del progreso gradual de los niños la aporta un resumen de investigación hecho por Fuson y Hall (1982). Ellos reportan un conteo promedio de 13 para el grupo de los tres y medio a los cuatro años y un incremento hasta el 31 en el conteo promedio para el grupo de cinco y medio a los seis años de edad, con una variación considerable en cada grupo de edad. Estos investigadores también comentan sobre el "problema del decenio" experimentado por estos niños. Al ampliar su secuencia de conteo verbal, los niños pequeños demuestran familiaridad con el ciclo repetido del uno al nueve dentro de las decenas (por ejemplo cuarenta, cuarenta y uno... cuarenta y nueve), pero tienen dificultad en ordenar correctamente las decenas. No obstante, al final del primer grado la mayoría de los niños tienen dominio de la secuencia numérica verbal hasta el cien.

El conteo de rutina es la forma de conteo observada en los niños. A pesar de que pueden recitar varias palabras en una secuencia estándar, aún no pueden emplear estas palabras para contar objetos o eventos. El discurso cantado de los niños indica que esta aislada secuencia de conteo verbal no representa más que una memorización de una serie de palabras. Estos nombres numéricos, a menudo aprendidos en el contexto de juegos y rimas, pueden significar para el niño nada más que sílabas sin sentido durante algún tiempo. Puede argumentarse aún más que cuando el niño está recitando nombres numéricos aisladamente, de hecho no está contando; estos nombres numéricos deben ubicarse en correspondencia con objetos o eventos, antes de que tenga lugar el acto de contar.

A pesar de que la recitación oral de los nombres numéricos es sólo un aspecto del proceso de conteo, está enfatizada casi exclusivamente por programas de televisión infantiles como "Plaza Sésamo". Asimismo está sobreestimada por padres preocupados y aceptada como un indicador rápido de la brillantez esperada de sus niños.

Contando objetos y eventos

Una vez que los contadores de rutina comienzan a asignar palabras de conteo a los objetos o eventos, se enfrentan con el desafío de coordinación al asignar palabras de conteo sucesivas para los elementos que están siendo contados. Solamente un nombre numérico puede ser enlazado con cada elemento para un conteo exacto. La asignación exitosa de los nombres numéricos individuales para cada objeto dentro de una colección requiere que el nombramiento oral sucesivo y su señalamiento estén perfectamente sincronizados. Para los niños pequeños el contar objetos demuestra ser un desafío formidable que requiere años de laboriosa práctica. Algunas de las demandas de coordinación para esta tarea en los niños pequeños están reflejadas en la siguiente lista parcial de errores que puede cometer un niño al contar arreglos lineales fijos [fixed] de objetos.

1. El niño empieza el conteo verbal un paso anterior de la acción de partida, por lo que cuatro objetos son contados como cinco.
2. El niño se salta un objeto, por lo que siete objetos son contados como seis.
3. El niño señala entre objetos en tanto que menciona un nombre numérico, contando ocho objetos como nueve.
4. El niño le da dos nombres numéricos al mismo objeto, por lo que cinco objetos son contados como seis.
5. El niño le da un nombre numérico a dos objetos diferentes, por lo que seis objetos son contados como cinco.
6. El niño continúa recitando los nombres numéricos más allá del último objeto como si fuera llevado por el ritmo de la secuencia sonora. En este sentido cinco objetos pueden ser contados como seis, siete u ocho.

Dichos problemas en la coordinación infantil en torno a diferentes aspectos del acto de contar cuentan en la laguna entre la amplitud de la secuencia numérica verbal que un niño puede recitar y el número de objetos que es capaz de contar. Por ejemplo un niño de cinco años puede ser capaz de recitar números hasta el cincuenta, aunque sólo sea capaz de contar ocho objetos.

Los arreglos espaciales de colecciones de objetos a ser contados también pueden afectar la dificultad de la tarea de conteo. Niños que obtienen éxito al contar un arreglo lineal fijo, pueden cometer errores cuando el mismo número de objetos son presentados en un arreglo circular o movible, dispuestos al azar.

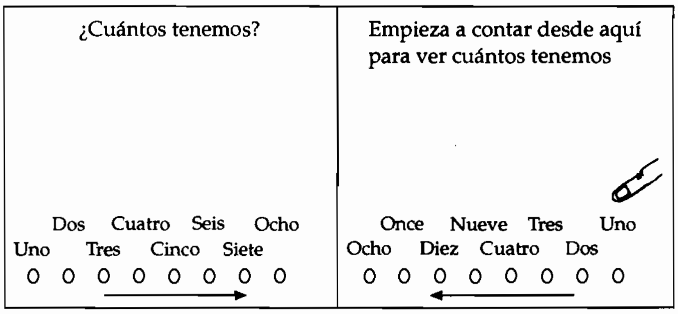
Ya que en ambos de estos arreglos es difícil para el niño pequeño separar objetos que ya han sido contados de los que aún faltan, algunos de éstos son recontados. Ante objetos movibles, muchos niños impondrán su propio orden, como ordenarlos en un arreglo lineal o como adorno. Asimismo pueden partir físicamente el conjunto en grupos sucesivos de objetos contados y no contados.

Los niños pequeños son más exitosos al contar cantidades pequeñas de objetos hasta que la colección es agotada. Cuando se les pidió contar una cantidad preespecificada de botones de una colección más grande, parecían olvidar el número de botones que se les pidió contar. Como resultado de la memoria agregada que demanda la tarea, el niño parecería sobre contar, agotando a menudo la colección disponiblé.

El conteo en los niños pequeños está caracterizado por la actividad física, donde el tocar o señalar son un componente esencial del conteo de objetos. Ha sido demostrada la dependencia de los niños muy pequeños de tocar los objetos que están siendo contados en un estudio de Gelman y Callistel (1978). En éste, niños de tres años de edad mostraron un marcado decrecimiento en la exactitud cuando los conjuntos de objetos a ser contados fueron cubiertos con cristal. Sin posibilidad de tocar, estos niños pequeños tuvieron dificultad en emparejar las palabras de conteo con cada objeto. Al mismo tiempo, el tocar y manipular objetos para separar conjuntos son esenciales en el conteo inicial, donde las limitaciones de coordinación física de las manos y dedos de los niños pequeños progresan para contar conjuntos más grandes de objetos movibles. Las acciones físicas del acto de conteo gradualmente llega a restringirse a los nudos menos visibles de la mano o a los movimientos de los ojos.

Mientras que las cosas a ser contadas no requieren se similares, inicialmente, los niños pequeños pueden ser distraídos por las propiedades físicas de los objetos. Fuson y Hall (1982) reportan que en la mitad del conteo de un grupo de objetos, dividido sucesivamente en dos subgrupos de objetos contados y no contados, los niños de dos años pueden empezar construyendo estructuras sugeridas por las propiedades físicas de los objetos. Según Piaget e Inhelder (1969), los objetos a ser contados no necesitan parecerse, ya que ignorando sus propiedades físicas en el proceso de conteo el niño abstrae de ellos unidades equivalentes. Esto explicaría por qué es posible contar un ratón y un elefante en el mismo grupo.

Surge una interesante pregunta cuando los niños cuentan repetidamente un grupo de objetos y obtienen la misma respuesta, empleando una secuencia convencional de palabras de conteo. La pregunta es si, de hecho, estos niños están contando.



A pesar de que la mayoría de los investigadores identifica el empleo de una secuencia de conteo verbal convencional como un criterio para el acto de contar, un equipo de investigación argumenta en contra de esta perspectiva. Al estudiar el conteo en niños de dos años de edad, Gelman y Callistel (1978) observaron en ellos que, en repetidos ensayos, contaban tres objetos como "uno, dos, seis", que sustituían nombres de letras por nombres numéricos o, incluso, que inventaban sus propias palabras numéricas. Para estos investigadores el empleo infantil de una secuencia verbal no convencional sería suficiente para indicar el conteo.

Limitaciones de las habilidades de conteo de los niños pequeños

Hasta aquí hemos observado dos fases del conteo en niños pequeños que se traslapan en su desarrollo. Los niños pequeños continúan ampliando su secuencia de conteo verbal en tanto que, gradualmente, dominan el conteo de números crecientes de objetos. En este apartado observamos una tercera fase de traslape del conteo que es la más lenta de desarrollar: la construcción de singificados numéricos a asignar a las palabras de conteo dentro de una estructura relacional. Esta adquisición lenta de significados numéricos presenta limitaciones en las habilidades de conteo infantiles y en la confiabilidad del conteo como una herramienta de resolución de problemas para los niños.

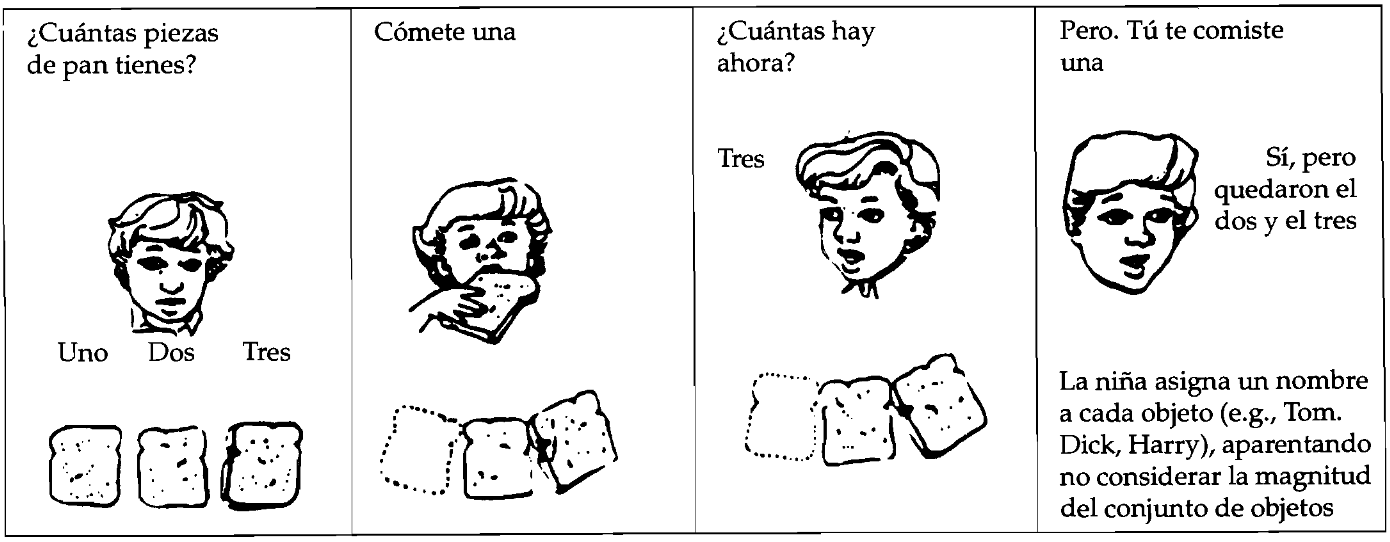
Cuantificación

Para los adultos los nombres numéricos representan significados específicos en diferentes contextos. Estos nombres pueden representar el número de objetos en una colección, un número de unidades de medida, la posición relativa de un elemento en una secuencia o, incluso, un código de identificación, dependiendo del contexto.[2] Gradualmente los niños construyen significados numéricos para diferentes contextos y los integran dentro de una estructura relacional. Esta construcción de significados a asignar a las palabras de conteo se aleja bastante de los otros aspectos del conteo discutidos anteriormente. Los ejemplos siguientes, derivados del trabajo de Churchill (en Ginsburg, 1977) y de Ginsburg (1977), ilustran las dificultades que pueden experimentar los niños pequeños durante el proceso de construcción de estos significados numéricos.

Más allá de etiquetar con un nombre a objetos individuales dentro de una colección, el conteo incluye, eventualmente, una acción mental superior de relación de objetos individuales dentro de totalidades de tamaño creciente (Labinowicz, 1980). (Cuadro página siguiente)

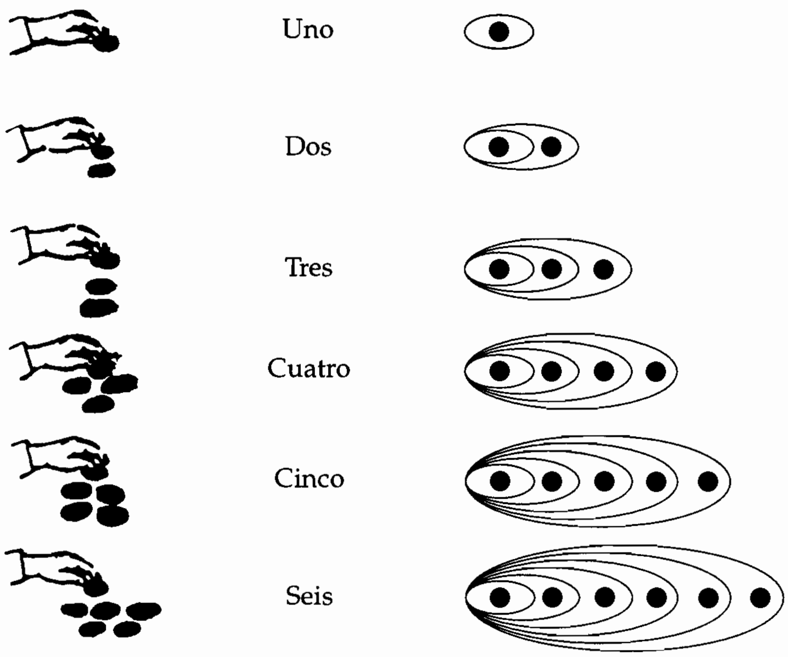
Aquí, "cinco" está considerado como un grupo total. Con la adición de uno más, el "cinco" llega a ser parte del "seis". Los números llegan a ser comprendidos como grupos totales y como las partes que constituyen el todo. Para niños más grandes, "seis" no sólo indica la palabra de conteo asignada para el último objeto contado, sino también la "magnitud" del grupo total.

Mientras que es claro cuando la respuesta del niño a la pregunta "¿cuántos hay?" indica su desatención de la "magnitud" de una colección de objetos, Fuson y Hall (1982) señalan la dificultad de determinar si un niño está atribuyendo este significado profundo a su conteo. Con la intención de brindar una respuesta correcta a la pregunta "¿cuántos hay?", un niño puede repetir la última palabra de conteo en el acto de conteo original o enfatizar, con una pausa o elevando el volumen, la última palabra de conteo. Una adaptación espontánea del niño de este acto de contar a enfatizar la última palabra de conteo sugeriría la construcción de un significado más profundo de la "magnitud". No obstante, en una situación de entrevista es difícil determinar si esta conducta de énfasis fue desarrollada de manera espontánea o si solamente es el resultado del entrenamiento, sin significado subyacente. El observar la conducta de los niños en otras tareas puede ser útil para apreciar



Voy a contarnos. Uno, dos… 	Uno, dos… tres, está mal. Yo soy la cuatro 	Intentaré otra vez. Uno, dos. tres… pero yo sigo siendo la cuatro. Prueben ustedes. 	En vista de que la niña tiene cuatro años, se asigna ese nombre numérico independientemente del contexto. El cuatro era el número de años correcto para ella en un contexto de medición. Tres era el número correcto de niñas en el contexto de "cuántas hay" (independientemente del orden en que se contara a las niñas)
Espontánea	Confundida	Frustrada	

Cuenta éstos  Dos Cuatro Seis Uno Tres Cinco 0 0 0 0 0 0	¿Cuántos hay? Repite el conteo  Dos Cuatro Seis Uno Tres Cinco 0 0 0 0 0 0	Para este niño, el "Cuántos hay" era una señal para contar los objetos, i.e., etiquetarlos. El último número contado en su secuencia no incluye el número de objetos contados previamente.



El uno está incluido en el dos

El dos está incluido en el tres

El tres está incluido en el cuatro

El cuatro está incluido en el cinco

El cinco está incluido en el seis

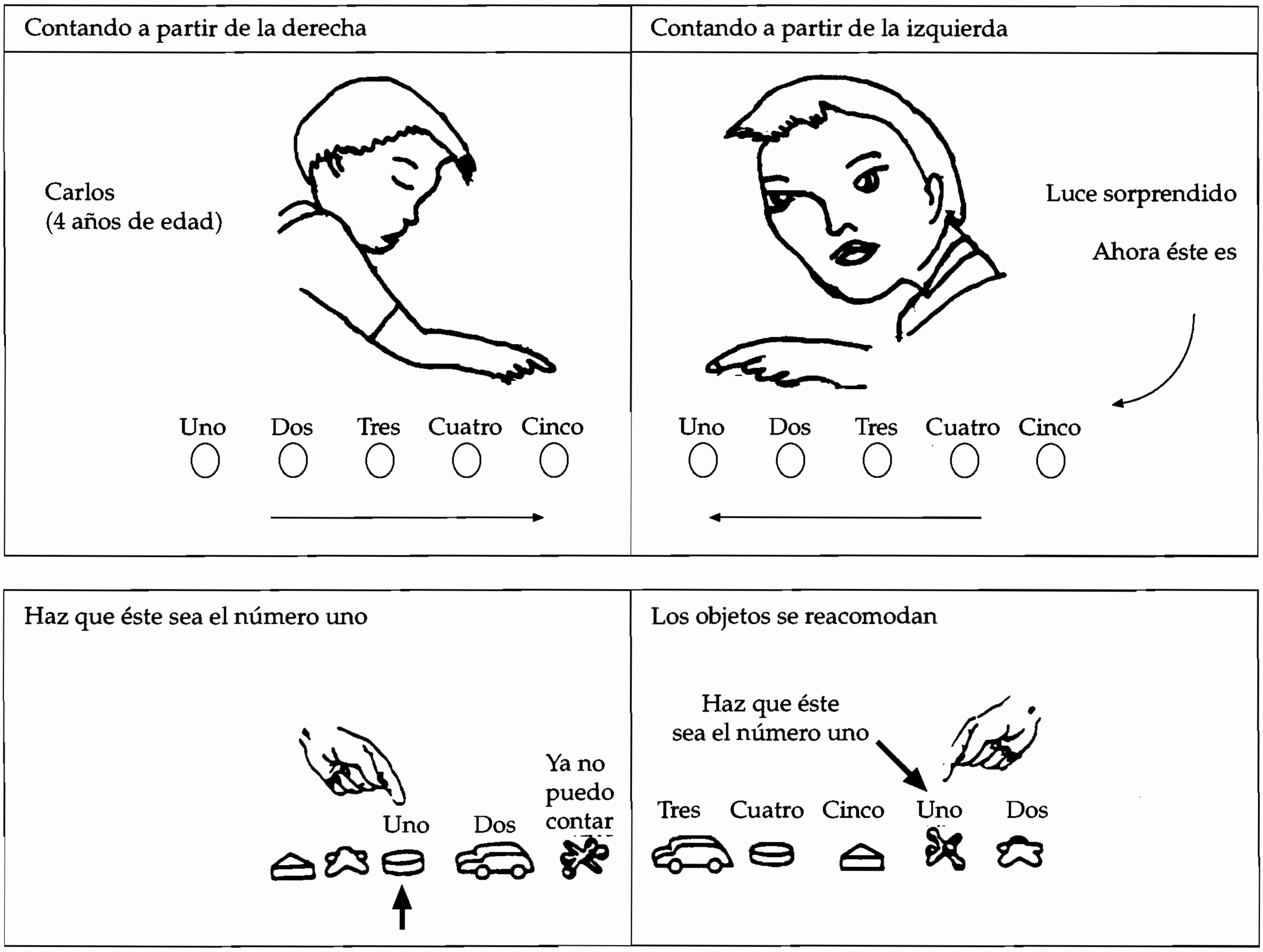
si están atribuyéndole significados, como la "magnitud", a su conteo.

Si un niño presta atención a la "magnitud" de una colección total de objetos, debería tener la expectativa de producir el mismo resultado independientemente de su dirección al contar el mismo arreglo. Reiss (citado en Ginsburg, 1977) reporta que los niños han sido observados mostrando sorpresa ante este descubrimiento.

Al mismo tiempo otros investigadores indican que los niños pequeños en ensayos repetidos pueden comenzar el conteo desde diferentes puntos de un arreglo, aun cuando se den cuenta de que no importa el orden del conteo para determinar cuántos hay. Gelman y Callistel (1978) presentaron a los niños un adorno lineal de dijes y les solicitaron que empezaran su conteo en la mitad de la línea. Su estudio mostró que los niños de cuatro y cinco años se comportaron como si se dieran cuenta de que el orden del conteo no lo alteraba. Abajo se ilustra un extracto de una entrevista con un niño pequeño (edad: 3 años 8 meses).

Sería interesante estudiar las reacciones de los niños en cuanto a que son incrementadas las cantidades según el orden del conteo y de la disposición al azar de los arreglos.

Si el conteo de los niños se enfoca en la inclusión de objetos que ya han sido contados para determinar la "magnitud" del grupo, entonces se verían perturbados si el reconteo produce un número diferente. No obstante, Fuson Y Mierkiewicz (1980) observaron que niños de tres y cuatro años de edad produjeron diferentes respuestas en el recuento de los mismos conjuntos, dieron pocas evidencias de mostrarse inquietos. Cuando se señaló a los niños la discrepancia de los dos conteos y se



les preguntó cuál de los dos era el correcto, invariablemente indicaron que la última respuesta era la acertada. Algunos de los niños de cinco años notaron la discrepancia entre conteo sucesivos y un tercer reconteo espontáneo de un conjunto. Dichas conductas llevaron a Fuson y Hall (1982) a concluir que gran parte del conteo de los niños pequeños está hecho por práctica en la ejecución del acto de contar en lugar de estar determinado por el número de objetos incluidos en un conjunto.

Asimismo existe poca evidencia de que, al ampliar su serie de nombres numéricos convencionales, los niños pequeños hayan construido significados de estructura numérica similares a los que estos nombres representan para los adultos. Por ejemplo tienen poca comprensión de que el "veintitrés" está compuesto por dos decenas y tres unidades. Para ellos "veintitrés" es solamente el nombre contable que sigue después de "veintidós". Incluso aunque los niños estén activos en la extensión de su serie convencional de palabras de conteo, dicha extensión parece estar más basada en patrones de lenguaje que en la estructura de nuestro sistema numérico.

El retraso en el desarrollo de significados numéricos de los niños pequeños limita sus habilidades para cuantificar colecciones de objetos, para desarrollar estrategias contables eficientes y para usar el conteo como una herramienta confiable de resolución de problemas.

Notas de la lectura

1 Título original: *Counting in the early years: capacities and constraints*, aparecido en: Labinowicz, E. Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking. A piagetian approach. Addison-Wesley Publishing Company, 1985. pp. 41-56 (Trad. por Mario A. Sánchez R.).

2 En el primer capítulo, la tarea de bloques presentaba un contexto de medición. El nombre numérico indicaba cuántas unidades pequeñas estaban contenidas en unidades sucesivamente mayores o en arreglos de unidades mezcladas.

LECTURA: EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS NIÑOS*

PRESENTACIÓN

De acuerdo con Baroody, el hecho de que el niño sepa contar oralmente no garantiza que pueda dar una respuesta satisfactoria cuando se le presenta un conjunto de elementos (por ejemplo ocho) y se le pregunta "¿cuántos... hay?" De igual forma si se le presentan dos conjuntos (8 y 9) se muestra incapaz para identificar ¿dónde hay más?

Para que el niño pueda comparar dos conjuntos (determinar, por ejemplo, si un conjunto de nueve elementos es "más" o "menos" que otro conjunto de ocho) es necesaria la integración de cuatro técnicas de conteo que, según Baroody, se desarrollan jerárquicamente.

Serie numérica oral. Generar sistemáticamente el nombre de los números en un orden adecuado.

Enumerar o acción de contar objetos. Las palabras (etiquetas) de la serie numérica deben aplicarse una por una a cada objeto de un conjunto.

Regla del valor cardinal. La última etiqueta numérica representa el número total de elementos.

Regla de la cuenta cardinal. La última etiqueta numérica representa el número total y también es un número para contar.

En las implicaciones educativas, Baroody señala algunas dificultades que tienen los niños para contar y ofrece sus posibles soluciones. Finalmente propone una serie de juegos didácticos susceptibles de ser empleados en el aula que permiten desarrollar las técnicas para contar.

TÉCNICAS PARA CONTAR

Contar oralmente ¿implica aptitudes numéricas? ¿Qué técnicas de contar se suelen desarrollar durante los años preescolares? ¿Podemos suponer que los niños de educación especial adquirirían técnicas básicas para contar de una manera informal? ¿Qué técnicas suelen requerir instrucción durante los primeros cursos escolares?

a) El desarrollo de técnicas para contar

El caso de Alexi

Hacia los veintiséis meses de edad, Alexi podía contar de palabra del 1 al 10 y había empezado a experimentar con los números hasta el 20. Cuando se le pidió que contara los tres puntos de una formación triangular, Alexi señaló los puntos y soltó a toda prisa "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10". Cuando se le pidió que contara tres puntos en fila, señaló al azar y varias veces el conjunto mientras decía "8, 9, 10". Aun después de poder contar con exactitud conjuntos de hasta cinco objetos, Alexi se desconcertaba cuando se le preguntaba cuántos había contado. Si se le enseñaban dos conjuntos (por ejemplo una tarjeta con nueve puntos y otra con ocho) también le sorprendía que se le pidiera que señalara la tarjeta que tenía "más".

La técnica de Alexi para contar oralmente no garantizaba una capacidad para contar con exactitud conjuntos de objetos o para el empleo de otras técnicas numéricas. Sin embargo, hacia los cinco años de edad[1] los niños no sólo pueden contar de palabra casi hasta 29, sino que inmediatamente determinan que ∴ y ••• son "tres". Además para un niño típico de cinco años es evidente *cómo* se debe resolver el problema de determinar cuál de dos conjuntos (por ejemplo uno de nueve y otro de ocho) tiene más elementos: sólo hay que contar cada conjunto y comparar las cantidades resultantes. Después de contar cada conjunto de puntos, la *solución* del problema también es fácilmente visible para los niños de cinco años: "El conjunto con 9 es más". Por tanto, en cuestión de pocos años los niños aprenden una variedad de técnicas para contar y muchas maneras de aplicarlas (Fuson y Hall, (1983). Lo complicado que pueda ser este desarrollo o en qué medida llegan a darlo por sentado los adultos, queda revelado por

* Arthur Baroody. "Técnicas para contar", en: *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid, Ed. Visor, 1988. pp. 87-105.

un examen detallado de las técnicas mencionadas en el párrafo anterior.

Una jerarquía de técnicas

En su mayor parte, la capacidad de contar se desarrolla jerárquicamente (Klahr y Wallace, 1973). Con la práctica, las técnicas para contar se van haciendo más automáticas y su ejecución requiere menos atención. Cuando una técnica ya puede ejecutarse con eficiencia, puede procesarse simultáneamente o integrarse con otras técnicas en la memoria de trabajo (a corto plazo) para formar una técnica aún más compleja (por ejemplo Schaeffer, Eggleston y Scott, 1974). Consideremos qué se necesita para realizar la tarea aparentemente sencilla de determinar si un conjunto de nueve puntos es "más" o "menos" que otro de ocho. Realizar esta comparación entre magnitudes numéricas requiere la integración de cuatro técnicas.

En primer lugar la técnica más básica es generar sistemáticamente los nombres de los números en el orden adecuado. A los dos años de edad, Alexi ya había empezado a dominar *la serie numérica oral* y, a veces, podía contar hasta 10 de uno en uno. Sin embargo cuando se le pedía que contara objetos, aún no podía decir los números en el orden correcto de forma coherente. Por ejemplo a veces no empezaba a contar desde "uno". Hacia los tres años de edad, los niños suelen empezar a contar un conjunto a partir de "uno" y al empezar párvulos ya pueden usar la secuencia correcta para contar conjuntos de 10 elementos como mínimo (Fuson, Richards y Briars, 1982).

En segundo lugar las palabras (etiquetas) de la secuencia numérica deben aplicarse una por una a cada objeto de un conjunto. La acción de contar objetos se denomina *enumeración*. Aunque Alexi podía generar la serie numérica hasta 10 correctamente, no podía enumerar un conjunto de nueve elementos, y ni siquiera de tres, porque todavía no había aprendido que debe aplicarse una, y sólo una, etiqueta a cada elemento de un conjunto. La enumeración es una técnica complicada porque el niño debe coordinar la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento de una colección para crear una correspondencia biunívoca entre las etiquetas y los objetos. Como los niños de cinco años pueden generar correctamente la serie numérica y señalar una vez cada uno de los elementos de una colección, pueden coordinar con eficacia las dos técnicas para ejecutar el acto complejo de la enumeración (al menos con conjuntos de hasta 10 elementos).

En tercer lugar, para hacer una comparación, un niño necesita una.manera conveniente de representar los elementos que contiene cada conjunto. Esto se consigue mediante *la regla del valor cardinal*: la última etiqueta numérica expresada durante el proceso de enumeración representa el número total de elementos en el conjunto. En otras palabras, un niño de cinco años puede resumir la serie: 1, 2, 3..., 9", con "nueve" y la serie "1, 2, 3..., 8" con "ocho". Como Alexi no podía ni enumerar conjuntos, no había descubierto que la última etiqueta de este proceso tiene un significado especial. A sus dos años de edad, Alexi todavía no asociaba la serie numérica con la definición de la cantidad de un conjunto.

En cuarto lugar, las tres técnicas acabadas de describir son indispensables para comprender que la posición en la secuencia define la *magnitud*. A los dos años de edad, los números no definían tamaños relativos para Alexi. Sin embargo los niños pequeños llegan a aprender, tarde o temprano, que la serie numérica se asocia a una magnitud relativa. Aun los niños muy pequeños pueden realizar comparaciones gruesas entre magnitudes como "10 es más grande que 1", quizá porque saben que el 10 viene mucho más tarde en la secuencia de enumeración. Hacia los cinco años los niños pueden llegar a hacer con rapidez comparaciones precisas entre magnitudes de números seguidos como el 8 y el 9 porque están muy familiarizados con las relaciones de sucesión numérica ("cuando me pongo a contar, el 9 viene después del 8, así que el 9 es más grande").

Por tanto contar para determinar que un conjunto de nueve puntos es más que un conjunto de ocho no es, cognoscitivamente hablando, un acto trivial. Aunque los adultos pueden dar por sentadas las cuatro técnicas implicadas, éstas constituyen un reto intelectual imponente para los niños de dos años de edad. Cuando lleguen a los cinco años la mayoría de los niños habrán dominado estas técnicas básicas y estarán listos para enfrentarse a nuevos desafíos.

Algunos de ellos —sobre todo los que proceden de entornos con carencias, los que tienen lesiones cerebrales o los mentalmente atrasados— pueden no haber llegado a dominar estas técnicas básicas y necesitarán una atención especial. En lo que resta de capítulo se describirán con mayor detalle las cuatro técnicas básicas para contar y otras técnicas más elaboradas que se desarrollan durante las primeras etapas de la escolarización.

Contar oralmente

Serie numérica. A una edad tan corta como los dieciocho meses, los niños empiezan a contar oralmente de uno en uno ("1, 2, 3..."). La mayoría de los niños de dos años pueden contar "1, 2" pero luego empiezan a omitir términos (Fuson *et al*, 1982). Al principio los niños pueden aprender partes de la serie numérica hasta 10 para unirlas más adelante. Por ejemplo Alexi (hacia los veinte meses de edad) empezó a usar, de una manera regular, la serie "8, 9, 10". Más adelante añadió "2, 3, 4" para hacer "2, 3, 4, 8, 9, 10". Después añadió el 5 y el 6 y, finalmente, el 1 y el 7 para completar la serie hasta 10. A los veintiséis meses Alexi añadió los números de dos cifras 19 y 20 y, muy poco después, insertaba la ristra "11, 12, 13" entre el 10 y el 19.

Contar oralmente suele equipararse con "contar de memoria". Como ilustra el caso de Alexi, contar de memoria es una buena descripción de las primeras técnicas orales que emplean los niños para contar. Su manera de contar era, simplemente, una cantinela verbal sin sentido. La serie numérica inicial de Alexi parecía no ser más que una cadena de asociaciones aprendidas de memoria y enlazadas gradualmente entre sí. Sin embargo contar de memoria es una descripción menos adecuada de los posteriores intentos de contar. Con demasiada frecuencia este término se emplea para indicar que los niños aprenden toda la serie numérica por memorización. Aunque la memorización desempeña un papel determinado, sobre todo durante las etapas iniciales, el aprendizaje regido por reglas tiene una importancia fundamental para ampliar esta serie. Aunque es probable que los términos hasta el 15[2] se aprendan de memoria, la mayor parte de la serie numérica posterior puede generarse mediante reglas (Ginsburg, 1982). Los restantes números hasta el 20 pueden generarse continuando con la secuencia original (6, 7, 8, 9) y anteponiendo el "10 y" (por ejemplo "dieciséis, diecisiete..."). Los números de la segunda decena (21, 22, 23..., 29) se pueden generar mediante la regla de anteponer "20" a cada una de las unidades (del 1 al 9) una por una. En realidad para contar de uno en uno hasta 99 el niño sólo tiene que aprender esta regla y el orden de las decenas (10, 20, 30..., 90).

Los errores que cometen los niños al contar son una buena señal de que existen reglas que subyacen a su cuenta oral, sobre todo de 20 para arriba. Muchos niños —incluyendo los que presentan retraso mental— se inventan términos como "dieci-cinco" por 14, "diecidiez" por 20, o "veintidiez, veintionce" para 30 y 21 (Baroody y Ginsbur, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Ginsburg, 1982b). Estos errores indican claramente que los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que tratan de construir sus propios sistemas de reglas (Baroody y Ginsburg, 1982). Se trata de errores razonables porque son ampliaciones lógicas, aunque incorrectas, de las pautas de la serie numérica que el niño ha abstraído. Así, aun los niños mentalmente atrasados parecen ser capaces de ver, emplear y, a veces, aplicar mal las pautas de la serie numérica.

Aunque la mayoría de los niños que se acaban de incorporar a la escuela ya hacen progresos con la parte de la serie numérica regida por reglas, muchos no se dan cuenta de que las decenas ("10, 20, 30..., 90) siguen una pauta paralela a la secuencia de las unidades (Fuson *et al*, 1982). Aún no se sabe con certeza cómo llegan los niños a resolver el "problema de las decenas", es decir su orden correcto para contar hasta 100 de uno en uno. Una hipótesis es que los niños aprenden las decenas de memoria en forma de extremos finales de cada serie (por ejemplo el niño forma la asociación entre "29-30" ó "39-40"). Hay algunos datos que respaldan esta conjetura. Algunos niños no pueden contar por decenas pero pueden contar hasta 30 ó

39 porque parecen haber aprendido que 30 va después de 29, pero no han aprendido qué va después de 39 (Baroody y Ginsburg, 1984). Otra hipótesis es que los niños aprenden las decenas (contar de diez en diez) de memoria y emplean este conocimiento para rellenar la secuencia de contar de uno en uno. Otra hipótesis, completamente distinta es que los niños aprenden las decenas como una versión modificada de la secuencia del 1 al 9 y emplean esta pauta (repetir la secuencia de las unidades y añadir *-enta*) para rellenar la cuenta de uno en un. Un ejemplo de esta última hipótesis es el caso de Teri, una niña levemente atrasada que cuando llegaba al final de una decena (por ejemplo "...,58, 59") se ponía a contar para sí para averiguar la siguiente decena (por ejemplo "1, 2, 3, 4, 5, 6, —ah..., sesenta") (Baroody y Ginsbug, 1984). Luego iba repitiendo este procedimiento hasta llegar a 100.

En realidad la mayoría de los niños pueden aprender de memoria algunas decenas (hipótesis 1 y 2) y emplear reglas para generar el resto (hipótesis 3). Esto tiene sentido porque la mayoría de las decenas sigue una pauta y sería ineficaz aprenderlas todas de memoria. Sin embargo se puede tener que aprender de memoria la primera parte, incluyendo quizá algunos casos regulares como 40, antes de descubrirse la pauta. Por tanto aprender las decenas (contar de diez en diez) puede ser algo parecido a aprender a contar de uno en uno: al principio los niños adquieren una parte por memorización y luego emplean una pauta para ampliar la secuencia.

Elaboraciones de la serie numérica. Con la experiencia, los niños aprenden a usar su representación mental de la serie numérica con más elaboración y flexibilidad (Fuson *et al.*, 1982). A medida que se van familiarizando más y más con la serie numérica correcta, los niños pueden citar automáticamente el número siguiente a un número dado. A los veintiséis meses, Alison ya podía hacerlo *si* se le "daba el pie".

MADRE: Alison, ¿qué número va después del 9?
ALISON: [No responde]
MADRE: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y...
ALISON: 10

De no ser así, Alison no lo podía hacer o sólo lo hacía a veces.

MADRE: ¿Qué número va después del ocho?
ALISON: El ocho.
MADRE: ¿Y después del dos?
ALISON: El nueve
MADRE: ¿Y después del seis?
ALISON: [No responde]
MADRE: (Un poco más tarde): ¿Qué va después del ocho?
ALISON: Nueve, diez.
MADRE: ¿Y después del dos?
ALISON: El cuatro

Hacia los cuatro o cinco años de edad, los niños ya no necesitan empezar desde el 1 para responder de manera coherente y automática preguntas relativas a números seguidos, al menos hasta cerca del 28 (Fuson *et al.*, 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Uno de los desarrollos que pueden producirse un poco más tarde es la capacidad de citar el número anterior. Cuando los niños captan las relaciones entre un número dado y el anterior, ya está preparado el terreno para contar progresivamente. Además los niños de edad escolar aprenden gradualmente a contar por grupos. Entre las más precoces de estas nuevas pautas se encuentran contar por parejas, de cinco en cinco y de diez en diez.

Numeración

Enumeración. Los niños deben aprender que contar objetos implica algo más que agitar un dedo señalando un conjunto o deslizarlo por encima de otro mientras pronuncian con rapidez la serie numérica. Aunque los niños pequeños aprenden con rapidez al menos la parte memorística de la serie numérica (véase, por ejemplo, Fuson y Hall, 1983) y no tienen problemas para señalar los objetos de uno en uno (Beckwith y Restle, 1966), coordinar estas dos técnicas para enumerar un conjunto no es una tarea fácil. En realidad la enumeración — sobre todo de conjuntos con más de cuatro elementos— sólo llega a hacerse automática de una manera gradual (Beckwith y Restle, 1966; Gelman y Gallistel, 1978, y Schaeffer *et al.*, 1974). Con colecciones grandes y, sobre todo, desordenadas, los niños tienen que aprender estrategias para llevar la cuenta de los elementos que han contado y los que no. Cuando los elementos se ponen en fila, hace falta poco esfuerzo para no perder la cuenta si se empieza desde uno de los extremos. Si la colección está colocada en círculo, el niño sólo necesita recordar el elemento por el que ha empezado a contar. Con distribuciones desordenadas, el niño debe recordar qué elementos ha etiquetado y cuáles quedan por etiquetar. Esto se ve facilitado por el empleo de un método sistemático (por ejemplo contar de izquierda a derecha y de arriba abajo) o separando los elementos etiquetados de los no etiquetados. Fuson (en prensa) encontró que muchos de sus sujetos de párvulos no empleaban la estrategia de crear un montón aparte con los elementos ya contados.

Regla del valor cardinal. Al principio los niños pueden no darse cuenta de que la enumeración sirve para enumerar. Cuando se les pide que cuenten un conjunto, los niños se limitan a enumerarlo y esperan que esto, en sí mismo, satisfará al adulto (cosa que ocurre a veces). Si se les pregunta cuántos objetos acaban de contar, vuelven a enumerar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo Ida, una niña de tres años de edad, enumeró cuatro estrellas ("1, 2, 3, 4) sin hacer ningún intento serio de emplear o recordar la información. Cuando se le preguntó cuántas estrellas había acabado de contar, alzó los hombros y volvió a enumerarlas otra vez. Como la enumeración se contempla como un fin en sí mismo y no como un medio para llegar a un fin, los niños muy pequeños pueden no llegar a comprender el sentido de preguntas como "¿Cuántos hay? ni preocuparse de recordar los resultados de lo que han contado.

Cuando tienen cerca de dos años, muchos niños desarrollan una conciencia primitiva de que contar es un procedimiento empleado para asignar números a colecciones (para responder a preguntas del tipo "¿cuántos hay?"). Ahora ya realizan el intento de recordar lo que han contado. Sin embargo como no se dan cuenta de que el proceso de enumeración se puede resumir, responden a este tipo de preguntas repitiendo la serie numérica. Después de "soltar" varios términos ("7, 8, 9") o de repetir el mismo ("9, 9, 9") ante un conjunto de tres objetos, un niño de dos años puede designar este conjunto volviendo a contar (por ejemplo "7, 8, 9" o "9, 9, 9") (Wagner y Walters, 1982). Aun después de haber aprendido a enumerar correctamente, los niños pueden no darse cuenta de que es innecesario recitar otra vez toda la secuencia cuando se les pregunta por una cantidad. Por ejemplo después de enumerar cuatro estrellas que había en una tarjeta, George (sin volver a mirar la tarjeta) respondió a la pregunta "¿cuántas estrellas hay?" con: "Pues hay 1, 2, 3, y 4 estrellas". Sin embargo a una edad tan corta como los dos años y medio de edad, algunos niños descubren el "atajo" consistente en recitar la última etiqueta del proceso de enumeración para indicar la cantidad. En el fondo la regla del valor cardinal traduce el término aplicado a un elemento determinado de un conjunto (el último) al término cardinal que representa el conjunto entero.

Regla de la cuenta cardinal. La regla inversa a la del valor cardinal es la regla de la cuenta cardinal. Esta regla especifica que un término cardinal como "5" es la etiqueta asignada al último elemento cuando se enumera un conjunto de cinco objetos (Fuson y Hall, 1983). Parece que los niños tienen que aprender que un término como cinco es al mismo tiempo el nombre de un conjunto (número cardinal) y un número para contar. Consideremos el caso de un niño al que se da un conjunto de cinco canicas junto con la consigna: "Aquí hay cinco canicas; pon cinco canicas en la taza". El niño que no aprecia la regla de la cuenta cardinal tiene que ponerse a contar las canicas a medida que las va soltando en la taza. Este niño no puede prever que la etiqueta cinco empleada para designar el conjunto es la misma que se debe aplicar al resultado de contar el conjunto. En cambio el niño que da por sentada la regla de la cuenta cardinal se limita a colocar todo el conjunto en la taza sin contar.

Separación. Contar (separar) un número concreto de objetos es una técnica que empleamos a diario (por ejemplo "Dame tres lápices", "Me quedaré con cuatro camisas", "Toma cinco clavos"). Sin embargo no se trata de una tarea cognoscitiva sencilla porque implica: a) observar y recordar el número de elementos solicitado (el objetivo); b) etiquetar cada elemento separado con una etiqueta numérica, y c) controlar y detener el proceso de separación. En otras palabras se requiere almacenar el objetivo en la memoria de trabajo, un proceso de enumeración y, al mismo tiempo, ir comparando los números del proceso de enumeración con el número almacenado y detener este proceso cuando se llegan a igualar (Resnick y Ford, 1981). La regla de la cuenta cardinal ofrece al niño una razón para tomar nota del objetivo en la memoria de trabajo y constituye la base para detener el proceso de enumeración (Baroody y Mason, 1984). Por ejemplo, si se pide que separe tres lápices tiene que darse cuenta de que para realizar la tarea es importante recordar "tres" y que debe parar de contar lápices cuando llegue a la etiqueta "tres".

Comparación de magnitudes

Cuando tiene unos tres años de edad, los niños descubren que los términos para contar más altos se asocian a magnitudes superiores (Wagner y Walters, 1982). Así se dan cuenta de que "dos" no sólo sigue a "uno" sino que también representa una cantidad mayor. Hacia los tres años y medio, los niños suelen apreciar que "tres" es mayor que "dos" (Schaeffer *et al.*, 1974). Partiendo de estos datos, los niños de cerca de cuatro años de edad parecen descubrir una regla general: el término numérico que viene después en la secuencia significa "más " que el término de un número anterior. Aún antes de entrar en la escuela, los niños parecen usar su representación mental de la serie numérica para hacer comparaciones toscas, pero eficaces, entre magnitudes, es decir, para comparar con rapidez y exactitud dos números bastante separados entre sí dentro de la secuencia (por ejemplo el 3 y el 9, ó el 2 y el 8) (Resnick, 1983). A medida que la relación "el siguiente de" se va haciendo automática, los niños pueden llegar a ser capaces de hacer comparaciones entre magnitudes más próximas (entre números seguidos). En realidad, cuando la mayoría de los niños empiezan a asistir al parvulario ya pueden realizar con bastante precisión comparaciones entre números adyacentes hasta el 5 e incluso hasta el 10.

b) Implicaciones educativas: dificultades para contar y soluciones

Contar oralmente

Serie numérica. La mayoría de los niños, incluyendo los que pertenecen a minorías y a clases sociales desfavorecidas, reciben una exposición intensa a la primera parte —la memorística— de la serie numérica por parte de familiares, amigos, personal de guardería, la televisión, etc., antes de llegar a la escuela. Si un niño que acaba de incorporarse al jardín de infancia manifiesta incapacidad para generar la secuencia memorística hasta un mínimo de 10, puede dar señal de un problema grave y de la necesidad de una intervención de apoyo inmediata e intensiva (Baroody y Ginsburg, 1982b). Aunque se dan grandes diferencias individuales, el dominio de la parte memorística de la serie numérica no debería darse por sentado en niños atrasados del ciclo medio (Baroody y Ginsburg, 1984). La mayoría de los niños de cuatro y medio a seis años de edad pueden llegar a contar hasta 29 ó 30. Sin embargo, y dado que todavía no han resuelto el problema de las decenas, muchos de ellos son incapaces de ampliar la parte regida por reglas más allá de estas cifras. Muchos niños pequeños con retraso mental necesitarán ayuda para llegar a dominar incluso la primera parte de la secuencia regida por reglas (del 16 al 19 y del 20 al 29).

A partir del 15, aproximadamente, la enseñanza de la serie numérica no debería insistir en la memorización. En cambio se debería animar a los niños a buscar y discutir las pautas subyacentes a la serie numérica. En algunos casos el maestro puede tener que dar "pistas" o ayudar a que las pautas se hagan explícitas (véase el ejemplo 6.1). Además, es positivo que los niños cometan errores al aplicar reglas como sustituir 30 por "veintidiez". Se trata de una señal prometedora porque indica el reconocimiento de una pauta numérica y constituye un intento activo, por parte del niño, de tratar con lo desconocido en función de las reglas o de la comprensión que ya tiene. Cuando un niño comete un error al aplicar una regla, el maestro puede aprovechar el conocimiento que ya tiene diciéndole, por ejemplo: "*Otro nombre* para veintidiez es 30". Se trata de una manera constructiva de corregir al niño porque el maestro aprecia su capacidad para pensar sin dejar de ofrecerle el *feedback* necesario para su desarrollo posterior.

Ejemplo 6.1. Empleo de pautas para enseñar las decenas

Aún los niños algo retrasados pueden beneficiarse de la instrucción que explota las pautas subyacentes a la serie numérica. Tomemos el caso de Mike, un hombre de veinte años de edad con un CI de 40. Mike trataba de aprender cómo decir la hora ajustándola a los cinco minutos más próximos, pero como no conocía las decenas superiores a 30 no podía pasar de 35. Después de 35 se limitaba a repetir expresiones usadas previamente (por ejemplo 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 30). Para establecer una conexión entre la secuencia de las unidades y las decenas, la educadora de Mike escribió los números del 1 al 6 en una tarjeta. Debajo de cada cifra escribió la decena correspondiente y le explicó que podía usar los primeros números que empleaba para contar para averiguar las decenas. "¿Ves? El 1 es como el 10, el 2 como el 20, el 3 como el 30, el 4 como el 40, el 5 como el 50 y el 6 como el 60". Mike usó la lista numérica de esta tarjeta para contar de cinco en cinco y al ver que con ella podía expresar todas las horas del reloj se puso tan contento que pidió más copias de la tarjeta para usarlas en clase y en casa. Los siguientes pasos se encaminaron a hacer que Mike determinara la siguiente decena usando mentalmente la secuencia para contar y a que practicara contando de diez en diez y de cinco en cinco hasta que estas técnicas se hicieran automáticas. Al final Mike decía en seguida la hora sin necesitar la tarjeta.

La educación de Mike y la recopilación del caso se deben a Cathy A. Mason

Los obstáculos más frecuentes para los niños, sea cual sea su capacidad mental, son los nombres irregulares de los números 14 y 15 y de las decenas[3] (por ejemplo Baroody y Snyder, 1983, y Fuson *et al.*, 1982). Como 14 y 15 son una excepción en la pauta de elaboración, es frecuente que sean los últimos números que se aprenden hasta el 19. Algunos niños simplemente se los saltan ("...13, 16,...) o los cambian por otro ("...13, 16, 16, 16...). Un diagnóstico expeditivo, el empleo de modelos y la práctica pueden establecer la secuencia adecuada como un hábito antes de que se instaure una secuencia incompleta o incorrecta.

Elaboración de la serie numérica. Cuando están en párvulos, los niños no deberían tener problemas para citar el número siguiente a otro, y ni siquiera el anterior, al menos hasta el 10 (Fuson *et al.*, 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Los niños de bajo rendimiento y con retraso mental puede que no sean capaces de citar el número siguiente y quizá deban empezar a contar desde el 1 o hacer conjeturas. Es probable que citar el número anterior sea relativamente difícil porque los niños deben operar sobre la serie numérica en dirección opuesta a la seguida durante su aprendizaje. Además puede que el concepto de anterior sea más difícil de comprender que el de siguiente. Por tanto, al principio lo mejor sería concentrar la enseñanza de apoyo en el número siguiente. Esta enseñanza debería empezar con la parte más familiar de la secuencia numérica (del 1 al 4 ó al 5). Además si el niño puede leer las cifras se puede empezar con actividades en las que intervenga una representación concreta de la serie numérica (una lista numérica). Una vez que el niño ha comprendido la cuestión relativa al número siguiente (anterior) y puede dar respuestas con facilidad mediante el empleo de una lista numérica, puede pasar a actividades sin lista numérica que le exijan determinar mentalmente la respuesta.

Contar regresivamente desde 10 depende del conocimiento de las relaciones existentes entre un número y su anterior, y es una técnica oral relativamente difícil. Con todo, suele ser dominada por los niños cuando llegan a primer curso (Fuson *et al.*, 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Contar regresivamente desde 20 es una técnica especialmente difícil y no suele dominarse hasta poco antes del tercer curso. Los maestros de educación especial deben esperar muchas dificultades con las dos técnicas. La enseñanza de apoyo puede empezar haciendo que el niño lea una lista numérica hacia atrás (de derecha a izquierda). Con los niños que dominan o han dominado el número siguiente, se puede tapar la lista numérica dejando a la vista el número de partida. Entonces, a medida que el niño va contando hacia atrás, se pueden ir destapando sucesivamente los números menores. Este procedimiento confirma las respuestas correctas y ofrece un *feedback* corrector para las respuestas incorrectas.

Para contar a intervalos de cinco como mínimo, puede animarse a los niños a que empleen la secuencia familiar de contar de uno en uno, pero susurrando los números intermedios y destacando los que forman la pauta. Por ejemplo, para aprender a contar de dos en dos, puede decirse al niño que cuenta así: "uno [en voz baja], dos [en voz alta], tres [en voz baja], cuatro [en voz alta]...". Si hace falta puede empezarse con una lista numérica para aligerar el esfuerzo de expresar el término correcto y permitir que el niño se concentre en la pauta. En el ejemplo 6.2 se muestra otro método para contar a intervalos a partir de la secuencia familiar para contar de uno en uno.

Ejemplo 6.2. Enseñanza de contar a intervalos

Se puede hacer que contar a intervalos tenga significado para los niños relacionándolo con el procedimiento familiar de contar objetos reales de uno en uno. Josh, un adolescente con retraso moderado, estaba aprendiendo a contar de cinco en cinco. Su educadora le había dicho que colocara unos discos de plástico de color que le gustaban mucho en pilas de a cinco y después le ayudó a contarlos de cinco en cinco. Luego hizo que Josh los desparramara y los contara de uno en uno. Josh se quedó muy sorprendido al ver que obtenía el mismo resultado. Luego comprobó la validez general de este descubrimiento con distintos números de pilas. En la sesión siguiente, Josh insistía en repetir el experimento por su cuenta.

Durante la tercera sesión, Josh pidió tarjetas con números (5, 10, 15, 20, 25, etc.) y las emparejó con sus pilas. A continuación añadió una nueva etapa a su proceso de comprobación: leer los números de las tarjetas a medida que iba contando los discos de uno en uno. Comprobó el resultado de contar la primera pila de uno en uno con el número de la primera tarjeta y encontró que, en ambos casos, el resultado era "5". Al continuar contando de uno en uno la segunda pila, encontró que el resultado coincidía con el número de la segunda tarjeta (10), y así sucesivamente. Mientras Josh iba contando de uno en uno, la educadora recalcaba el número final de cada grupo (5, 10, 15, etc.) diciéndolo en voz alta con él. Luego Josh se inventó un juego de adivinar en el que se tapaba los ojos, la educadora tomaba una tarjeta (por ejemplo la del 15) y Josh tenía que adivinar de qué número se trataba. Hacia la cuarta sesión ya podía contar hasta 30 de cinco en cinco y sin ayuda. El uso de objetos reales y la secuencia para contar de uno en uno hicieron que contar a intervalos fuera, para Josh, algo comprensible e interesante.

La educación de Josh y la recopilación del caso se deben a Cathy A. Mason

Numeración

Enumeración. Cuando los niños llegan al jardín de infancia suelen ser bastante competentes para contar conjuntos de uno a cinco objetos, y la mayoría de los niños de cinco años enumera con exactitud hasta 20 objetos (Fuson, en prensa). Por tanto, si un niño que empieza el curso de párvulos presenta dificultades con conjuntos de uno a cinco elementos, es que necesita de inmediato una atención individual. El niño que no haga ningún intento de etiquetar cada objeto de un conjunto, por pequeño que éste sea, con una palabra para contar (soltando al azar palabras para contar mientras desliza el dedo por encima de los objetos) ni de llevar la cuenta de los objetos contados y sin contar (etiquetando los objetos del conjunto de una manera totalmente asistemática) presenta graves problemas (Baroody y Ginsburg, 1982b).

Como la enumeración requiere la coordinación de dos subtécnicas, los errores pueden deberse a tres causas: a) generar una serie numérica incorrecta (*errores de secuencia*); b) llevar un control inexacto de los elementos contados y no contados (*errores de partición*), y c) no coordinar la elaboración de la serie numérica y el proceso de control de los elementos contados y no contados (*errores de coordinación*) (Gelman y Gallistel, 1978). En la figura 6.1 se muestran algunos ejemplos de cada tipo de error. En ocasiones los niños pueden tener un desliz al generar una serie numérica, pero si los errores de secuencia son sistemáticos (por ejemplo etiquetar sistemáticamente conjuntos de 13 y 14 elementos con «13») es señalar de que hace falta una enseñanza de apoyo orientada a reforzar la técnica necesaria para contar oralmente. El niño que comete con regularidad errores de partición como pasar algún elemento por alto o contarlo más de una vez, debe aprender estrategias de control más eficaces.

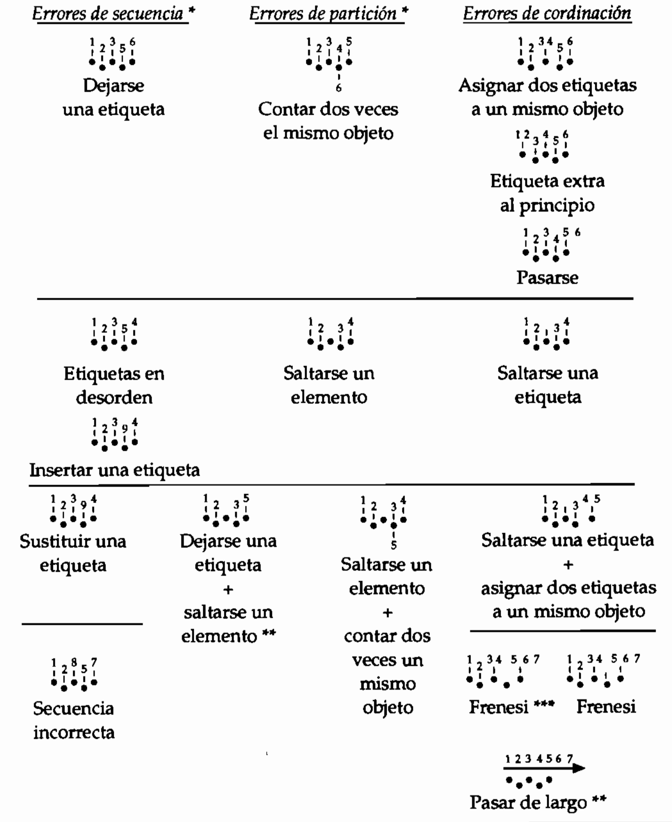
En la figura 6.1 se puede observar que hay tipos de errores muy distintos que pueden producir las mismas respuestas. Por ejemplo el doble etiquetado (señalar un objeto una vez y asignarle dos etiquetas), al igual que contar un mismo objeto más de una vez, aumenta en una unidad el número de elementos de un conjunto. Sin embargo el doble etiquetado es un error de coordinación y no de partición. En realidad se pueden combinar varios errores para producir una respuesta correcta. Como las respuestas incorrectas pueden producirse de varias maneras y como, matemáticamente, dos errores no equivalen a un acierto, es importante que los maestros observen la actividad de enumeración de los alumnos que tengan alguna dificultad.

Si un niño tiene problemas para ejecutar con eficacia alguna de estas subtécnicas, es probable que se den errores de coordinación. Por ejemplo un niño que tiene que detenerse y pensar qué viene después del 3 cuando cuenta un conjunto de cinco elementos, puede olvidar por dónde iba: «1 [señala el primer elemento], 2 [señala el segundo], 3 [señala el tercero], a ver, a ver, 4 [señala el quinto elemento]». Igualmente si un niño tiene que dedicar mucha atención para no perderse, puede equivocarse (por ejemplo saltarse un número). Fuson y Mierkiewicz (1980) encontraron que los niños pequeños tendían a cometer errores de coordinación a medio contar.

Los errores de coordinación también pueden darse al principio o al final del proceso de enumeración (Gelman y Gallistel, 1978). Algunos niños tienen dificultades para empezar las dos subtécnicas al mismo tiempo. En consecuencia señalan el primer elemento, pero no lo etiquetan o empiezan a etiquetar demasiado pronto (por ejemplo dicen «1» sin señalar el primer elemento, que a continuación recibe la etiqueta «2»). A veces los niños tienen dificultades para acabar con las dos técnicas coordinadas y señalan, pero no etiquetan, el último elemento o continúan etiquetando después de haber señalado el último elemento. Los niños mentalmente retrasados parecen ser propensos a cometer errores de coordinación (Baroody y Ginsburg, 1984).

El «frenesí» y «pasar de largo» son dos graves errores de enumeración. En el primero el niño empieza con una correspondencia biunívoca, pero no la mantiene hasta el final, y en el segundo no intenta establecer la correspondencia al empezar o acabar el proceso de enumeración (Fuson y Hall, 1983). El frenesí puede darse como resultado de no controlar los elementos etiquetados y no etiquetados (error de partición), no coordinar la cuenta oral y la acción de señalar (error de coordinación), o ambos a la vez (véase la figura 6.1). Pasar por alto comporta no hacer ningún intento de controlar o coordinar la serie numérica con la acción de señalar cada elemento.

Figura 6.1. Ejemplos de errores de enumeración.



* Indica la acción de señalar.
** Indica una combinación de errores de secuencia y partición.
*** Indica una combinación de errores de partición y coordinación.

Con los niños que «pasan por alto» algún elemento, la enseñanza de la enumeración debe destacar: a) contar despacio y con atención; b) aplicar una etiqueta a cada elemento; c) señalar cada elemento una vez y sólo una, y d) contar organizadamente para ahorrar esfuerzo en el control. Con elementos fijos, el control de los objetos contados y los que quedan por contar se puede facilitar con estrategias de aprendizaje como empezar por un lugar bien definido y continuar sistemáticamente en una dirección (por ejemplo de izquierda a derecha). Una estrategia adecuada para contar elementos móviles es separar claramente los elementos contados de los que quedan por contar.

Regla del valor cardinal. Cuando llegan a párvulos, los niños aplican rutinariamente la regla del valor cardinal a conjuntos aún mayores (Fuson, Pergament, Lyons y Hall, 1985). Si un niño de esta edad no lo puede hacer es señal de que tiene graves problemas. Aunque muchos niños mentalmente retrasados pueden aprender espontáneamente la regla del valor cardinal, otros necesitan una enseñanza explícita. Si un niño simplemente adivina el valor cardinal de un conjunto que acaba de contar o vuelve a enumerar el conjunto, se le puede explicar la regla del valor cardinal de la siguiente manera: «Cuando cuentes, recuerda el último número que dices porque así sabrás cuántas cosas has contado»". Si un niño repite toda la serie numérica empleada en el proceso de enumeración, se le puede decir que existe un atajo: «Deja que te enseñe una manera más fácil. Después de contar me vuelves a decir el último número que hayas dicho y así sabré cuántas cosas has contado». A veces es útil que el maestro demuestre el proceso mientras «piensa en voz alta»: «¿Cuántos dedos tengo levantados? Voy a contarlos, a ver. Uno, dos, tres, *cuatro*. Vaya, el último número que he dicho es cuatro, así que tengo *cuatro* dedos levantados».

Regla de la cuenta cardinal. Los niños que empiezan la escuela suelen dar por sentada esta noción más avanzada del valor cardinal; muchos niños de educación especial no lo hacen así (Baroody y Mason, 1984). Esta regla puede enseñarse mediante un procedimiento de dos etapas concebido por Secada, Fuson y Hall (1983) (véase la fig. 6.2). La primera etapa consiste en presentar un conjunto al niño e indicar (verbalmente y mediante un número escrito) la designación cardinal del conjunto. El maestro pide al niño que cuente el conjunto y observe que el resultado de contarlo coincide con la designación cardinal. Para la segunda etapa, el maestro presenta otro conjunto. Se le vuelve a dar al niño la designación cardinal y se le pide que cuente los elementos del conjunto. Sin embargo antes de que acabe de contar el maestro le pide al niño que prediga el resultado.

Figura 6.2. Enseñanza de la regla de la cuenta cardinal.

Etapa A - Paso 1
Maestro: "Tenemos cinco círculos [enseña cinco círculos y una tarjeta con el número 5]; Cuéntalos para ver cuántos hay."
$\boxed{5}$
○ ○ ○ ○ ○

Etapa A - Paso 2
$\boxed{5}$
○ ○ ○ ○ ○
Niño: "1, 2, 3, 4, 5"
Maestro: "Mira, te he dado cinco circulos (señala la tarjeta con el número) y, cuando los has contado, el último número que has dicho era 5. El número de círculos que hay es siempre lo mismo que el último número que dices cuando los cuentas."

Etapa B - Paso 1
Maestro: "Tenemos cuatro cuadros, cuéntalos para ver cuántos hay."
$\boxed{4}$
□ □ □ □

Etapa B - Paso 2
$\boxed{4}$
□ □ □ □
Niño: "1, 2 -"
Maestro: "¿Cuál será el último número que dirás cuándo acabes de contar?" (El maestro corrige y continua según crea necesario).

Separación. Los niños suelen llegar a párvulos pudiendo separar con precisión al menos conjuntos de pequeño tamaño. Si un niño es incapaz de separar hasta cinco objetos cuando se le pide, es que necesita una enseñanza de apoyo intensiva. Muchos niños con deficiencias mentales tienen dificultades con esta tarea (Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Spradlin, Cotter, Stevens y Friedman, 1974) y necesitan una enseñanza especial.

Uno de los errores más comunes cuando se retiran objetos de un conjunto es «no pararse», es decir, no detener el proceso de contar cuando se ha llegado al objetivo. A Matt, un niño deficiente mental, se le enseñaron ocho lápices y se le pidió: «Toma cinco para dárselos al maestro; recuerda, saca sólo cinco». Sin embargo se limitó a contar los ocho lápices. Cabe atribuir este tipo de errores a un fallo de memoria (por ejemplo véase Resnick y Ford, 1981). Según una de las hipótesis que atribuyen el error a un fallo de memoria, los niños no mantienen el objetivo en la memoria de trabajo, es decir, no toman nota de la cantidad solicitada. Otra propuesta es que, al estar tan ocupados con el proceso de contar, se olvidan del objetivo. Por ejemplo cuando se le preguntó a Matt cuántos lápices debía tomar, respondió: "No sé". Como no recordaba el objetivo o no lo tenía en su memoria de trabajo, Matt se limitó a contar todos los lápices que tenía delante.

Al igual que muchos otros niños (véase Flavell, 1970), es posible que Matt supiera que hace falta un esfuerzo especial para memorizar información, es decir, que a veces necesitamos ensayar o repetir una información para facilitar el recuerdo. Para este niño la enseñanza de apoyo debe recalcar la importancia de recordar el objetivo de la tarea y, de ser necesario, debe también enseñarle cómo recordarlo. Se debe estimular al niño a ensayar (repetir) el objetivo para que quede grabado firmemente en su memoria de trabajo antes de contar los objetos. Si hace falta, se le puede instar a que anote el número antes de empezar a contar.

Los niños que tienen la edad de empezar a andar (Wagner y Walters, 1982) y algunos niños deficientes mentales (Baroody y Ginsburg, 1984) tienen problemas con esta tarea aun cuando parecen recordar el objetivo. Por ejemplo cuando se pidió a un niño, Fred, que quitara tres objetos de un montón de cinco, se limitó a contarlos todos: «1, 3, 4,6, 11 [y después, volviendo a señalar el último elemento] 3», pareciendo que había recordado el objetivo. Este niño deficiente había vuelto a etiquetar el último elemento con la palabra «tres». Cuando se le pidió que retirara cinco elementos de un total de nueve volvió a cometer el error de no detenerse, pero acabó la cuenta con la etiqueta correcta: «1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 5». Aunque no se detuvo cuando se encontró por primera vez con la etiqueta buscada, Fred parecía recordarla e hizo que el último elemento tuviera la etiqueta apropiada.

Este error de «finalizar con el objetivo» puede explicarse mediante otra hipótesis referida a la memoria. Aunque algunos niños guardan el objetivo y lo pueden recordar más tarde, el proceso de contar objetos absorbe tanto su atención que no pueden comparar la serie numérica del proceso de separación con el objetivo. Como la memoria de trabajo de Fred estaba tan copada por el proceso de separación quizá no fue capaz de atender simultáneamente a los procesos de contar y de comparar. Una vez liberada su atención del proceso de contar, Fred pudo recordar el objetivo y enmendar su conducta.

Cuando un niño no tiene problemas para recordar el objetivo, la enseñanza de apoyo debe centrarse en el proceso de comparación. Primero, se debe hacer que el niño anote el objetivo. A continuación sacamos nosotros el primer elemento (o dejamos que lo haga el niño). Luego le preguntamos (señalando el número anotado si es necesario): «¿Es la cantidad correcta? ¿Hay que pararse aquí?» Continuamos así hasta llegar a la cantidad solicitada. Debemos explicar claramente por qué se ha detenido el proceso de contar: «Nos hemos parado en N [decir el número deseado] porque N [señalar el objetivo] es la cantidad que necesitamos». Sobre todo al principio se debe ayudar al niño a encontrar la manera más fácil posible de ejecutar el proceso de contar. Por ejemplo se puede simplificar el proceso de controlar los elementos que se han contado y los que no, apartando los primeros en un montón claramente separado.

Hay otra explicación para este tipo de errores y es que los niños muy pequeños y algunos escolares con deficiencias mentales no poseen la base conceptual para comprender la tarea. Quizá los niños que no comprenden la noción de la cuenta cardinal no se dan cuenta de que deben comparar lo que cuentan con el objetivo. Así pues, cuando un maestro desea subsanar las dificultades que tiene un niño con la separación, primero deberá comprobar que posea la técnica necesaria para la cuenta cardinal (Baroody y Mason, 1984).

Comparación entre magnitudes

Cuando llegan al curso de párvulos, casi todos los niños pueden realizar comparaciones entre números separados y entre números seguidos pequeños (del 1 al 5), y la gran mayoría ya habrá llegado a dominar estas últimas con los números del 1 al 10. Los niños de educación especial durante la primera enseñanza y muchos niños deficientes de nivel intermedio pueden llegar a tener problemas con las comparaciones entre números separados y entre números seguidos pequeños. La educación de apoyo deberá empezar con objetos concretos y números familiares que sean manifiestamente diferentes en cuanto a magnitud (comparar 1, 2 o 3 con números mayores como 9 o 10; comparar números seguidos como 1 y 2 o 2 y 3).

Pueden conseguirse varios juegos en los que intervienen modelos concretos (véase el ejemplo 6.3). En el juego *Invasores de la luna*, por ejemplo, los jugadores comparan la longitud o la altura de dos conjuntos de cubos que encajan entre sí. De esta manera la comparación de números se conecta con indicios perceptivos claros y queda reforzada por ellos: «Tú tienes ocho naves espaciales en la luna y yo tengo dos. Mira qué *larga* es la fila de naves que tienes. Ocho naves es más que dos». Gradualmente el niño irá aprendiendo la idea de que los números se asocian con la magnitud y que los números que vienen después en la serie numérica son *mayores*. Una vez hayan arraigado estas ideas básicas, el niño deberá ser apartado de actividades con objetos concretos y se le pedirá que resuelva los problemas mentalmente.

Ejemplo 6.3. Juegos de comparación entre números concretos

INVASORES DE LA LUNA

Objetivo:

Comparaciones entre números del 1 al 10 separados o seguidos.

Material:

1. Varias lunas (círculos de papel) de distinto color
2. Dos conjuntos de cubos encajables de distinto color
3. Una peonza con los números del 1 al 10 (para comparaciones entre números separados) o un conjunto de tarjetas en las que se listen comparaciones específicas para cada objetivo

Instrucciones:

Esparcir los círculos por la mesa. Dar un conjunto de cubos a cada uno de los dos jugadores. Explicar que los círculos son lunas y que los cubos son naves espaciales. El jugador que haga «alunizar» más naves en una luna se queda con ella y el que conquiste más lunas gana la partida. Usar la peonza o las tarjetas para determinar la cantidad de naves que puede hacer alunizar cada jugador. Preguntar a uno de los niños qué jugador ha hecho alunizar más, por ejemplo: «Tú tienes cinco naves y Billy tiene tres. ¿Cuánto es más, cinco o tres?» De ser necesario señalar las distintas longitudes (o alturas) de los dos conjuntos de cubos encajables.

DOMINÓ MÁS (MENOS) UNO

Objetivo:

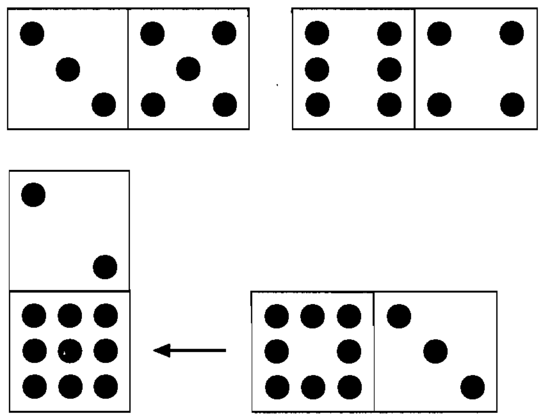
Comparar números seguidos (más o menos uno) del 1 al 10

Material:

Fichas de dominó

Instrucciones:

Este juego, basado en uno propuesto en el currículo de Wynroth (1969-1980) se juega como el dominó normal pero con una excepción. En vez de emparejar conjuntos numéricamente equivalentes para ir añadiendo fichas, las fichas que se añaden deben tener un conjunto de puntos mayor (o menor) en una unidad al conjunto de la ficha del extremo de la hilera. La figura que sigue ilustra un caso de «Dominó menos uno». Un jugador va a añadir una ficha con «8» al extremo que tiene «9».



Con los niños de educación especial puede ser muy útil indicar la estrategia para contar que puede usarse para comparar números seguidos y cómo se relaciona esta estrategia con las técnicas básicas para saber el número «que viene después». Explicar, por ejemplo: «Para saber qué número es mayor, contemos a ver qué número viene después. Para los números 3 y 4 contamos «1, 2, 3» y como después del 3 viene el 4, el 4 es mayor». También puede ser útil demostrar el procedimiento para el niño y emplear una lista numérica o bloques encajables para contar. Llegado el momento, el procedimiento de contar se puede interrumpir para preguntar al niño: «¿Qué es más, 4 o 3? ¿Qué número viene *después* cuando contamos?» Otra manera de hacer explícita la conexión entre la comparación y la técnica del número «que viene después» es continuar las preguntas sobre el número «que viene después» con preguntas del tipo «cuál es mayor». Por ejemplo se puede preguntar: «¿Qué viene justo después del 3 cuando contamos? Decimos 3, ¿y luego?» Una vez que haya respondido el niño, preguntarle: «¿Y cuál es más, 3 o 4?» (nótese que para forzar al niño a pensar realmente en la comparación, el número mayor se menciona en primer lugar o «sin seguir el orden usual» la mitad de las veces, aproximadamente).

c) Implicaciones educativas: la enseñanza de técnicas para contar

A continuación se resumen algunas directrices generales para la enseñanza.

1. *Los niños deben dominar cada técnica para contar hasta que llegue a ser automática.* Esto es esencial porque las técnicas para contar se basan la una en la otra y sirven de base para técnicas más complejas como hacer sumas o devolver cambios. Si las técnicas básicas no son eficaces, no pueden integrarse bien con otras técnicas para la ejecución de funciones más complejas.
2. *La enseñanza de apoyo debe basarse en experiencias concretas.* Para que la enseñanza de una técnica básica para contar sea significativa, deberá basarse en actividades concretas. Además y sobre todo con poblaciones de educación especial, puede ser importante enlazar explícitamente actividades concrertas con la técnica que se enseña.
3. *La enseñanza de apoyo debe ofrecer, durante un largo periodo de tiempo, un ejercicio regular con actividades de interés para el niño.* Normalmente el dominio incompleto de las técnicas básicas para contar suele atribuirse a una falta de experiencia o interés. Si los ejercicios no son interesantes, algunos niños no se sentirán comprometidos con ellos y no alcanzarán la experiencia necesaria para el dominio de la técnica. Por ejemplo los niños se cansan en seguida de los ejercicios de repetición oral para aprender a contar. Los niños se sienten más dispuestos a generar la serie numérica en el contexto de enumerar objetos porque se trata de una actividad que tiene más sentido para ellos (Fuson *et al.*, 1982). La forma concreta que deberá tener el ejercicio dependerá del niño. Muchos niños responderán con entusiasmo a distintos tipos de juegos que se basan en contar; otros preferirán jugar con un títere de "Barrio Sésamo" y otros podrán disfrutar con el contacto de un tutor, sea niño o adulto, interesado y entusiasta. Lo esencial es que el ejercicio no necesita —es más, no debe— carecer de interés para el niño.

A continuación se presentan otros juegos y actividades para enseñar a contar de palabra, a numerar y a comparar magnitudes.

Juegos y actividades

ESTRELLAS ESCONDIDAS

Objetivo:
1. Enumerar
2. Regla del valor cardinal

Materiales:
Tarjetas con estrellas u otros objetos dibujados (de 1 a 5 para principiantes).

Instrucciones:
Explicar: «Vamos a jugar al juego de las estrellas escondidas. Te voy a enseñar una carta con estrellas

y cuentas cuántas hay. Cuando hayas acabado de contar esconderé las estrellas y, si me dices cuántas estoy escondiendo, habrás ganado un punto». Levantar la primera tarjeta y hacer que el niño cuente las estrellas. Taparlas con la mano o un trozo de cartulina y preguntarle: «¿Cuántas estrellas estoy escondiendo?» El niño deberá responder citando únicamente el valor cardinal del conjunto. Si el niño empieza a contar desde 1, preguntarle si hay alguna otra manera más fácil para indicar las estrellas que se han contado. Si es necesario enseñar al niño directamente la regla del valor cardinal demostrando la tarea y «pensando en voz alta» (describiendo el procedimiento y el razonamiento en que se basa).

PREDECIR LA CANTIDAD

Objetivos:
Concepto de cuenta cardinal
Materiales:
Objetos pequeños que se puedan contar como bloques o fichas
Instrucciones:
Dar al niño un conjunto de bloques (por ejemplo cinco) y decirle: «Toma cinco bloques. ¿Cuántos habría si los contaras?» Después hacer que el niño cuente el conjunto para que compruebe su respuesta. También puede hacerse con un dado. Después de una tirada, no permitir que el niño cuente inmediatamente los puntos y seguir, en cambio, el procedimiento descrito anteriormente.

CARRERA DE COCHES

Objetivos:
1. Enumerar
2. Separar

Materiales:
1. Un tablero con pista de carreras (una hilera de casillas en espiral).
2. Un dado (con 0 a 5 puntos al principio; 5 a 10 para niños más avanzados).
3. Coches en miniatura

Instrucciones:
Hacer que los niños escojan los coches que más les gusten. Colocar los coches al principio de la pista. Tirar el dado por turnos y hacer avanzar los coches el número correspondiente de casillas. Hacer que los jugadores cuenten los puntos del dado (enumeración) y las casillas cuando avanzan los coches (separación). Estas técnicas también pueden practicarse con otros juegos de tablero básicos de temática diversa, de acuerdo con los intereses de los niños.

RELLENAR

Objetivos:
1. Enumerar
2. Separar

Materiales:
1. Tableros de juegos o pistas de carreras individuales
2. Fichas
3. Baraja de cartas con puntos (1 a 5 para principiantes; 6 a 10 para niños más avanzados)
4. Bandejas pequeñas (por ejemplo tapas de plástico)

Instrucciones:
Dar a cada niño un tablero o una pista de carreras. Decir: «Vamos a ver quién rellena primero su tablero (pista de carreras)». Hacer que cada niño, por turnos, levante una carta de la baraja y cuente los puntos para determinar cuántas fichas debe tomar. Decirle al niño que tome esta cantidad. Hacer que el niño separe las fichas que le han tocado en una bandeja pequeña (este procedimiento hace que la corrección de los errores de separación sea menos confusa). Si se comete un error, vaciar la bandeja. Hacer que el niño lo vuelva a intentar o, si es necesario, ayudarle a extraer el número correcto. Una vez extraído el número correcto, hacer que el niño coloque las fichas en su tablero. Gana el niño que llena antes su tablero.

EL NÚMERO TAPADO

Objetivos:
Determinar el número anterior o posterior a un número dado (del 1 al 9)

Materiales:
Tarjetas numeradas del 1 al 9
Instrucciones:
La versión básica de este juego se describe con más detalle en Bley y Thompson (1981) junto con otros juegos como *Walk on* [«Sigue andando»] y *Peek* [«Echa una ojeada»] que son útiles para enseñar números posteriores a otro dado. Para la versión básica de *El número tapado*, extender las tarjetas numeradas, boca arriba y por orden, encima de la mesa. Decir al niño que cierre los ojos, poner una carta boca abajo y decir al niño que ya puede mirar para averiguar qué carta es la que se ha puesto boca abajo. Señalar la carta anterior (posterior) a la carta tapada y decir, por ejemplo: «¿Qué carta es ésta? ¿Qué viene justo después [antes] del 6?» Continuar hasta que se haya tapado cada número una vez. La versión básica es especialmente útil para los niños que no pueden responder a esta pregunta empezando a contar desde el 1 y para los que confunden el número anterior con el posterior. Una versión más avanzada comporta eliminar los indicios visibles de la serie numérica y requiere que el niño resuelva el problema mentalmente. Para ello no hay más que colocar todas las tarjetas boca abajo y levantar una de ellas, pidiéndole al niño que diga qué número va antes o después del levantado.

CARRERA DE NÚMEROS

Objetivos:
Comparaciones entre números separados del 1 al 10
Materiales:
1. Una hilera de casillas (de 15 x 75 cm aproximadamente) con los números del 1 al 10 (véase la figura 6.3)
2. Coches en miniatura

Instrucciones:
Hacer que cada jugador escoja el coche que guste. Colocar los coches en la línea de salida (unos 15 cm a la izquierda de la casilla con el número "1"). Decir a los niños que sus coches van a echar una carrera y que ganará el coche que vaya más *rápido*. Hacer que los niños den un empujón a sus coches a lo largo de la pista. Los coches que se salgan por el otro extremo o por los lados de la pista quedan descalificados. Si un coche se detiene sobre una línea de separación entre casillas, se colocará en la casilla en la que descanse la mayor parte del coche. Cuando los dos jugadores han empujado sus coches, preguntar a uno de ellos: «Tu coche se ha ido al 5 y el de Jane se ha ido al 3. ¿Qué es más, 5 o 3? ¿Quién gana?» Variar el orden en que se mencionan los números para que el mayor se encuentre unas veces al principio y otras al final. Si es necesario corregir al niño enseñándole sobre la lista de números que un número mayor implica recorrer más casillas.

Figura 6.3. "Pista" de la Carrera de números.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

JUEGO DE PERSECUCIÓN

Objetivos:
Comparación entre números seguidos
Materiales:
1. Tablero con casillas en espiral
2. Dos fichas
3. Tarjetas con diferentes comparaciones (del 1 al 5 para principiantes; números mayores para niños más adelantados)

Instrucciones:
Decirle al niño que nuestra ficha va a perseguir a la suya por el tablero de juego. Sacar una tarjeta y leer los dos números escritos en ella. Decirle al niño que escoja el número mayor. La elección del niño indica cuántas casillas debe avanzar su ficha; el otro número indica la cantidad de casillas que debe avanzar la nuestra. Después de cada turno, comentar las posiciones de las fichas diciendo, por ejemplo: «Pues sí, éste es el que tiene más. Tu ficha todavía va por delante», o «No, ése no es más. Mira, mi ficha ya está pillando a la tuya». Si el niño tiene dificultades, pueden usarse bloques o una lista de números para ilustrar la comparación.

d) Resumen

Generar de palabra la serie numérica sólo es un primer paso hacia el dominio de un complejo de técnicas importantes que los adultos emplean de manera rutinaria y automática. Cuando llegan a la escuela los niños suelen ser capaces de generar la parte memorística de la serie numérica y un poco de la parte basada en la aplicación de reglas, además de poder enumerar y separar conjuntos de objetos, emplear la regla del valor cardinal para resumir una enumeración e incluso emplear relaciones de orden numérico (números anterior y posterior a otro dado) para determinar la mayor de dos cantidades. Algunos niños, sobre todo los deficientes mentales, pueden necesitar una educación de apoyo para dominar estas técnicas informales básicas. Durante los primeros años de escuela los niños resuelven el problema de las decenas y amplían su capacidad de contar de palabra hasta 100 y más. A medida que se van familiarizando con la serie numérica, aprenden a contar por intervalos (por ejemplo por parejas) y a contar regresivamente. La enseñanza especial o de apoyo debe asegurar que se llegue al dominio de cada componente sucesivo de la jerarquía de técnicas para contar. La enseñanza deberá ser concreta, intensa e interesante.

Notas de la lectura

1 Las conductas que se describen más adelante se basan en las normas de la prueba *Early Mathematical Ability* (Ginsburg y Baroody, 1983) y representan la capacidad "media" de un niño de 4 años y 11 meses.

2 En el original se hace referencia al número 13. Debido a las características que presentan los nombres de los números 11 a 19 en inglés, se ha optado por adaptar la traducción a las características de los nombres de estos números en castellano. Véase también la nota número 12 (N. del T.).

3 Se ha hecho una adaptación al castellano de las dificultades que, en el original, se refieren al nombre de ciertos números en inglés. Véase también la nota número 12. (N. de T.).

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

PRESENTACIÓN

En esta unidad se ofrecen contenidos a través de los cuales se ilustra la manera en que el conteo es utilizado por los niños para resolver problemas aritméticos sencillos de suma y resta.

Los problemas aritméticos hacen referencia a situaciones en las cuales el niño tiene que determinar el resultado de añadir (o quitar) elementos a una cantidad inicialmente conocida. En este sentido se habla de situaciones problemáticas (o situación-problema).

Un ejemplo de situación problemática para la suma consiste en presentarle al niño seis frijoles, una vez que los ha contado se ocultan y se le añaden tres más: "¿Cuántos frijoles hay en total?" Para resolver este problema los niños usualmente se apoyan en modelos (dibujar los frijoles, representarlos físicamente o bien utilizando los dedos) y en estrategias que consisten en *contarlo todo;* dibujan primero seis frijoles, después otros dos y finalmente cuentan todos para encontrar el resultado (Cfr. las lecturas de Brissiaud y Labinowicz). Un procedimiento más evolucionado consiste en *contar a partir de,* el niño cuenta seis frijoles, añade dos más y continúa contando; "siete", "ocho" (Cfr. Labinowicz).

Contar a partir de y prescindir de modelos constituye una de las estrategias de conteo más evolucionadas que utilizan los niños para resolver problemas de suma a través del cálculo (Cfr. Brissiaud). Por su parte, las estrategias de conteo que utiliza para resolver problemas de resta consisten en "contar los frijoles que quedan, empezando por el uno" y "contar hacia atrás" (para mayores detalles véase la lectura de Labinowicz).

Si bien los niños pequeños (por ejemplo de 5 años) son capaces de resolver problemas aritméticos de suma y resta en un nivel de lo concreto (apoyándose en modelos), generalmente presentan fallos cuando se introduce el lenguaje matemático ("¿Cuántos son dos más dos?"). Esta dificultad es analizada por Hughes a través de dos hipótesis: a) la noción de abstracción y b) el lenguaje matemático.

Hughes considera que es necesario realizar "traducciones" que, de manera progresiva, permitan al niño pasar de lo concreto a lo abstracto y de un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático al que no están acostumbrados. Propone, como estrategia didáctica, la utilización de juegos numéricos para favorecer en el niño dichas traducciones.

Tema 1. *El conteo como instrumento en la resolución de problemas sencillos de adición y sustracción*

LECTURA: DOS FORMAS DE RELACIONAR CANTIDADES: CONTAR Y CALCULAR*

PRESENTACIÓN

En este artículo Brissiaud sostiene que los problemas aritméticos más sencillos consisten en situaciones en las que se añade (o se quita) un determinado número de elementos a una cantidad inicialmente conocida.

Un ejemplo de problemas de adición (situaciones en las que el niño tiene que determinar el resultado de añadir una cantidad) consiste en presentarle al niño cuatro fichas y solicitarle que las cuente. Posteriormente se ocultan y se añaden dos más, de tal manera que todas quedan ocultas. Brissiaud sostiene que este tipo de problemas es resuelto por la mayoría de los niños de 5 años (en un 81%) quienes utilizan procedimientos de conteo. El más usual de estos procedimientos consiste en "volver a contar todo". El niño cuenta cuatro objetos (utilizando modelos; los dibuja, los representa físicamente o bien utiliza los dedos) y añade dos más a los anteriores para, después, contar todo.

En situaciones en las que el niño tiene que encontrar el resultado de quitar elementos a una cantidad inicialmente conocida (problemas de sustracción), el procedimiento que utiliza consiste en "contar lo que queda". Si la situación-problema consiste en presentarle seis fichas para que las cuente, después se le ocultan y se extraen dos. ¿Cuántas fichas quedan ocultas? Para resolver este problema los niños representan, a través de modelos, la cantidad inicial, luego quitan dos elementos y, finalmente, cuentan lo que queda.

* Remi Brissiaud. "Dos formas de relacionar cantidades: contar y calcular", en: *El aprendizaje del cálculo*. Madrid, Ed. Visor, 1989. pp. 81-123.

El autor señala que a partir de los 5-6 años la mayoría de los niños prescinden de estos modelos, o lo hacen progresivamente. Aparentemente no cuentan y obtienen la solución "en la cabeza" a través de representaciones mentalmente numéricas 4 y 2 (en la suma) y 6 y 2 (en la resta) a propósito de los problemas que presentamos arriba.

De acuerdo con Brissiaud la representación mental numérica, de las cantidades involucradas en un problema, se encuentra íntimamente relacionada con el cálculo. "Calcular es establecer una relación directa entre cantidades a partir de sus representaciones numéricas, sin pasar por la construcción física de una o varias colecciones cuyos elementos se cuentan".

De acuerdo con lo anterior, el conteo y la utilización de modelos (en la resolución de problemas de suma y resta) es un precedente importante en el niño para que éste pueda acceder al cálculo.

DOS FORMAS DE RELACIONAR CANTIDADES: CONTAR Y CALCULAR

La distinción entre contar y calcular

Los problemas aritméticos más sencillos son aquellos en los que se añade (o se quita) un determinado número de elementos a una cantidad inicialmente conocida: se trata de hallar el resultado de añadir o quitar una cantidad. Son dos tipos de problemas que nos servirán de ejemplo para distinguir la acción de contar de la de calcular.

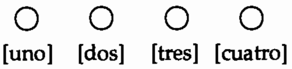
Un primer ejemplo: determinar el resultado de añadir una cantidad

Examinaremos la siguiente situación: el maestro tiene 4 fichas en la mano abierta, se las enseña a los niños para que las cuenten. Después de cerrar la mano enseña 2 nuevas fichas a los niños y las introduce en la mano, sin abrirla, con las anteriores. Los niños deben adivinar el número de fichas ocultas (búsqueda del resultado de añadir una cantidad).

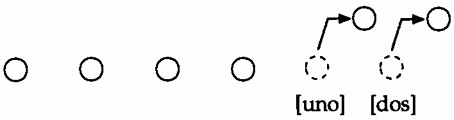
Este problema se suele resolver correctamente -de modo precoz (R. Gelman[1] observa un 81% de aciertos en niños de 5 años). Los procedimientos empleados dependen de las ayudas de que disponga el niño (papel y lápiz, cubos o, una vez más, los dedos) y son de dos tipos: los procedimientos para contar y el cálculo.

Los procedimientos para contar son variados, pero el más precoz es el que consiste en «volver a contar todo»:

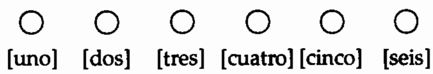
— el niño cuenta 4 cubos (o crea una colección de 4 dedos o dibuja 4 fichas...):



— añade 2 cubos a los anteriores (o levanta otros 2 dedos, o dibuja otras 2 fichas):



— "vuelve a contar todo":



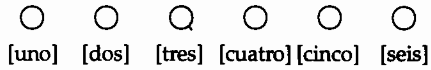
Pero, a partir de los 5 o 6 años, algunos niños resuelven el problema sin constituir colección alguna, sin mover los dedos ni los labios. Aparentemente no cuentan y obtienen la solución directamente «en la cabeza» con la única ayuda de las representaciones numéricas 4 y 2.

Un segundo ejemplo: hallar el resultado de quitar una cantidad

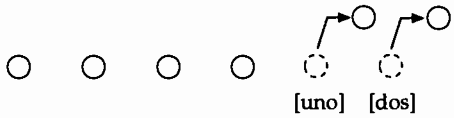
Examinemos ahora la situación en la que el maestro tiene 6 fichas en la mano abierta y se las muestra a los niños para que las cuenten. Después de cerrar la mano, extrae dos fichas de la mano cerrada. Los niños tienen que adivinar el contenido oculto de la mano (búsqueda del resultado de quitar una cantidad o de una resta).

También en este caso se resuelve el problema de manera precoz (R. Gelman obtiene un 56% de acierto en niños de 5 años), y los procedimientos empleados son de dos tipos: los procedimientos para contar y el cálculo. En este caso el procedimiento para contar más precoz es el que consiste en «contar lo que queda»:

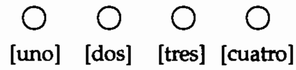
— el niño cuenta 6 cubos (o crea una colección de 6 dedos o dibuja 6 fichas...)



— quita 2 cubos (o baja dos dedos, o tacha 2 de las fichas dibujadas)



— "cuenta lo que queda":



Pero también a los 5 o 6 años algunos niños resuelven el problema sin constituir colección alguna, sin mover los dedos ni los labios. Aparentemente no cuentan y obtienen la solución directamente "en la cabeza", con la única ayuda de las representaciones numéricas 6 y 2.

Dos procedimientos de solución: contar y calcular

Los niños, por tanto, saben resolver ciertos problemas de suma y de resta antes de que haya tenido lugar cualquier tipo de aprendizaje del simbolismo aritmético —de los signos «+», «-» o «=»— y emplean dos tipos de procedimientos:

— procedimientos para contar que requieren el uso de objetos con los que los niños imitan las transformaciones descritas en el enunciado: en los problemas que nos han servido de ejemplos, construyen la situación de partida con los objetos, antes de añadir o quitar la cantidad descrita en el enunciado;

— procedimientos de cálculo: el cálculo se define por oposición a la acción de contar.

Calcular es establecer una relación directa entre cantidades a partir de sus representaciones numéricas, sin pasar por la construcción física de una o varias colecciones cuyos elementos se cuentan.

Esta definición se adecua al empleo habitual de la palabra «cálculo»: el niño del curso elemental que pone una suma en «columnas» hace un cálculo porque trabaja exclusivamente con cifras escritas, sin representar las cantidades correspondientes por medio de colecciones de muestra.[2]

Dos campos numéricos: el del cálculo y el de la acción de contar

Para el niño pequeño los números no constituyen un campo de conocimiento homogéneo. De modo esquemático, cabe distinguir dos campos numéricos: el campo en el que el niño sabe calcular y el campo, más amplio, en el que emplea la acción de contar.

Casi todos los niños, al final de la escuela infantil, saben resolver mediante el cálculo mental problemas numéricos en los que sólo intervienen cantidades muy pequeñas: hallar el resultado de añadir una unidad a una cantidad inicial de 2, o el de quitar una unidad a una cantidad inicial de 2, o el de quitar una unidad a una cantidad inicial de 3. En el campo numérico de los 3 primeros números, casi todos los niños son capaces de calcular mentalmente al final de la escuela infantil. Para muchos niños el campo numérico en el que saben calcular es, evidentemente, mucho mayor.

Con cantidades más grandes, los niños son capaces de resolver problemas, pero empleando colecciones de muestra, mediante procedimientos en los que interviene la acción de contar como lo que hemos denominado «volver a contar todo» y «contar lo que queda». Dichos procedimientos constituyen una *especie de imitación* de las relaciones descritas en el enunciado. Este conocimiento se suele extender a un campo numérico muy amplio. Por eso la utilización de un calendario o saber cuántos niños están presentes o ausentes pueden conducir a los alumnos de la última etapa de la escuela infantil a adquirir una gran soltura en resolver algunos problemas relacionados con estas situaciones (conociendo el número total de alumnos de la clase y el de los presentes, determinar el número de los ausentes...). Pero para poder hacerlo bien, los niños tienen necesariamente que disponer de instrumentos que les permitan contar: por ejemplo, el calendario del aula para resolver problemas sobre la duración, o la colección de etiquetas que indican el número de niños de la clase para saber cuántos están presentes o ausentes.

Una primera opción pedagógica consiste, por tanto, en distinguir dos campos de actividades numéricas:

— un campo muy amplio (en la última etapa de la escuela infantil puede contener los 30 primeros números), en el que los niños resuelven problemas por procedimientos en los que interviene la acción de contar, empleando colecciones de objetos (contar todo, contar lo que queda...);
— un campo más restringido en el que los procedimientos de cálculo son sistemáticamente los más importantes.

La función del maestro es permitir que el niño amplíe su campo de cálculo para que, al final, abarque por entero el campo en el que se cuenta.

Esta opción no es evidente. Con frecuencia los maestros (sobre todo los del curso preparatorio) introducen los números lentamente, uno tras otro. Suelen esperar a que el niño haya desarrollado una buena competencia en calcular con los *n primeros números, antes de introducir el número n* + 1. En el curso escolar, los alumnos se enfrentan a la acción de contar grandes colecciones muy tarde.

La solución que hemos adoptado aquí parece preferible en la medida en que el empleo de la acción de contar en un campo numérico muy amplio prepara para el posterior acceso al cálculo en el mismo campo. Esto parece evidente en lo que se refiere a los números comprendidos entre 20 y 30; en las clases donde se emplea el calendario para saber la duración o se realiza la actividad de saber los presentes y los ausentes, muchos niños de la última etapa de la escuela infantil son rápidamente capaces de enunciar relaciones numéricas como «22 y 1 son 23», aun cuando no tienen el conocimiento correspondiente con los números que contienen una decena: ¡no saben que «12 y 1 son 13»! Esto se explica fácilmente por el hecho de que la numeración oral es más regular después del 20. Como no se emplea la serie «diez-uno» (once), «diez-dos» (doce), «diez-tres» (trece)... el niño, en «veintiuno», «veintidós», «veintitrés», «veinticuatro»... vuelve a encontrar la secuencia de las palabras-número uno, dos, tres, cuatro..., la que mejor domina.

El niño de la última etapa de la escuela infantil que comienza a emplear relaciones numéricas como «22 y 2 son 24» carece de un conocimiento explícito de la descomposición aditiva de estos números en veintenas y unidades y no se puede decir que calcule (cabe pensar más bien que se deja guiar por la regularidad del lenguaje), pero hace un uso implícito de dicha descomposición en veintenas y unidades, y una excelente estrategia pedagógica consiste en permitir que el niño, en primer lugar, descubra regularidades a través del uso para llevarle después a reflexionar sobre ellas.

En realidad, la simple recitación de los números del 20 al 30 ya es beneficioso para los niños. Efectivamente, cuando un niño recita [uno], [dos]... [cinco], [seis], [ocho], la palabra-número [ocho] se recuerda con facilidad porque está como «aspirada» por el [siete]: siete-ocho [*sept-huit*]. En cambio, cuando el niño debe intercalar [veinte] entre estas palabras-número, el automatismo se rompe y debe buscar la palabra número que viene después de [siete]. Tiene, por tanto, que *reflexionar* sobre la serie de los primeros números.

La solución de problemas no requiere el empleo de igualdades numéricas

Mientras el tamaño de las cantidades permita la formación de colecciones de muestra, hallar el resultado de añadir o quitar una cantidad no requiere saber emplear los signos «+», «-» o «=»: los niños utilizan procedimientos en los que interviene la acción de contar. Si las cantidades son lo suficientemente pequeñas, calculan. Cuando se pide a los niños pequeños que han hallado la solución mentalmente que expliquen cómo lo han hecho, suelen ser incapaces de hacerlo de forma clara. Se contentan con afirmaciones como: «Lo he encontrado en la cabeza», «Porque lo sé», etc. Pero llega un momento en que se obtienen afirmaciones como: «Porque 4 y 2 son 6» o «Porque si a 6 le quito 2 son 4». También en este caso, los niños conocen ciertas relaciones entre los números antes de que haya tenido lugar cualquier aprendizaje del simbolismo aritmético o un aprendizaje «de memoria» de los resultados de una tabla de operaciones (suma o resta). Expresan las relaciones mediante el lenguaje corriente: dicen «4 y 2 son 6». No hay necesidad de los signos «+» o «=».

Plantear problemas aritméticos desde la escuela infantil

Se observará que hemos evitado calificar los problemas que nos han servido de ejemplo de «problemas de suma» o «problemas de resta», pues estas locuciones son ambiguas; pueden hacer creer que se trata de problemas que sólo se pueden plantear a los niños después del estudio de los signos «+» y «-». La introducción del simbolismo de la división no figura en el programa antes del curso elemental y, sin embargo, parece importante que los niños se enfrenten a problemas de reparto desde la última etapa de la escuela infantil aunque, desde luego, en condiciones en que puedan representar las cantidades correspondientes por medio de colecciones de muestra.

Aquí se halla uno de los principales despistes de la práctica pedagógica posterior a la reforma de 1970. Antes de ésta, las «4 operaciones» figuraban en el programa oficial desde el final de la escuela infantil, y los niños se enfrentaban a diferentes problemas desde temprana edad. Se retrasó, con razón, el empleo de un simbolismo aritmético de complicado dominio: los signos «x» y «-» no se introducen hasta el curso elemental. Pero, en la actualidad, los niños no suelen enfrentarse a los primeros problemas «de sustracción» y «de multiplicación» hasta el primer año del curso elemental, y a los primeros problemas «de división» hasta el segundo año del curso elemental, lo cual supone ignorar que estos problemas se pueden resolver por procedimientos distintos a los que consisten en «plantear las operaciones», sobre todo por procedimientos en los que interviene la acción de contar cuando el tamaño de las cantidades permite representarlas por medio de colecciones de muestra.

Conclusión

En primer lugar, hemos mostrado que, desde la escuela infantil, los maestros pueden proponer dos tipos de actividades de forma paralela que no se relacionan con el mismo tipo de campo numérico: el aprendizaje del cálculo con los primeros números y la solución de problemas por procedimientos en los que los niños cuentan en un campo numérico más amplio.

Asimismo el empleo de los signos «+» o «=» no es condición previa al cálculo ni a la solución de problemas por procedimientos en los que interviene la acción de contar. Por eso el maestro del curso preparatorio podría pensar en retrasar la introducción de la igualdad aritmética.

Notas de la lectura

1 Starkey, P. y Gelman, R., 1982.

2 La palabra "cálculo" viene del latín *Calculi* "piedrecillas", pero tampoco hay contradicción en este caso con la definición que se ha propuesto, porque las piedras "calculi" representaban decenas, centenas, etc., no sólo unidades. No se "calculaba" con colecciones de muestra organizadas construidas por correspondencia uno a uno.

LECTURA: CONTEO FLEXIBLE Y EFICIENTE*

PRESENTACIÓN

Cuando se les presentan problemas sencillos de adición y sustracción, los niños pequeños usualmente recurren al conteo para resolverlos. Que la resolución sea eficiente o no depende de los métodos de conteo que utilicen.

Para resolver problemas de adición los niños utilizan, de manera progresiva, dos procedimientos o métodos de conteo: "contar todo" y "contar a partir de" [counting-on].

¿Cuántos son seis y tres?

contar todo	*contar a partir de*
El niño cuenta seis objetos y añade tres más a los anteriores para, finalmente, contar todo.	*El niño cuenta seis objetos, añade tres más y cotinua contando.*

El procedimiento "contar a partir de" resulta ser más eficiente y da evidencia de la comprensión del significado numérico de magnitud de los conjuntos. La regla del valor cardinal, asociada a la magnitud, permite resolver los problemas con mayor eficacia.

En la sustracción los métodos de conteo que usualmente se presentan son "contar los que quedan, empezando por el uno" y "contar hacia atrás".

Después de contar siete objetos, se quitan tres. ¿Cuántos quedan?

contar los que quedan, empezando por el uno	*contar hacía atras*
El niño procede retirando tres elementos, después cuenta los objetos que quedan empezando por el uno.	*El niño cuenta hacia atrás el número de objetos que se han quitado ("siete, seis y cinco"). Posteriormente, da como resultado el número inmediatamente anterior. "cuatro"*

De acuerdo con Labinowicz, "contar hacia atrás" requiere flexibilidad en el conteo, por lo que es necesario evitar que el niño internalice la secuencia numérica verbal como algo unidireccional.

CONTEO FLEXIBLE Y EFICIENTE

Los niños pequeños son impresionantes en sus habilidades para recitar secuencias de palabras contables empezando con el "uno", pero tienen dificultades cuando inician su conteo en otros puntos de la secuencia, contando tanto en dirección ascendente como descendente, al responder a preguntas como las siguientes:

Cuando estás contando, ¿qué palabra viene inmediatamente (después, antes) de siete? (secuencia)

¿Qué número es uno (mayor, menor) que siete? (magnitud)

Cuando estás contando, cuáles números intervienen (después de tres y antes de siete, antes de siete y después de tres)? (secuencia)

Dime dos números que sean (mayores que tres y menores que siete, menores que siete y mayores que tres) (magnitud)

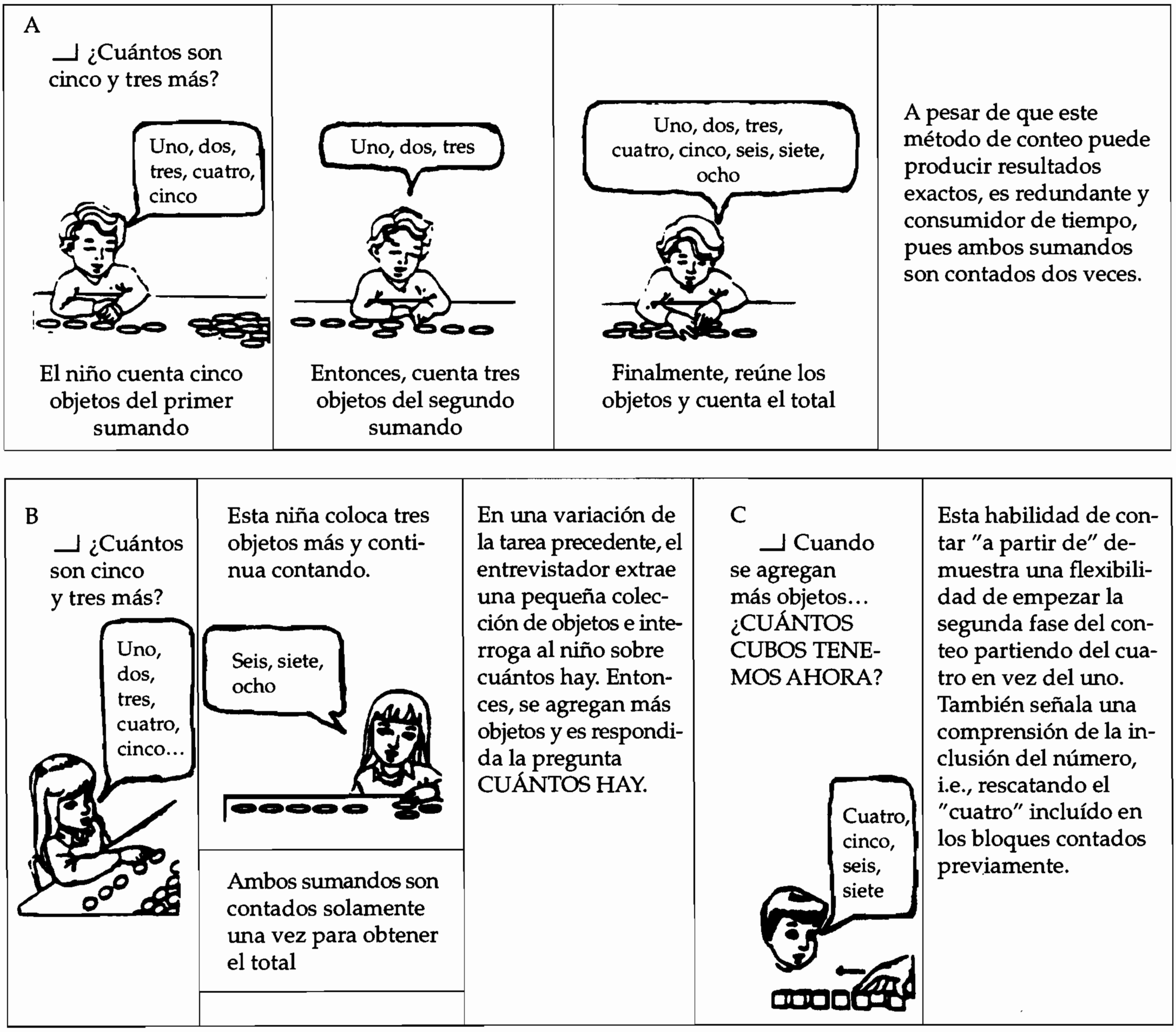
Una carencia general de flexibilidad o incapacidad para ver un número en relación con otros —menores o mayores— en el conteo de los niños pequeños sugiere que su secuencia verbal de conteo ha sido internalizada como una unidad unidireccional total.

Al serles presentados problemas de adición y sustracción, los niños pequeños quizá sean capaces de resolverlos a través del conteo, pero de maneras que son menos eficientes. Una solución común para una tarea de adición se ilustra a continuación. (Dibujo A página siguiente)

No obstante las siguientes ilustraciones indican de qué manera algunos niños de cinco años son capaces de resolver tareas de adición de una manera más eficiente, conocida como *contar de* [counting-on] (contar a partir de) (Dibujo B sobre el texto).

De manera similar los niños pequeños pueden ser capaces de resolver tareas de sustracción, pero

* E. Labinowicz. "Conteo flexible y eficiente", en: *Laerning from children. New Beginings for teaching numerical thinking. A piagetian approach.* Addison-Wesley Publishing Company, 1985. pp. 48-53 (Trad. por Mario A. Sánchez R.).



sus métodos de conteo varían en eficiencia. (Dibujo página siguiente).

No obstante esta habilidad de algunos niños de cinco años para contar de y contar en retroceso de una manera eficiente parece estar limitada a contar hacia adelante o hacia atrás con uno, dos o tres objetos. Según Fuson y Hall (1982), los niños parecen incapaces de generalizar esta habilidad para contar cantidades más grandes hasta los seis años y medio o siete. Por consiguiente, a pesar de que algunos niños pequeños progresan gradualmente tanto en la flexibilidad como en la eficiencia de sus conteos, continúan restringidos a pequeñas cantidades de objetos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El siguiente ejemplo, descrito por Greco (en Kamii, 1982a) muestra una aproximación natural infantil para resolver problemas, en ausencia de la dirección de un adulto. El niño escoge conteo para resolver un problema real, a pesar de que no lo realiza inmediatamente.

Una madre de familia solicita a su hijo de cinco años de edad que coloque una servilleta en el plato de cada uno de los comensales, a la hora de la comida. Regularmente hay cuatro personas en la mesa. Jean Pierre sabía contar hasta 30 o más. No obstante, se dirige al servilletero y toma una servilleta que coloca

La tarea de adición precedente puede ser alterada con una de sustracción, empezando con una colección y retirando algunos objetos, en tanto se pregunta "CUÁNTOS HAY".	Después de contar ocho objetos. VOY A QUITAR ALGUNOS... ¿CUÁNTOS QUEDARON AHORA? □□□□□□□ □ Es retirado un objeto	A Cuenta los objetos que quedan empezando por "uno"  □□□□□□□ □	B Empezando de "ocho" y contando hacia atrás los objetos separados  □□□□□□□ □	Esta segunda estrategia requiere flexibilidad de retroceso del conteo o pensar en términos del número que viene inmediatamente antes del ocho, o en el número que es uno menor a ocho.

en un plato, vuelve a repetir la operación para cada plato, haciendo un total de cuatro viajes. A los cinco años, tres meses y 16 días, contó espontáneamente cuatro servilletas para tomarlas del servilletero y las distribuyó en la mesa. Procedió de esta manera durante seis días.

Al séptimo día hubo un invitado y un plato más de los usuales. Como acostumbraba, Jean Pierre tomó sus cuatro servilletas, las distribuyó y se dio cuenta de que uno de los platos continuaba vacío. En lugar de tomar una servilleta adicional, recogió las cuatro que ya estaban en los platos y las volvió a colocar en el servilletero. Entonces volvió a comenzar otra vez, realizando cinco viajes para completar la tarea.

Al día siguiente no estaba ahí el invitado, pero Jean Pierre continuó haciendo cuatro viajes durante cinco días más, hasta que redescubrió el conteo. Después de emplear este método durante diez días, a Jean Pierre se le comentó que otra vez había un invitado. Distribuyó sus cuatro servilletas como de costumbre pero, en esta ocasión, simplemente fue a tomar una servilleta más cuando vio el plato vacío. Al día siguiente, cuando nuevamente había cuatro personas, contó el número de platos antes de la acción de ir a buscar el mismo número de servilletas. Después de esto el arribo de un nuevo invitado nunca lo incómodo. (p. 29)

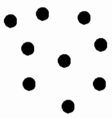
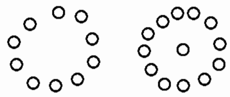
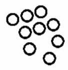
A pesar de que Jean Pierre recita palabras contables hasta el treinta y también podía contar conjuntos pequeños de objetos, hubo ocasiones en que nunca pensó emplear el conteo para resolver este problema o que prefirió no apoyarse en sus habilidades de conteo.

En otro estudio de Greco (citado en Kamii, 1981) se mostró a los niños nueve fichas en una disposición al azar y se les pidió que sacaran el mismo número. Todos los niños del estudio fueron capaces de contar más de nueve objetos, aunque el conteo no era la estrategia predominante para esta tarea en los niños pequeños. Fue sólo en el grupo de siete años en el que la mayoría de los niños escogieron el conteo. En el dibujo superior de la página siguiente, se ilustran diferentes niveles de respuesta ante esta tarea.

Antes de cumplir los siete años, los niños del estudio de Greco parecían tener más confianza para hacer correspondencias uno-a-uno o, incluso, en estimaciones aproximadas basadas en apariencias, que en sus habilidades de conteo. Los descubrimientos para esta tarea van en dirección contraria a la tendencia general de los niños para contar, tal como se muestra en otras tareas.

Una de las tareas clásicas de conservación de Piaget que tienen que ver con el número nos aporta mayor información sobre el conteo en los niños infantiles como una estrategia de resolución de problemas. (Dibujo inferior página siguiente).

Para la mayoría de los niños de siete años, el número de cada grupo es inalterable, a pesar del reacomodo, por razones lógicas como "No has agregado ningún huevo más". Si estas razones lógicas no estuvieran disponibles, los niños podrían demostrar la equivalencia de las filas contándolas. A pesar de que muchos niños de

SACA EL MISMO NÚMERO DE FICHAS	NIVEL DE RESPUESTAS			
	I. Copia figurativa aproximada (5 1/2 años)	II. Correspondencia uno -a- uno métodica	III. Conteo (7 años)	
 Modelo	 Dos intentos por sacar el mismo número de objetos, mirando raramente el modelo. Estas son estimaciones aproximadas basadas en la apariencia.	 Aquí, se hacen varias referencias al modelo y se vuelve a la caja.	 Primero, se cuenta la colección del modelo	 Después, se cuenta la colección propia

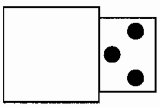
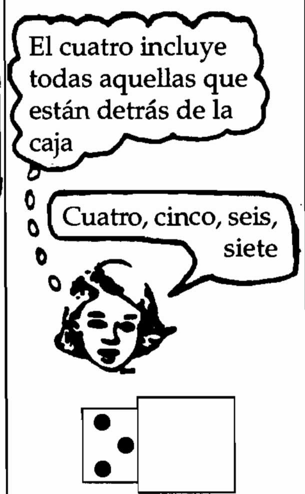
cuatro, cinco y seis años pueden contar ocho en cada fila, este resultado no parece ser relevante para su conclusión. Algunos de estos niños pequeños parecen no anticipar que el conteo dará lo mismo como resultado y, por lo tanto, no se dan cuenta de la discrepancia. A menudo los niños llegan a darse cuenta del inminente conteo equivalente, incluso contando mal a propósito para obtener un número mayor para la fila más larga. Dichos conteos equivocados a propósito son intentos por preservar sus ideas existentes.[1] Durante mucho tiempo, el hacer estimaciones aproximadas basadas en las apariencias externas, tales como la amplitud o el área de una colección, ha probado ser una manera confiable para comparar el tamaño de los grupos. En esta tarea, los conceptos incompletos de los niños pequeños en torno al "ocho" [eightness] se ha opuesto contra una estrategia perceptual firmemente establecida. Los niños pequeños están convencidos que el más largo o el más grande es mayor y el conteo no alterará su convicción durante uno o dos años más (Duckworth, 1979).

Las siguientes tareas demuestran aún más de qué manera la dependencia de los niños pequeños en torno a la información perceptual limita sus estrategias de resolución de problemas. Ambas tareas muestran información perceptual, previniendo a los niños, por lo tanto, de contar en la manera usual. La mayoría de los niños pequeños son incapaces de inventar nuevos métodos de conteo, ya que son totalmente dependientes del apoyo de los objetos perceptuales. No obstante, algunos niños pequeños son capaces de derivar información que no se encuentra perceptualmente disponible. Abajo se ilustra un rango de respuestas para estas tareas. (Dibujo abajo)

Ante la ausencia de objetos visibles, la mayoría de los niños pequeños son incapaces para contar. Algunos de ellos progresan más allá de esta dependencia perceptual directa creando representaciones de los objetos ocultos que, por ello, pueden ser contados. En la tercera respuesta, la conducta de señalamiento de la niña sugiere que, de manera deliberada, ella creó y contó una representación figurativa de los objetos ocultos. A pesar de que la niña creó una representación mental de estos objetos, continuaba siendo dependiente de la señalización de su localización anticipada. Este tipo de progresión en el conteo ha sido identificado en el trabajo de Steffe, Thompson y Richards (1982). La cuarta respuesta, aparentemente menos observada en los niños pequeños, demostró de qué manera la comprensión del significado numérico del conteo verbal puede servir para internalizar el proceso de conteo y reducir la necesidad de información perceptiva.

En una exploración de las habilidades de niños pequeños para obtener información disponible no perceptiva, O'Brien y Casey (1982b) aportó variaciones en las siguientes tareas, para niños de tres, cuatro y cinco años de edad. Algunos de los tipos de respuestas observados son ilustrados a continuación. (Dibujo abajo)

Nuevamente, la mayoría de los niños pequeños demostraron una dependencia de la infor-

TAREA	MÁS COMÚN	RANGO DE RESPUESTAS		MENOS COMÚN
Hay cuatro fichas detrás de esta caja... Cuéntalas para ver cuántas son todas juntas 	Dependencia en objetos visibles  Sin información perceptual directa, los niños son incapaces para encontrar el total.	Representación con los dedos Patrones familiares de dedos.  1. Se establece un patrón familiar con los dedos como una representación de los objetos ocultos. 2. Se establece otro patrón con los dedos para los objetos visibles. 3. El total es recontado y cada dedo es tocado por la barbilla [?]. (Esta conducta es otro indicador de la dependencia del niño de la información perceptiva).	Representación mental  Ella señala en donde considera que están ubicados los objetos ocultos, en sincronía con el conteo oral. El señalamiento sigue un patrón geométrico.	Contando de, basado en significado numérico 

mación perceptiva, dando respuestas que consideran los objetos actual o recientemente visibles (justo antes de que algunos fueran cubiertos). Algunos de estos niños obtuvieron éxito cuando el tamaño de la colección era reducida, cuando todos o ninguno de los objetos estaban ocultos o después de cambiar roles con el entrevistador. Aún así, algunos niños fueron incapaces de resolver la tarea a pesar de estas variaciones. Por otro lado, un número pequeño de niños fueron capaces de inferir el número de objetos ocultos en la tarea inicial. En vista de que estos niños no fueron observados empleando movimientos físicos característicos del conteo y de que dijeron poco a la pregunta de "¿cómo lo sabes?", sus métodos continúan siendo un misterio y alcanzan la posibilidad de que se hayan usado más estrategias que el conteo. En una excepción reportada, un niño fue observado contando de la siguiente manera (O'Brien y Casey, 1982b):

> *El niño toca la mesa por cada una de las fichas mostradas, continúa contando hasta el total (una vez que las fichas ocultas se han dispuesto en una línea, no en su posición original), luego cuenta los toques (vuelve a tocar) a partir del número de fichas mostradas (p. 6).*

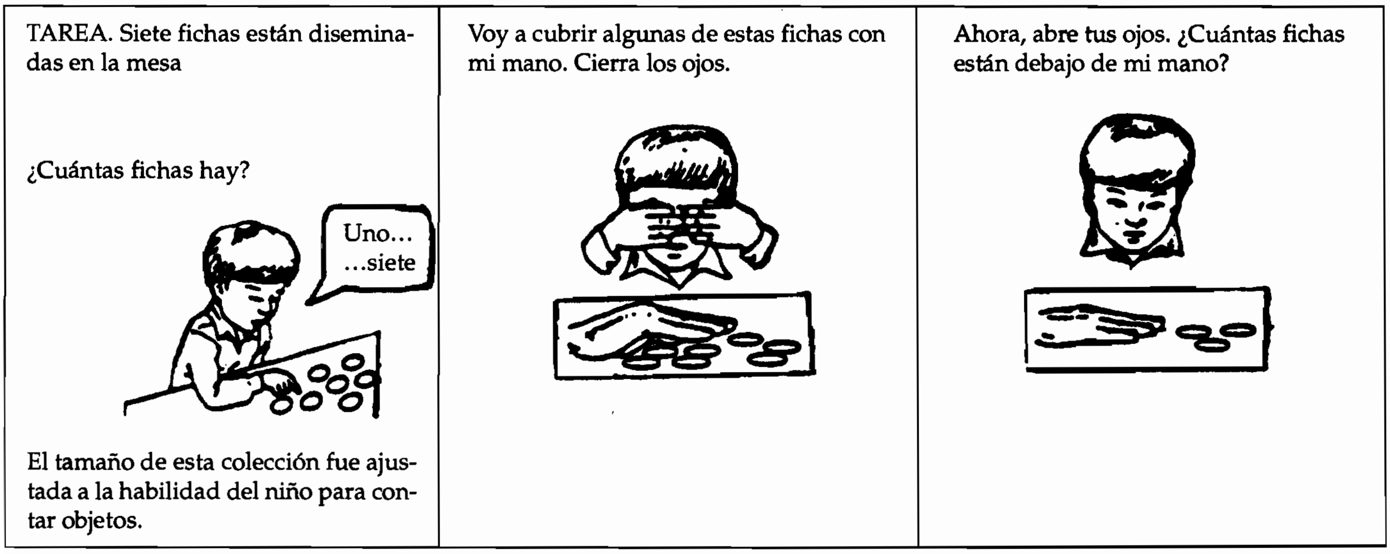
Este niño parece construir su propia representación figurativa de los objetos ocultos, que resulta útil para determinar cuántos conteos más son necesarios para alcanzar el total. Cuando el conteo es repetido, es aerodinamizado para contar a partir de los objetos visibles.

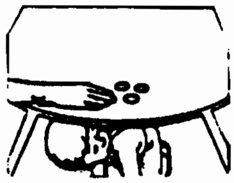
Ir más allá de la información perceptiva dada se encuentra en el centro de la actividad intelectual. Por esta razón es importante que exploremos la capacidad de los niños pequeños por dichas operaciones en actividades como la tarea de fichas ocultas. O'Brien y Casey (1982b) escriben sobre la importancia de la actividad para las matemáticas:

> *...Pero el conocimiento —especialmente el matemático— está interesado con la inferencia, la derivación de información que no se encuentra disponible perceptivamente, a través de la construcción y coordinación de relaciones (p. 12).*

Intentando entender la conducta de los niños ante tales tareas, también es necesario para el investigador extenderse él mismo más allá de lo que se encuentra disponible perceptivamente y construir inferencias acerca de los procesos de pensamiento infantiles. Al plantear preguntas claves, algunas veces el investigador puede obtener información adicional que verifique una corazonada preliminar. Desafortunadamente, debido a la poca edad de estos niños, no fueron muy productivas las preguntas adicionales.

Así, hemos visto que el conteo de los niños pequeños puede estar caracterizado como basado en conocimiento considerable que, principalmente, es externamente disponible y en conocimiento limi-



RESPUESTAS MÁS COMUNES DE LOS NIÑOS PEQUEÑOS		RESPUESTAS DE UN NIÑO PEQUEÑO		
 Cuenta los objetos visibles	 Aporta el total de la colección visible, previamente contada	1 Trata de mirar a través de la mano del entrevistador 	2 Gatea debajo de la mesa e intenta ver las fichas a través de la mesa 	3 Inicia un cambio de roles con el entrevistador. Cuando el entrevistador le dice cuantas fichas están ocultas, se muestra sorprendido. 

tado que ha sido construido internamente. Estos niños adquieren una difusa serie convencional de palabras contables y cuentan pequeñas colecciones de objetos cuando éstos se encuentran disponibles perceptualmente. A pesar de estas realizaciones, ellos han construido sólo un número limitado de significados dentro de una estructura relacional. Piaget nos alerta sobre una organización mayor en las perspectivas infantiles que marca la iniciación del estadio de operaciones concretas, alrededor de los siete años (como promedio). Aquí las estrategias perceptivas gradualmente dejan lugar a ideas lógicas.

Nota de la lectura

1 Profesores de la universidad Teacher's Center Project at Southern Illinios en Edwardsville reportan que en otras tareas, habiendo respondido uno más o uno menos en el conteo de objetos, los niños contarían mal, deliberadamente, cuando se les interrogó si su respuesta era correcta. Usualmente, este es un intento del niño por preservarse a sí mismo y sus ideas (incluso sus errores). A menudo, esto no es un problema de conteo.

Tema 2. *De lo concreto a lo abstracto*

LECTURA: ¿CUÁL ES LA DIFICULTAD DE DOS MÁS DOS?*

PRESENTACIÓN

Los niños pequeños son capaces para resolver problemas sencillos de adición y sustracción en un nivel de lo concreto, es decir, apoyándose a través de dibujos, de objetos físicos, o bien los dedos. Sin embargo, cuando se les pregunta "¿cuántos son dos más dos?", pocos niños contestan correctamente. ¿Cómo se explica esto?

En el presente artículo, Hughes examina esta dificultad a través de dos hipótesis: a) la noción de abstracción y b) el lenguaje matemático.

La primera hipótesis considera que los niños en edad preescolar, no obstante que tienen un cierto grado de comprensión concreta de los problemas de suma y resta, no logran utilizar el indispensable proceso de abstracción (abstraer los aspectos comunes a una gran cantidad de ejemplos específicos) que les permita prescindir de dichos aspectos concretos.

En una situación hipotética los niños pueden lograr cierto grado de abstracción ya que existe un desprendimiento de objetos concretos específicos. Ejemplo de una situación hipotética es el siguiente:

> *Se le presentan al niño siete frijoles, una vez que los ha contado se ocultan en una caja y se tapa. Después se le dice "si sacamos cuatro frijoles (acción que no se realiza), cuántos quedan (ocultos)". (Para mayores detalles véase, en la antología complementaria, la lectura "sumar y restar antes de llegar a la escuela" de Martín Hughes).*

La segunda hipótesis sostiene que el niño tiene dificultades para comprender expresiones del tipo "¿cuántos son dos más dos?" porque se encuentra ante un lenguaje radicalmente diferente, al que no está acostumbrado y que, usualmente, se presenta dentro de contextos en los que no existen referencias a objetos específicos.

Hughes considera que es necesario realizar "traducciones" que progresivamente permitan al niño pasar de un lenguaje cotidiano acerca de objetos físicos y situaciones que ellos comprenden a un lenguaje (matemático) al que no están acostumbrados. Sin descartar la importancia que tiene la situación hipotética, sostiene que la traducción se puede iniciar permitiendo a los niños el empleo de sus dedos, como una vía que permite vincular lo abstracto y lo concreto.

¿CUÁL ES LA DIFICULTAD DE DOS MÁS DOS?

Cuando los niños comienzan a acudir a la escuela en torno a los cinco años, la mayoría de ellos pueden llevar a cabo diversas operaciones sencillas de suma y resta que involucren situaciones concretas o hipotéticas. Saben que dos bloques añadidos a otro bloque que ya está en una caja harán que en ésta haya tres bloques, y que si en una tienda hay un niño y entran allí otros dos, habrá tres niños en la tienda. Sin embargo, cuando se les pregunta "¿cuántos son dos más uno?" muy pocos niños contestan correctamente.

A primera vista esta diferencia no resulta demasiado sorprendente. De forma intuitiva nos damos cuenta de que preguntas como "¿cuántos son dos más uno?" son más arduas para los niños pequeños que las preguntas referentes a bloques y cajas, o a los niños que hay en una tienda. Sin embargo, ¿en qué consiste esta dificultad? Como veremos en este capítulo, la respuesta a dicha interrogante no es tan sencilla como parece.

El origen de las dificultades infantiles

Una de las posibilidades que tuve que tomar en consideración es que las dificultades infantiles fuesen provocadas por la presencia de las palabras "suman" y "restamos" en preguntas del tipo "¿cuánto suman dos más dos?" y "¿cuánto queda si de dos restamos uno?". A menudo los niños pequeños experimentan dificultades cuando pala-

* Martín Hughes. "¿Cuál es la dificultad de dos más dos?", en: *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona, Ed. Paideia, 1987. pp. 57-74.

bras habituales como éstas se emplean dentro de un contexto no habitual.

Si ésta fuese la única causa de las dificultades infantiles, quizá tuviesen más éxito en sus respuestas a preguntas como "¿cuántos son dos y uno?", "¿cuánto es dos más uno?", "¿cuánto hay si quitamos uno de tres?" o similares. Sin embargo, al ensayar estos enunciados alternativos con niños de la guardería del Departamento de Psicología descubrí que no afectaban en absoluto su rendimiento. Al parecer las dificultades infantiles surgían siempre que frases como "dos y uno" *no hacían referencia a objetos específicos.*

En aquella época tuve ocasión de dar con una demostración aún más directa de este fenómeno. En el estudio a gran escala de las operaciones de suma y resta que se describe en el último capítulo, a los niños se les había presentado una serie de problemas pertenecientes a determinada categoría. Por ejemplo, cuando se les planteaban problemas referentes a la tienda hipotética, se les formulaba una serie de preguntas sobre los niños que van a una tienda. Al contemplar las grabaciones en video de dichas sesiones, noté que ocurría algo interesante. Mientras yo repetía una serie de preguntas sobre el mismo tema, de vez en cuando omitía la mención del tema en cuestión. Por ejemplo, hacia el final de una serie de preguntas acerca de la tienda hipotética, formulaba la pregunta en estos términos: "Cinco más uno, ¿cuántos es?" Lo interesante era que *en esta situación* los niños no parecían darse cuenta de que habían sido omitidas las palabras "niño" y "tienda". Aparentemente una vez que "habían entrado" dentro de una serie de preguntas acerca de un tema en particular, no necesitaban que se mencionase dicho tema en todos los casos.

Mi omisión del tema en las preguntas sobre la tienda hipotética había sido puramente accidental. No obstante, después de advertir esta omisión cometí deliberadamente el mismo error ante otro pequeño grupo de niños. La conversación con Adrián (cuatro años y un mes) que aparece a continuación es un ejemplo típico de lo que ocurrió. Adrián había estado realizando la tarea de la caja con una caja y unos bloques reales y habíamos llegado a una situación en la que había diez bloques dentro de la caja.

MH: Pongamos dentro otro más. (*Lo hace.*) Diez más uno ¿cuánto es?
Adrián: Eh... (*Piensa*) ¡Once!
MH: Sí, muy bien. Pongamos dentro otro más. (*Lo hace.*) Once más uno ¿cuánto es?
Adrián: ¡Doce!

Cinco minutos más tarde tuvo lugar la siguiente secuencia de preguntas. Esta vez se habían dejado a un lado los bloques y sobre la mesa no había materiales de ningún tipo.

MH: Voy a hacerte unas preguntas. ¿De acuerdo? Dos más uno ¿cuánto es? (*No hay respuesta.*) Dos y uno más ¿cuánto es?
Adrián: Eeh... es...
MH: Es ¿cuánto?
Adrián: Eeh... quince (*en un tono de voz despreocupado*).

Adviértase que en ambos diálogos aparecen exactamente las mismas palabras. La diferencia está en que en el primero la pregunta "Diez más uno ¿cuánto es?" se refiere a los bloques, momento en el cual Adrián muestra una considerable habilidad; en el segundo diálogo la pregunta "Dos más uno ¿cuánto es?" obviamente no se refiere a nada concreto, y ahora Adrián no parece capaz de sumar ni siquiera dos más uno.

Más de una vez se ha señalado que mi interpretación de estos diálogos es incorrecta, y que la respuesta final de Adrián —"quince"— en la segunda conversación es en realidad un signo de notable capacidad de su parte. Esta explicación alternativa aduce que Adrián arranca desde el punto final de la conversación anterior, donde se había llegado a un conjunto de doce bloques, y que añade "dos más uno", lo que representa la cifra quince. Si Adrián estaba haciendo efectivamente tal cosa sería una demostración aún más desconcertante de la capacidad infantil para llevar a cabo sumas mediante la tarea de la caja. De todas maneras, considero improbable esta explicación alternativa. Habían transcurrido cinco minutos entre ambas conversaciones, lapso en el cual Adrián había hecho un tren con los bloques, los había dejado en la caja y me había contado con cierto detalle el cuento de "Goldilocks y los tres osos" que había oído en la guardería. Además, su respuesta final "quince" fue pronunciada en un tono despreocupado que contrastaba notablemente con el entusiasmo que había caracterizado a sus respuestas "once" y "doce" en la primera conversación. Aunque se le hicieron otras preguntas del estilo "dos más uno ¿cuánto es?", no logró contestar ninguna de ellas.

¿Un problema de abstracción?

La mayoría de los niños comienzan su escolaridad a los cinco años siendo aparentemente capaces de llevar a cabo sumas y restas sencillas, siempre que tengan lugar en contextos que impliquen objetos, personas o acontecimientos específicos. En cambio, cuando se les plantean sumas y restas semejantes dentro de contextos en los que no existen referencias a objetos específicos, suelen mostrarse incapaces de contestar. ¿Cómo se explica tal fenómeno?

Una posible justificación consiste en la noción de *abstracción*. Cabe decir que los niños sólo comprenderán que "dos más dos son cuatro" cuando hayan abstraído los aspectos comunes a una gran cantidad de ejemplos específicos: dos bloques más dos bloques suman cuatro bloques, dos casas más dos casas suman cuatro casas, y así sucesivamente. Desde este punto de vista los niños en edad preescolar poseen cierto grado de comprensión concreta, pero todavía no han llevado a cabo el necesario proceso de abstracción.

Esta postura muestra algún parecido con la teoría de Piaget, ya que pone el acento en que los conceptos surgen mediante una interacción con el entorno físico. Sin embargo, el propio Piaget no empleó el término "abstracción" y consideró siempre que la adquisición de conceptos matemáticos era algo que acompañaba el desarrollo intelectual global del sujeto. Richard Skemp, en su influyente libro *The Psychology of Learning Mathematics* (1971) concede una relevancia mucho mayor a la abstracción. Según Skemp (p. 161), por regla general los conceptos matemáticos se construyen mediante un proceso de abstracción a partir de ejemplos concretos.

> Del mismo modo que 5 representa la propiedad común a todos los conjuntos que coinciden con el conjunto estándar ("uno", "dos", "tres", "cuatro", "cinco"), 5 + 7 = 12 representa algo que es común a todas las operaciones de unificar conjuntos como el anterior, sean cuales fueren los conjuntos específicos que estén involucrados... Al principio, aprendemos que cualquier conjunto de cinco elementos unido a cualquier conjunto de siete elementos forman un conjunto de doce elementos. Abstrayendo, decimos "cinco más siete son doce", o 5 + 7 = 12... Desarrollamos estos conceptos y otros similares trabajando con conjuntos de objetos físicos.

La noción de abstracción manifiesta un cierto atractivo. No cabe duda de que frases como "dos y dos son cuatro" resultan más abstractas que las frases referentes a bloques. Además, estas frases incluyen de hecho una propiedad común a gran número de ejemplos concretos. Sin embargo, cuanto más reflexionaba sobre la explicación que supone que los niños llegan a "dos más dos son cuatro" simplemente a través de un proceso de "abstracción", más insatisfecho me sentía al respecto.

En primer lugar, me parecían insuficientes las implicaciones del concepto de "abstracción" en lo que se refiere a ayudar efectivamente a los niños pequeños en esta tarea. Dicha teoría parece indicar que, en el caso de niños que aparentemente carezcan de conceptos abstractos, tenemos que presentarles nuevas experiencias concretas y abrigar la esperanza de que el proceso "abstractivo" se produzca de manera espontánea. Me daba la impresión de que los niños que yo había estudiado ya tenían la suficiente comprensión concreta acerca de lo que ocurría cuando se combinaban dos pequeños grupos de objetos. Para ellos la dificultad residía en *ir más allá de estas experiencias concretas* y limitarse a brindarles más experiencias de este tipo no parecía la solución idónea.

En realidad, reflexionando sobre la cuestión se podía comprobar que aquellos niños que habían contestado correctamente algunas de las preguntas sobre la tienda hipotética ya disponían de un concepto de suma y resta dotado de cierta abstracción. Habían efectuado una abstracción para aplicar su comprensión de la suma y la resta a estos problemas relativamente inhabituales. Es verdad que sabían perfectamente qué significaba entrar en una tienda, pero a pesar de todo era improbable que los niños se hubiesen topado antes con los cálculos específicos involucrados en la cuestión. Fue de gran interés recibir a este respecto el apoyo que aparece en el libro de Richard Skemp (p. 27):

> El criterio de posesión de un concepto no consiste en ser capaz de pronunciar su nombre, *sino en poseerlo de un modo que permita clasificar nuevos datos de acuerdo con las semejanzas que sirven para formar dicho concepto.* (La cursiva es mía.)

¿Era posible, en consecuencia, que los niños de Edimburgo hubiesen abstraído efectivamente los conceptos pertinentes, pero no supiesen cómo expresarlos? Esto implicaba la posibilidad —ignorada por la explicación basada en la "abstracción"— de que el lenguaje mediante el cual los niños deben expresar su operación abstractiva sea en gran medida el causante de las dificultades infantiles. O sea, estas dificultades podrían consistir en comprender y emplear una forma particular de lenguaje en frases como "dos y dos son cuatro".

Esto se verá con más claridad si apelamos a una analogía. Supóngase que preguntamos a niños pequeños cosas como "el amarillo y el azul ¿cuántos son?" y descubrimos que no pueden responder (se trata de una pregunta análoga a "dos y dos ¿cuántos son?"). Podríamos deducir de ello que les falta un concepto adecuado de combinación de los colores, o incluso que no tienen el más mínimo concepto de color. También podríamos sacar la conclusión de que necesitan nuevas experiencias específicas de mezcla de colores para desarrollar tal conocimiento.

Sin embargo, ¿qué pasaría si al mismo tiempo descubrimos que los niños no tienen demasiadas dificultades para contestar preguntas como "si se mezcla pintura amarilla con pintura azul ¿qué color obtienes?" (preguntas análogas a las planteadas en la caja o la tienda hipotéticas)? En tal caso tendríamos sin duda que rectificar nuestras anteriores conclusiones. Los niños sí comprenden el proceso de mezcla de colores. Es la pregunta "el amarillo y el azul ¿cuántos son?" la que causa específicamente sus dificultades. Tendríamos que extraer la conclusión de que sus limitaciones residen en no comprender el significado de estas preguntas más que en el significado de los conceptos subyacentes, y probablemente trataríamos de remediar la situación explicando a los sujetos qué significan estas preguntas y cómo se relacionan con ejemplos específicos.

A pesar de todo, no hay que llevar demasiado lejos la analogía. Las palabras referentes a colores —como veremos— difieren en distintos aspectos de interés de aquellas que hacen referencia a los números. No obstante esta analogía sugiere que hemos de prestar más atención al lenguaje de las matemáticas, aunque éstas sean en sí mismas un lenguaje.

Las matemáticas como lenguaje

En los últimos años se ha producido una creciente aceptación de la idea según la cual las matemáticas constituyen un lenguaje. De hecho, y para sorpresa de muchos de sus lectores, el informe Cockroft de 1982 le dio a esto una importancia central. El primer capítulo del informe se propone contestar la pregunta sobre por qué hay que enseñar matemáticas. Señala que las matemáticas poseen numerosas utilizaciones que sirven de base a la ciencia y la tecnología, satisfacen las necesidades aritméticas que surgen en el hogar y en el trabajo, e incluso pueden emplearse como herramienta de dirección en el comercio o la industria. Sin embargo el informe añade (& 3):

> *Creemos que todas estas percepciones sobre la utilidad de las matemáticas surge del hecho de que éstas proporcionan un medio de comunicación poderoso, conciso e inequívoco.* Aunque es probable que muchos de los que consideran útiles a las matemáticas no expresen el motivo en estos términos, creemos que el hecho de que las matemáticas puedan emplearse como poderoso medio de comunicación es lo que proporciona el motivo principal para que se enseñe esta disciplina a todos los niños. (La cursiva aparece en el original.)

La idea de que las matemáticas son un tipo de lenguaje encaja sin duda a la perfección con los sentimientos intuitivos de muchos de los que aprenden matemáticas. Por desgracia para muchos de éstos, no lo sienten como un lenguaje con el cual estén cómodos, sino algo más parecido a una lengua extranjera desconocida. La expresión más clara que conozco acerca de esta sensación se refleja en la historieta de los "Peanuts" que se reproduce en la figura 1.

Este mismo sentimiento ha sido manifestado con respecto a la comprensión y a la realización de operaciones matemáticas:

> Los matemáticos son como los franceses. Siempre que uno les dice algo, lo traducen a su propio idioma y en seguida se transforma en algo completamente diferente (Goethe, citado por Pimm, 1983).

Existen muchas maneras en las que el aprendizaje matemático no se parece a aprender un idioma extranjero. Una de las diferencias con la que ya nos hemos encontrado es que el lenguaje matemático contiene muchas palabras pertenecientes al lenguaje corriente. Palabras y frases como "son", "quitar", "diferencia", "por", "me llevo", "restar" y "entrar" forman parte del vocabulario de la aritmética, donde su utilización muestra diferencias sutiles con respecto a la que se les da en la conversación corriente. A menudo esto provoca en los niños dificultades inesperadas. Recuerdo perfectamente el día en que Sally, mi hijastra de siete años,

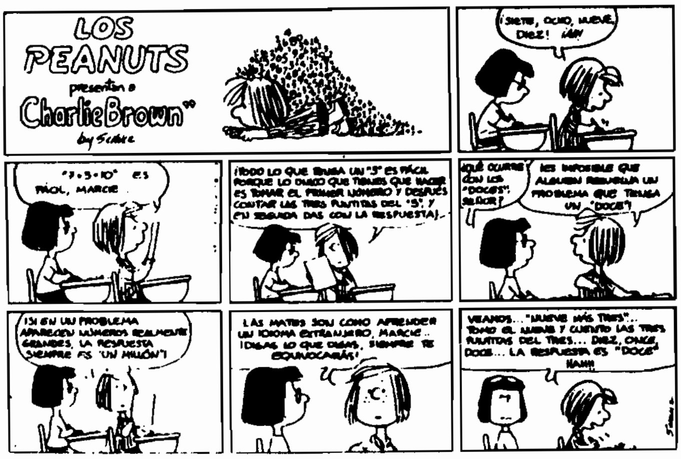


Figura 1. *"Las mates son como aprender un idioma extranjero, Marcie..."*
"© 1980 United Feactures Syndicate, Inc.)

volvió a casa desde la escuela y me mostró sus dos intentos de contestar al siguiente problema de resta: "¿Cuál es la diferencia entre 11 y 6?" Su primera respuesta había sido: "11 tiene dos números", pero esto había sido considerado erróneo. Su segundo intento fue: "6 es curvo" pero tampoco había acertado.

Una de las tareas decisivas para quien aprende matemáticas, por lo tanto, consiste en reconocer cuándo "las matemáticas se verbalizan" (véase Pimm, 1983). Hasta ahora este aspecto del aprendizaje matemático ha recibido escasa atención, y no sabemos cuándo ni cómo adquieren los niños esta aptitud "metalingüística". En el siguiente diálogo con Alison (cuatro años y siete meses) se aprecia que algunos niños quizás sean capaces de reconocer determinados aspectos del lenguaje matemático a una edad muy temprana.

MH: ¿Cuántos son uno más dos?
Alison: No puedo responder a preguntas como ésta.
MH: ¿Por qué no?
Alison: Porque todavía no voy a la escuela.

Esta respuesta indica una identificación perceptiva del tipo de lenguaje empleado, y una localización precisa del contexto en el cual se encuentra con más frecuencia.

Si proseguimos con la analogía lingüística, sería lógico deducir que los niños tienen que aprender a efectuar *traducciones* entre el lenguaje matemático y su lenguaje corriente acerca de cosas y situaciones normales. El comité Cockroft concedió especial relevancia a esta noción de traducción y resulta muy útil para describir lo que sucede cuando nos enfrentamos con un problema de la vida real en el cual se halla involucrada la matemática. Por ejemplo, en el problema descrito en el capítulo 1, a los niños estadounidenses se les pidió que dividiesen una cifra de soldados entre autobuses que disponían de una capacidad determinada. Para solucionar el problema había que dar los pasos siguientes:

1) traducir el problema desde su contexto en la vida real para convertirlo en un adecuado cálculo matemático;

2) llevar a cabo el cálculo matemático;
3) traducir de nuevo al contexto real el resultado de este cálculo.

Entre los niños estadounidenses se produjo un frecuente error: después de haber realizado correctamente los dos primeros pasos, se olvidaban del tercero. Obtuvieron la respuesta correspondiente al cálculo "31, 33" pero no tradujeron de nuevo esta respuesta al contexto específico del problema con objeto de comprobar si tenía sentido.

Robert Davis (1984, p. 4) también utiliza la noción de traducción cuando efectúa una comparación entre la "conducta matemática" y cantar en un idioma extranjero: ambas cosas pueden representar una imitación satisfactoria o estar basadas en la comprensión. El tipo de conducta matemática que consiste meramente en dar respuestas correctas ante determinados estímulos dejaría sin duda satisfecho a un conductista como Thorndike (véase capítulo 2), pero el paralelismo sugerido por Davis es muy ilustrativo. Como veremos después, a menudo resulta sumamente útil reflexionar sobre la comprensión matemática infantil en términos de su capacidad —o incapacidad— para llevar a cabo determinadas traducciones.

El nexo entre lo abstracto y lo concreto

Conviene resumir lo dicho hasta ahora. Los niños de cuatro a cinco años de edad poseen una comprensión correcta de sumas y restas en las que intervengan objetos o acontecimientos específicos. Sin embargo, no se muestran capaces de contestar a preguntas como "¿Cuántos son uno más dos?" Es posible que alguien considere que este fenómeno sólo nos indica que no han logrado llevar a cabo una "abstracción", pero este punto de vista manifiesta ciertas limitaciones. Por el contrario, quizá sea más útil considerar que las preguntas como "¿cuántos son uno más dos?" constituyen los primeros encuentros del niño con una nueva forma de lenguaje: el lenguaje matemático.

Como ya se ha visto, el problema lingüístico más inmediato que causan estas preguntas es que no se refieren a objetos o acontecimientos específicos. Naturalmente, esto es lo que convierte la aritmética en una herramienta tan poderosa para pensar y solucionar problemas: puede aplicarse a una diversidad de contextos. Sin embargo, es precisamente la naturaleza abstracta o la libertad de contexto de las operaciones aritméticas lo que origina muchas de las dificultades que presentan ante los niños. En la siguiente conversación queda perfectamente explicitado el desconcierto de Ram (cuatro años y siete meses):

MH: ¿Cuántos son tres más uno? ¿A qué es igual tres y uno?
Ram: ¿Tres y qué? ¿Un qué? ¿Qué letra? Quiero decir ¿qué número? [Antes habíamos estado jugando con números imtanados y es probable que con estas palabras Ram se refiriese a ellos.]
MH: ¿Cuántos son tres más uno?
Ram: ¿Uno más qué?
MH: Sólo uno más, ¿sabes?
Ram (*refunfuñando*): No lo sé

Una estrategia fundamental para comprender el lenguaje oral consiste en localizar de qué se está hablando, preguntando: "¿A qué se refiere esta frase?" Como pone en evidencia la respuesta de Ram, las preguntas del tipo "¿cuántos son tres más uno?" emplean el lenguaje de un modo radicalmente diferente al que los niños están acostumbrados cuando oyen el lenguaje habitual, y para el cual han desarrollado las aptitudes adecuadas.

La respuesta de Ram muestra su intento de localizar cuál es el tema de mi pregunta y tiene un rasgo infrecuente: el niño parece explícitamente preparado para traducir la pregunta abstracta a una forma concreta. De hecho, cuando a niños en edad preescolar se les preguntan cosas como "¿cuántos son dos y uno?" suelen contestar con un número que aparentemente no está relacionado con el problema. Son muy escasos los niños que razonen siguiendo esta pauta: "Bueno, no sé cuántos son dos y uno, pero sé que un bloque más dos bloques son tres bloques, y por eso la respuesta quizá sea tres". Como es natural, no es de esperar que los niños en edad preescolar verbalicen exactamente así el problema, pero su pensamiento podría ajustarse a esta línea discursiva.

A primera vista es improbable que los niños pequeños actúen de esta manera. Sin embargo, los descubrimientos de un estudio que llevé a cabo hace algunos años junto con Robert Grieve dan pábulo a dicha expectativa. En dicho estudio, con niños de cinco y siete años, les formulamos preguntas extrañas en algún sentido. Por ejemplo, se les preguntó: "¿Es el rojo más grande que el amarillo?" Para sorpresa nuestra, nos dimos cuenta de que prácticamente todos los niños consideraban tales preguntas como algo serio y les atribuían significados perceptibles. Varios de los niños apelaron a una estrategia específica, consistente en traducir las preguntas a un contexto significativo. Un niño, por ejemplo, miró la habitación en torno suyo y a continuación contestó que el amarillo era más grande que el rojo porque "aquel cojín rojo es más pequeño que aquella cortina amarilla de allí".

Si los niños traducen de manera espontánea a un contexto específico preguntas inusuales en las que intervengan colores, es razonable suponer que podrían verse atraídos a hacer lo mismo en el caso de preguntas "inusuales" que involucren números. Con objeto de facilitar este proceso, empleé un procedimiento mediante el cual a un pequeño grupo de niños en edad preescolar se les presentaban preguntas formuladas en el abstracto lenguaje de la aritmética, mezcladas con preguntas acerca de objetos específicos. Incluso apelando a este procedimiento, los niños se mostraron muy reacios a efectuar traducciones entre ambos tipos de pregunta. La actitud típica fue la que se aprecia en este diálogo en Amanda (tres años y once meses):

MH:	¿Cuántos son dos más uno? (*Larga pausa. No hay respuesta.*) Bueno, ¿cuántos bloques son dos bloques más un bloque?
Amanda:	Tres.
MH:	Muy bien. Entonces ¿cuántos son dos más uno?
Amanda	(pausa): ¿Cuatro? (*vacilante*)
MH:	¿Cuánto es un bloque más un bloque?
Amanda:	Dos bloques.
MH:	Entonces ¿cuánto es uno más uno?
Amanda:	Uno, me parece.

Es evidente que para Amanda no existía conexión alguna entre las preguntas referentes a bloques y las preguntas más abstractas. En realidad, parece utilizar la estrategia de dar una respuesta distinta a estas últimas. Es como si imaginase: "Bueno, no entiendo esta pregunta, pero sé que no es lo mismo que la anterior, y por lo tanto probaré una respuesta diferente".

Esta conversación con Amanda muestra que la yuxtaposición de preguntas en lenguaje aritmético con preguntas que se refieren a situaciones concretas no necesariamente garantiza que los niños encuentren algún nexo entre ambas. De todas maneras, los maestros utilizan a menudo esta técnica dentro del aula. En su artículo "El debate y la enseñanza de las matemáticas" ("Discussion and the Teaching of Mathematics", 1983), Hilary Shuard analiza una conversación en la que un niño llamado Jeremy (de unos ocho años) tenía dificultades con un problema de multiplicación. En este problema se le decía que María tenía tres veces la cantidad de bloques que tenía Juan, y que Juan tenía ocho bloques. La tarea consistía en averiguar cuántos bloques tenía María.

> [El maestro es quien está hablando.]
> Si María tiene tres veces tantos...
> ¿Cuántos bloques tendrá María?
> (*Pausa*)
> María tiene tres veces tantos bloques como Juan.
> Juan tiene ocho bloques.
> Ella tiene tres veces esa cantidad.

Esta línea de interrogación no obtenía respuesta alguna, y por lo tanto el maestro optó por una distinta.

> ¿Cuánto será tres por ocho?
> *J*: ¿Veintitrés?
> (*El maestro indica en silencio que no es así.*)
> (*Pausa*)
> *J*. ¿Veinticuatro?

A continuación Jeremy pasó a otro problema en el cual Andrés tenía cuatro veces la cantidad de bloques que tenía Juan. Mientras se trabajaba con esta otra interrogante, se hizo patente que Jeremy pensaba que tenía que efectuar una suma y no una multiplicación. Shuard señala (p. 22) que «para Jeremy «3 por 8» puede haber constituido una pregunta irrelevante y aislada, independiente del problema relativo a los bloques de María... Aunque hubiese contestado satisfactoriamente el conjunto de problemas efectuando multiplicaciones, no sabemos si él sabía *por qué* la multiplicación era la operación correcta que había que emplear».

Lo mismo puede decirse de la siguiente conversación con Patrick (cuatro años y un mes), en la que adopté un enfoque ligeramente distinto. Le planteé una serie de preguntas acerca de varios objetos específicos, seguidas por la correspondiente pregunta abstracta. Pensé que posiblemente este enfoque sirviese para acentuar lo que había de común en la serie y facilitar el surgimiento de un proceso de "donación de sentido".

MH: ¿Cuántos son dos más uno?
Patrick: Cuatro.
MH: Bueno ¿cuántos son dos *caramelos* más un caramelo?
Patrick: Tres.
MH: ¿Cuántos son dos *elefantes* más un elefante?
Patrick: Tres.
MH: ¿Cuántas son dos *jirafas* más una jirafa?
Patrick: Tres.
MH: Entonces, ¿cuántos son *dos* más uno?
Patrick: Seis

A primera vista este enfoque no tuvo más éxito que ninguna de las conversaciones citadas anteriormente. Sin embargo, había un claro desafío en la forma en que Patrick me miró a los ojos mientras pronunciaba su contestación final: "Seis". Es posible que, a pesar de todo y por la forma en que la pregunta había sido introducida, supiese que se esperaba que dijese "tres", pero por algún motivo que jamás sabremos se negó a ello.

Es desconcertante que los niños consideren que las preguntas donde intervienen palabras referentes a colores son más fáciles de traducir a contextos específicos que aquellas que implican términos numéricos. Quizá esto refleje alguna propiedad específica de nuestras propias palabras numéricas, por ejemplo "uno" y "dos". En ciertas culturas, por ejemplo, la conexión entre los términos numéricos y los números representados se realiza de forma más directa. Karl Menninger (1969) describe un primitivo sistema indio en el cual la palabra que representa a "uno" es la misma correspondiente a "luna", la palabra "dos" es la misma que "ojos", "cuatro" es la misma que "hermano" (en la mitología india Rama formaba parte de una constelación de cuatro hermanos), la palabra "siete" era la misma que se utilizaba para "cabeza" (la cabeza tiene siete orificios), y así sucesivamente. Otros sistemas utilizan la palabra "mano" para significar "cinco", "dos manos" para significar "diez" y "un hombre completo" para significar "veinte" (véase la p. 108). Es posible que para los niños fuese más fácil aprender aritmética si en nuestro sistema numérico se diesen nexos similares entre los términos correspondientes a los números y determinados objetos concretos.

El empleo de los dedos para vincular lo abstracto y lo concreto

Mis intentos de familiarizar a los niños en edad preescolar con el abstracto lenguaje de la aritmética habían provocado ciertos fracasos interesantes. Me pregunté si los padres de los niños en esta edad harían este tipo de cosas en casa y, en caso positivo, cómo lo harían. Estuve en condiciones de contestar esta pregunta examinando gran cantidad de conversaciones entre niños pequeños y sus madres, que habíamos reunido para un estudio anterior (Tizard y Hughes, 1984). Los niños tenían edades comprendidas entre los tres años y nueve meses y los cuatro años y tres meses, y el diálogo se grabó durante sus interacciones cotidianas en el hogar.

De hecho, nos encontramos con relativamente escasas conversaciones en las que las madres de los niños empleasen de un modo explícito el lenguaje aritmético. Sin embargo, cuando ocurrió tal cosa se pusieron de manifiesto ciertos rasgos de interés.

La siguiente conversación entre Susan y su madre surgió cuando estaban cantando una tradicional canción infantil sobre los bollos de pasas en la pastelería. Esta canción describe la paulatina reducción en la cantidad de bollos que hay en la pastelería, a medida que se van vendiendo. Suele comenzarse con cinco e ir bajando hasta que ya no queda ningún bollo. En determinado momento la madre de Susan dejó de cantar para explicar:

Madre: Si tienes tres bollos de pasas en la pastelería, ¡mira! (*levanta tres dedos*) y quito uno (*dobla uno de los dedos*), ¿cuántos quedan?
Susan (*no contesta, pero continúa cantando*): Tres bollos de pasas en la pastelería...
Madre: ¿Cuántos quedan si a tres le quito uno) (*levanta de nuevo tres dedos y dobla uno de ellos.*)
Susan: Dos.
Madre: De acuerdo.
Susan: Tres... (*comienza a cantar*).
Madre: No, dos bollos de pasas en la pastelería.
Susan: Dos bollos de pasas en la pastelería... Redondos y planos con azúcar por encima... Viene un chico un día con un penique... (*Se detiene*). Levanta la mano con dos dedos. (*La madre lo hace*). Viene un chico un día con un penique... (*Susan dobla uno de los dedos.*)
Madre: ¿Cuántos quedan ahora?
Susan (*canta*): Un bollo de pasas en la pastelería. (*Deja de cantar*). ¡Levanta un dedo! (*La madre levanta un dedo y Susan sigue cantando*). Viene un chico y se lo llevó. (*Deja de cantar*). No quedó ninguno.
Madre: ¡Ahora ya no hay ninguno!

Aquí lo interesante es la forma en que la madre de Susan utiliza los dedos para simbolizar los bollos (en algunas guarderías los encargados de representar los bollos son los propios niños). Por eso la pregunta "¿cuántos quedan si de tres quito uno?", que originariamente se refería a bollos imaginarios, ahora hace referencia a los dedos que están presentes en aquel momento. El valor de esta ayuda se pone de manifiesto a través de la petición de Susan de volverlos a utilizar en la canción.

La madre de Donna utilizó una estrategia parecida en la siguiente conversación, relacionada con el número de pasteles necesarios para el té. Sin embargo, Donna no posee unas capacidades aritméticas tan seguras como las de Susan:

Madre: Si tú tomas dos, y papá toma dos (*primero levanta dos dedos y luego otros dos*), ¿cuántos serán?
Donna: Tres.
Madre: No.
Donna: Cuatro.
Madre: ¡Muy bien! Y si mamá toma otros dos, ¿cuántos serán? ¿Cuatro más dos? (*Levanta otros dos dedos*).
Donna: Cuatro y...
Madre: Y este otro, ¿cuántos son? (*Levanta cuatro dedos y a continuación otro más*).
Donna: Cinco.
Madre: ¿Y más este otro? (*Añade otro dedo*).
Donna: Cuatro.
Madre: No, éstos son cinco (*Señala a los cinco que ya están levantados*).
Donna: Cinco.
Madre: Cinco y uno más ¿cuánto es?
Donna: Seis.
Madre: ¡Muy bien! Ahora si tú tomas dos, mamá toma dos y papá toma dos, son seis, y si Kerry toma otros dos, entonces esos seis (*levanta seis dedos*) y uno más, ¿cuántos serán?
Donna: Cinco.
Madre: No.
Donna: Seis.
Madre: Sí, y ¿cuál viene después de seis?
Donna: Ocho.
Madre: No.

En ambas conversaciones se utiliza el lenguaje abstracto de la aritmética junto con los dedos para resolver un problema en el que intervienen objetos específicos pero ausentes. Se dio otro ejemplo de este tipo de solución de problemas cuando otra niña, Jane, estaba en el jardín jugando con unos amigos. Jane volvió a la cocina y pidió varios vasos de zumo de naranja para llevárselos como si estuviesen de excursión. Su madre quiso saber cuántos niños eran en total y le dijo a Jane que levantase un dedo por cada niño que hubiese en el jardín. Utilizando este método acabaron por averiguar cuántos vasos de zumo de naranja se necesitaban.

En el capítulo 3 describimos a varios niños que también empleaban los dedos para representar bloques que sabían que estaban en la caja, pero que no podían ver. Estas conversaciones nos indican que el uso de los dedos para representar objetos no visibles es una táctica que quizá hayan observado a sus padres en casa. Esto no quiere decir que los padres se dediquen deliberadamente a "ejercitar" a sus hijos en esta estrategia determinada. El uso de los dedos es una manera natural y obvia de representar grupos de objetos. Los dedos tienen la enorme ventaja de que siempre están con nosotros, y son fáciles de manejar: podemos levantarlos, mantenerlos así todo el tiempo que queramos para examinarlos y contarlos y esconderlos en la palma de la mano para representar los objetos que se suprimen.

Entre el empleo de los dedos para representar objetos ausentes hasta su empleo para explorar las relaciones que hay entre los números existe un paso muy corto, pero decisivo. La conversación siguiente tuvo lugar estando Mary sentada junto con su madre mientras cenaban. De forma aparentemente distraída, Mary levantó dos dedos de cada mano y preguntó:

Mary: ¿Dos y dos son cuatro?
Madre: Mmmh.
Mary: Tres y tres son... (*Levanta tres dedos de cada mano y los cuenta*). Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.
Madre: Mmmh.
Mary: ¡Cuenta esto! (*Levanta cuatro dedos de cada mano y cuenta*). Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.
Madre: ¡Muy bien! Sí, así es.

Mary aquí no utiliza los dedos para resolver un problema específico, sino que los emplea para disponer de un elemento concreto de referencia en su uso del lenguaje matemático. Desconocemos cuáles fueron las experiencias que condujeron a esta conversación, pero es muy probable que la utilización de los dedos en la forma en que lo hacen Susan, Donna y Jane lleve a este empleo más abstracto.

Los dedos pueden desempeñar, por lo tanto, un papel decisivo en la conexión entre lo abstracto y lo concreto, porque son representaciones de objetos y, al mismo tiempo, objetos por derecho propio. Esta propiedad la comparten con otro elemento fundamental: el uso de un símbolo escrito o de una ficha para representar un objeto.

RESUMEN

En este capítulo se ha establecido que puede considerarse con provecho que las dificultades infantiles ante preguntas como "¿cuántos son dos y dos?" son causadas por el hecho de que los niños no logran comprender una nueva clase de lenguaje: el matemático. En este lenguaje hay muchos aspectos que causan dificultades a los niños; por ejemplo, su carácter inusual y su falta de referentes concretos. Los niños pueden disponer de una comprensión abstracta del número, en el sentido de que pueden aplicar su conocimiento a situaciones nuevas, pero no pueden expresar este conocimiento en el abstracto y formalizado lenguaje matemático. Los niños necesitan desarrollar conexiones o formas de traducción entre este nuevo lenguaje y sus propios conocimientos concretos. Estas traducciones son de una importancia fundamental para la comprensión de las matemáticas.

La capacidad de llevar a cabo dicha traducción no surge con facilidad en los niños. Puede ayudárseles a ello a través del habitual y básico sistema de emplear los dedos. Estos pueden utilizarse para representar objetos ausentes (por ejemplo bollos o niños) y para actuar por derecho propio como referentes concretos en las frases pertenecientes al lenguaje aritmético. Proporcionan en sí mismos un importante nexo entre lo abstracto y lo concreto.

Tema 3. *Juegos númericos y el aprendizaje de la suma y la resta*

LECTURA: EL APRENDIZAJE A TRAVÉS DE JUEGOS NUMÉRICOS*

PRESENTACIÓN

En este artículo Hughes nos ofrece una serie de experiencias en las que se utilizan juegos con tableros, dados y cifras imantadas (numerales). De acuerdo con el autor, el propósito de dichos juegos consiste en presentar a los niños de preescolar situaciones a través de las cuales comprendan el significado de los símbolos aritméticos en contextos en donde su significado resulta claro y comprensible.

De esta manera, las situaciones están destinadas para favorecer, a través del juego, la comprensión de los numerales, de la suma, de la resta y la introducción gradual de los signos "+" y "-".

Una idea central que subyace a la utilización de los juegos numéricos consiste en que éstos deben de servir de apoyo para que el niño pueda realizar una doble "traducción":

a) La traducción de lo concreto a una representación convencional. Se sostiene que, en los juegos, se deben presentar y utilizar los símbolos en situaciones dentro de las cuales posean sentido para los niños.

b) La traducción de los símbolos a la correspondiente situación concreta. Sobre todo en momentos en los cuales los niños necesitan comprobar la respuesta a un problema.

* Martín Hughes. "El aprendizaje a través de juegos numéricos", en: *Los niños y los números*. Barcelona, Ed. Paideia, 1987. pp. 170-189.

EL APRENDIZAJE A TRAVÉS DE JUEGOS NUMÉRICOS

Juegos con tablero y dados

Desde hace mucho tiempo estoy convencido de que la participación en juegos sencillos es una forma ideal de estimular y motivar a los niños pequeños. También creo que sólo cuando se los estimula y motiva los niños estarán en condiciones de aprovechar plenamente su potencial. Observar a una niña y a su madre mientras jugaban una partida de *knock-out whist* fue lo que me impulsó a estudiar con más detalle cómo aprenden los niños a manejar los números, como por ejemplo la tarea de la caja y el juego de las latas, empleados como útiles técnicas en esta investigación.

Hay un conjunto de juegos que todos conocen y que están muy relacionados con los números: aquellos juegos en que se emplea un tablero y unos dados; por ejemplo, el parchís, el Ludo o el Monopoly. A casi todos los niños les gusta este tipo de juegos y llama la atención que no se utilicen más en la enseñanza de las matemáticas. Mi interés peculiar por los juegos con tablero y dados nació ante la posibilidad de usarlos para desarrollar la comprensión de cifras escritas durante la etapa preescolar. Lo que se me ocurrió era muy simple. Primero utilicé dados corrientes (es decir con puntos) para familiarizar a los niños con las nociones básicas del juego. A continuación, utilicé dados en los que aparecían cifras en lugar de puntos, de manera que el significado de dichas cifras surgiese directamente del contexto del juego. Era de esperar que, cuando un niño viese un "2" sobre un dado, lo considerase como algo equivalente a dos puntos, traduciendo con facilidad entre la *cifra* y el *número de puntos*.

Diseñé un juego extremadamente sencillo para jugar con niños en edad preescolar. Dibujé un camino en una gran hoja de papel y lo dividí en treinta cuadros (véase la figura .1). Fijé el papel sobre una mesa baja y construí dos casitas de cartón colocándolas a ambos extremos del camino. El único material necesario consistió en dos animales pequeños —un perro y un conejo— y varios dados. Expliqué el juego en los términos siguientes.

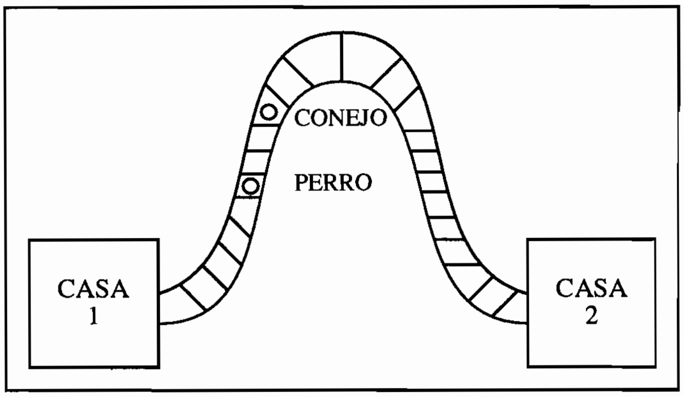


Figura 1 Diseño de juego con tablero y dados

El perro y el conejo salían de una de las casas y querían recorrer el camino hasta llegar a la otra ("para ir a cenar" como sugirió útilmente Patrick, uno de los niños). Sólo podían hacerlo si tirábamos los dados en nombre de los animales, contábamos la cantidad de puntos que quedaban en la cara superior, y luego los desplazábamos el correspondiente número de cuadros. Los niños podían elegir el animal en cuyo nombre querían tirar y yo tiraba a favor del otro.

Jugué esto con veintidós niños de la guardería del Departamento de Psicología, cuyas edades estaban comprendidas entre los tres años y cinco meses y los cinco años y un mes. Como deseaba saber qué resultados daba el juego con cada niño, los entrevisté individualmente (me da la sensación de que casi todos los maestros utilizan juegos como éstos con pequeños grupos de niños). Aproximadamente la mitad de los niños afirmaron haber jugado con anterioridad a juegos en los que intervenían dados, y sabían lo que era un "dado". De manera muy lógica, uno de los niños se refirió a un dado llamándole "dominó", mientras que otro dijo que era una "goma".

El juego gustó mucho a los niños: tiraban los dados, contaban los puntos y luego contaban la cantidad requerida de pasos que había que recorrer por el camino. Cuando los animales llegaron a la otra casa, casi todos los niños querían jugar otra vez. Uno de ellos, Andrew, quedó tan seducido por el juego que cuando su conejo "ganaba" se ponía a gritar lleno de alborozo, gesticulaba y levantaba el puño en son de triunfo. No hubo que preguntarle si deseaba jugar otra partida, sino que espontáneamente exclamó "¡Quiero hacerlo de nuevo!". Otro niño, Thomas, no sólo quiso jugar otra vez sino que acabó echando los dados por ambos animales y efectuó el recorrido de vuelta jugando en solitario.

La mayoría de los niños captaron con mucha rapidez las reglas del juego. Sin embargo, varios de ellos cometieron el frecuente error de contar cada desplazamiento arrancado desde (es decir, considerándolo como "uno") el cuadrado en el que estaba colocado su animal. Esto significaba que el animal dejaba sistemáticamente de avanzar un cuadrado cada tirada. El problema adquiría una gravedad especial cuando la tirada era de "uno": Patrick, después de una de ellas, trató en varias ocasiones de desplazar su animal hacia adelante, y acabó por decir: "¡Quédate aquí!", dejándolo donde estaba.

Otra equivocación habitual se producía cuando uno de los animales adelantaba al otro. En estos casos los niños saltaban con frecuencia con su animal sobre el de su adversario, omitiendo contar el cuadrado en que estaba colocado el otro. A diferencia del error anterior, ahora el animal en cuestión ganaba sistemáticamente un cuadrado más. Los niños no se proponían tal cosa: el motivo de esta equivocación era el deseo de evitar que dos animales ocupasen el mismo recuadro, aunque éstos eran lo suficientemente grandes como para que cupiesen ambos.

Con algunos de ellos de más edad (de cuatro y cinco años) empleé más adelante versiones del juego en las que se echaban dos dados (véase la figura 2). Comenzamos con dos dados de puntos y los niños tenían que contar el total. Esto planteó pocos problemas, siempre que nos mantuviésemos dentro de los números que sabían contar. A continuación, uno de los dados con puntos fue sustituido por otro con cifras. Tampoco esto provocó demasiadas dificultades, aunque hubo que enseñar a algunos niños que era más fácil comenzar

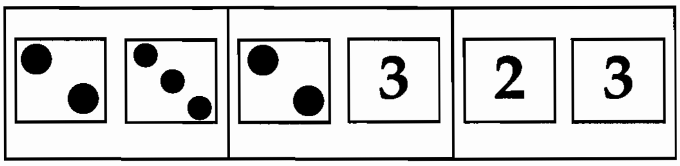


Figura 2 Dados utilizados en la segunda versión del juego

por el número que aparecía en el dado con cifras y luego contar la cantidad de puntos del dado con puntos. En una tirada de "3" y dos puntos, se les alentaba a comenzar por "tres" y a continuación contar "cuatro, cinco". Otros niños descubrieron por sí solos esta estrategia, de un modo que recordaba a aquellos niños que utilizaban las versiones con grandes números de la tarea de la caja (véase el capítulo 3). Finalmente, los dos dados que echaban los niños tenían cifras. En el caso de algunos niños estábamos saliendo de la gama de números que dominaban y, por lo tanto, con ellos utilizamos dados en cuyas caras sólo aparecían el "1", el "2" y el "3". (Fabriqué estos dados con pequeños bloques de madera, redondeando los cantos para que rodasen con más facilidad.) Sin embargo, aun en el caso de pequeños números, era evidente que la combinación de dos cifras constituía un frecuente origen de dificultades.

Esta facilidad no fue un hecho inesperado, ya que la suma correcta de dos cifras exige el correspondiente conocimiento numérico. Por ejemplo. si un niño obtiene un "3" y un "2", se le plantearán problemas a menos que sepa que "tres más dos suman cinco". A este respecto mi interés consistía en determinar si a los niños los ayudaría indicarles que "2" equivalía a dos puntos, y "3" a tres puntos. Sin embargo, este enfoque se mostró muy poco satisfactorio, como demuestra el siguiente diálogo con Craig. Cuando tiró los dados le salió un "3" y un "2" y había respondido diciendo "Tres, dos" mientras señalaba el dado correspondiente.

MH: Tres y dos. ¿Sabes cuánto es esto junto?
Craig: No lo sé.
MH: ¿No lo sabes? Bueno, si hubiese tres puntos en ese dado y dos puntos en ese otro dado, ¿cuántos habría en conjunto?
Craig: No sé.
MH: ¿Y si hubiese tres en aquel dado y dos en ese otro?
Craig (*se limita a sacudir la cabeza*).
MH: ¿No sabes cuántos son tres puntos más dos puntos?
Craig: No.
MH: De acuerdo. (*Muestra cómo el conejo puede avanzar tres cuadros y a continuación otros dos más.*)

Hay que señalar que Craig no había tenido ninguna dificultad para contar hasta cinco puntos cuando echaba dos dados con puntos.

Este breve experimento efectuado con juegos de tablero y dados pone de manifiesto que constituyen un sistema útil de ayudar a los niños en su aprendizaje numérico. Al mismo tiempo que se acostumbran a manejar las cifras, los niños aprenden a contar: el objetivo intrínseco del juego consiste en que los niños lleven a cabo gran cantidad de operaciones en un corto espacio de tiempo. Estos juegos pueden ampliarse con facilidad para ejercitar diversos principios básicos de la suma y la resta. Sin embargo, hay que ser cuidadoso en lo que respecta al aspecto competitivo de estos juegos: muchos niños lo único que quieren es jugar, pero a otros les molesta mucho perder. Por este motivo los maestros pueden utilizar los juegos de tablero y dados para enseñar a ser "buenos perdedores" y no sólo cómo se manejan los números.

A pesar del éxito general conquistado por estos juegos, los niños como Craig —que no captaba la noción de que el "2" en un dado significaba lo mismo que dos puntos— me seguían desconcertando. Era muy posible que se tratase únicamente de una cuestión de hábito y que para entender dicho concepto sólo le hiciese falta más práctica con dados con cifras. Sin embargo, lamenté la inexistencia de algo *intrínseco al juego* que ayudase a Craig a traducir en su mente los dos puntos a un "2". Quizá hubiese sido mejor que el "2" consistiese en una etiqueta despegable colocada sobre los dos puntos para ocultarlos, de manera que Craig comprobase su comprensión de la cifra mirando por debajo de la etiqueta.

Esta última idea parecía muy afín al juego de las latas y decidí examinar la posibilidad de utilizarlo para introducir símbolos convencionales. Me atrajo sobre todo la idea de combinar el juego de las latas con el uso de cifras imantadas.

Los juegos con cifras imantadas

Las cifras imantadas que utilicé tenían unos cinco centímetros de altura y estaban hechas de plástico, con pequeños imanes incorporados en el reverso. Se encuentran en la mayoría de las jugueterías británicas. Los conjuntos de cifras imantadas suelen incluir operaciones como "+", "-" y "=".

Las cifras imantadas me atraen porque poseen la propiedad inusual de ser al mismo tiempo objetos y símbolos. Son móviles, se puede jugar con ellas y también se utilizan para representar conceptos aritméticos. Debido a esta doble propiedad de las cifras imantadas, no es difícil enseñar juegos en los que sirvan como nexo entre los dos mundos de los objetos concretos y los símbolos matemáticos.

Antes de jugar, mostré a los niños de la guardería del Departamento de Psicología gran cantidad de cifras imantadas para ver qué hacían con ellas. Algunos niños clasificaron las cifras en conjuntos, agrupando todos los "1", todos los "2", etc. Thomas, por ejemplo, reunió seis "1" formando una fila; a continuación colocó debajo un "6", diciendo que el "6" iba con los seis "1". Otros niños juntaron las cifras para formar nuevos números que significaban algo para ellos. Amanda juntó un "1" y un "7" para formar "17" y dijo que éste era el número de su puerta. Ram agrupó el 1", el "9", el "8" y el "0" para formar el número del "mes".

Varios niños ordenaron las cifras en una secuencia del 1 al 9. Esto suscita una interesante pregunta: ¿qué hacer con el cero? Algunos lo llamaron "O" ("oh") y no estaban seguros de dónde ponerlo. Otros lo llamaron "nada" o "cero" y lo colocaron delante del "1" o, con menos frecuencia, después del "9". Unos cuantos niños lo situaron después del "9" y dijeron que era un "diez". Finalmente, hubo quienes lo colocaron después del "9", pero diciendo que hacía falta un "uno" para que fuese un "diez".

También era interesante comprobar qué sucedía al pedir a los niños que contasen las cifras ordenadas en una secuencia del "1" al "9". En su mayoría los niños respondieron contando normalmente, es decir, comenzando por la izquierda y contando toda la fila. Si no se equivocaban, llegaban al final, "nueve", después de contar todas las cifras. Sólo unos cuantos niños dijeron "nueve" sin contar: se habían dado cuenta de que en la secuencia tenía que haber nueve cifras, porque se trataba de una serie completa.

Otros niños respondieron, de manera inesperada, comenzando a contar por el *extremo derecho*, diciendo "uno" cuando tocaba el "9". Cuando sucedía esto, se confundían muy rápidamente en sus cuentas, debido a la insólita experiencia de decir un número y tocar otro distinto. Era desconcertante que estos niños no viesen la conveniencia de comenzar a contar por el "1".

Otra ida que me resultó de gran ayuda fue tapar con la mano las cifras con las que comenzaba la secuencia. A continuación preguntaba a los niños cuántas cifras había debajo de mi mano (véase figura 3). Algunos niños se quedaban totalmente estupefactos, y no utilizaban ninguna estrategia que les permitiese dar con la respuesta. Otros comprendían que si era visible la secuencia que iba del 4 al 9, estaba cubierta la secuencia del 1 al 3, y por lo tanto estaba formada por tres cifras.

Ram (cuatro años y siete meses) dio una respuesta especialmente llamativa a este problema. En su caso estaban cubiertas con una hoja de papel las cifras del 1 al 5.

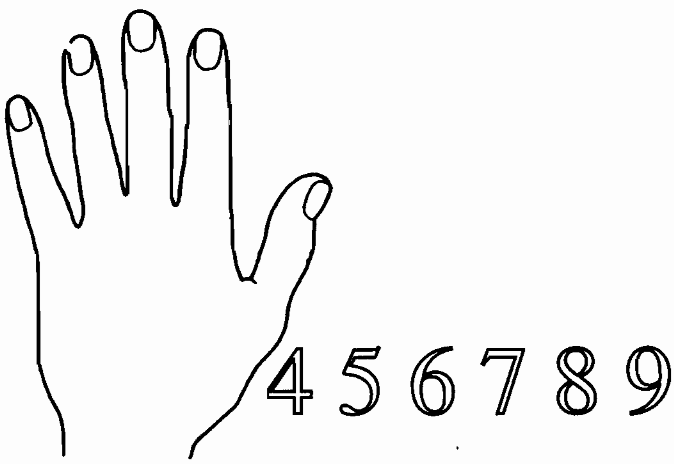


Figura 3. Secuencia de cifras parcialmente cubierta.

MH: ¿Sabes cuántos números he tapado?
Ram (*trata de mirar debajo del papel*)
MH: No tienes que contarlos, sólo hay que mirar los que quedan.
Ram: Tienen que haber cinco.

MH (*levanta el papel*): ¿Estás en lo cierto?
Ram: Espera un poco. (*Me hace poner de nuevo el papel. Piensa activamente durante un rato.*) Cinco, son cinco. (*Entonces me permite que quite el papel.*)
MH (*cubre las nueve cifras con el papel*): ¿Cuántos números he tapado ahora?
Ram (*de inmediato*). ¡Nueve!

El interés de Ram por el problema en sí mismo es digno de mención. Después de dar su primera respuesta, "Tienen que haber cinco" se le permitió que mirase debajo del papel, pero me obligó a tapar de nuevo las cifras porque primero quería asegurarse de que había acertado la respuesta él solo.

Las cifras imantadas y el juego de las latas

Estos ejemplos muestran que las cifras imantadas se pueden utilizar para plantear a los niños gran cantidad de interesantes rompecabezas. Es probable que aprendan mucho gracias al reiterado ejercicio con estos acertijos. Sin embargo, yo estaba especialmente interesado en incorporar las cifras imantadas al juego de las latas descrito en el capítulo 5.

Como anteriormente, utilicé cuatro latas que contenían tres, dos o un bloque, o que no contenían ninguno. A los niños se les mostró el contenido de las latas, las tapas fueron colocadas otra vez en su sitio y las latas se amontonaron sin un orden específico. A continuación presenté un conjunto de cifras imantadas y sugerí a los niños que las utilizasen como ayuda para recordar cuántos bloques había dentro de cada lata. Evité darles alguna pista acerca de cuáles o cuántas cifras tenían que poner en cada lata.

Jugamos a esta versión del juego de las latas con veinticinco niños diferentes, del mismo centro escolar que antes, emparejados lo más posible con los veinticinco niños originales. Respondieron con el mismo entusiasmo que el grupo anterior. En su mayoría utilizaron en seguida las cifras imantadas como ayuda para identificar las latas y tal utilización les sirvió de hecho en el juego. Su nivel inicial de éxito en la identificación de las latas correspondía aproximadamente al azar, pero después de colocar las cifras sobre las latas más de las tres cuartas partes del grupo de nivel preescolar y todo el grupo de primer curso no se equivocaron nunca. Estas puntuaciones fueron muy similares a las que se habían obtenido en el caso de las representaciones escritas. Como en el grupo de "escritura", manifestaban el mismo nivel de acierto al representar la inexistencia de bloques y al mostrar la existencia de uno, dos o tres bloques. Se comprobó el mismo resultado satisfactorio al efectuarse una nueva prueba, después de transcurrida una semana.

¿Cómo utilizaron los niños las cifras imantadas para representar el contenido de las latas? Los métodos empleados correspondían a tres categorías principales: eran simbólicos, icónicos o idiosincrásicos.

La respuesta más común era la *simbólica*. En ella los niños utilizaban las cifras imantadas de una manera convencional, adhiriendo el "1" a la lata que contenía un bloque, el "2" a la lata que contenía dos bloques, y así sucesivamente. Los niños que empleaban este método solían colocar el "0" en la lata vacía (véase Jennifer en la figura 4). Todos los niños de primer curso y más de la mitad del grupo de nivel preescolar utilizaban respuestas simbóli-

Jennifer
(5 años y 6 meses)
(representación simbólica)

Marianne
(4 años y 5 meses)
(representación icónica)

Charlie
(3 años y 3 meses)
(representación indiosincrásica)

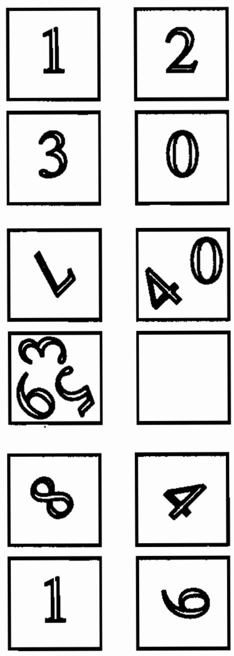


Figura 4 Uso de cifras imantadas en el juego de las latas

cas. Los sujetos que empleaban este método no mostraban dificultades en identificar las latas a partir de sus representaciones, en el momento en que las establecían o una semana más tarde.

Cuatro de los niños de nivel preescolar mostraron una utilización inesperada e imaginativa del principio de la correspondencia biunívoca al representar el contenido de las latas. Niños que utilizaban este método *icónico* colocaron una cifra, aparentemente elegida al azar, en la lata que contenía un solo bloque, dos cifras en la que contenía dos bloques y tres en la que contenía tres bloques (véase Marianne en figura 4). Tres de estos niños dejaron en blanco la parte superior de la lata vacía, y uno empleó un idiosincrásico "7". Salvo un niño que confundió el dos y el tres, los sujetos que apelaron a este método lograron identificar correctamente las latas gracias a sus representaciones, tanto en el momento de crearlas como después de transcurrida una semana.

Finalmente hubo, tres niños de nivel preescolar que utilizaron métodos *idiosincrásicos*. No existía un patrón claro en la forma en que colocaron las cifras imantadas en las latas (véase Charlie en la figura 4). Me había imaginado que estos sujetos idiosincrásicos utilizaban un código significativo de carácte privado, pero que no lograrían reconocer lo que habían hecho en aquel mismo momento o una semana antes. Como en el caso del grupo de "escritura", en la segunda sesión se les alentó a que lo intentaran de nuevo, pero sin éxito. No obstante, cuando se les sugirió el método icónico de hacer coincidir la cantidad de cifras con la cantidad de bloques, recibieron con alborozo esta indicación y la pusieron en práctica de un modo coherente.

Estos descubrimientos muestran que el juego de las latas es una forma satisfactoria y divertida de mostrar el uso de las cifras a los niños pequeños. Estos captaban con toda seguridad el mensaje de que había contextos en los que las cifras tenían objetivos extremadamente útiles, y sus comentarios fueron semejantes a los anotados antes: "Ahora es fácil porque hemos pegado los números encima". La idea de colocar una cifra imantada —o varias— sobre una lata para representar la cantidad de bloques que hay dentro de ella era algo fácil de captar.

La suma de las latas

Quise ampliar esta noción con objeto de introducir una versión sencilla de suma. Supongamos que un niño coloca un "1" imantado sobre una lata que contiene un solo bloque, y un "2" imantado sobre una lata que contiene dos bloques. Y supongamos que ambas latas se colocan una al lado de otra. ¿Será capaz el niño de calcular si en total hay tres bloques en las dos latas y, en caso de que sea así, que esto equivale a una lata con la cifra "3"? Valía la pena examinar esta posibilidad, ya que proporciona una elocuente demostración de la equivalencia entre "uno más dos" y "tres".

En apariencia este problema es idéntico a la situación que surgió en el juego de tablero y dados cuando se echaban dos dados con cifras, cosa que antes provocó tantas dificultades a Craig. Sin embargo, existe una diferencia decisiva. Aquí los niños ya han captado la relación esencial que existe entre la cantidad de bloques de las cajas y las cifras que ellos mismos pegan sobre las tapas: no cabe duda de que *conocen el significado* de los mensajes que hay sobre las tapas. Esto posibilita dos estrategias. Primero, los niños quizá consigan visualizar (si es que no recuerdan efectivamente) los bloques que hay dentro y contarlos de algún modo. En segundo lugar, si fracasa todo lo demás, los niños pueden abrir la lata y mirar dentro.

Descubrí que la mayoría de los niños de nivel preescolar experimentaban ciertas dificultades iniciales ante esta situación. El siguiente diálogo con Gavin (cuatro años y nueve meses) lo refleja con elocuencia. Gavin había creado un conjunto de respuestas simbólicas en el juego de las latas, y podía identificar cada una a través de la cifra magnética que había encima. A continuación, le presenté el patrón de latas que se muestra en la figura 5. Frente a él estaban las latas 2 y 1, y frente a mí, las latas 0 y 3.

MH: ¿Quién tiene más bloques, tú o yo?
Gavin (*dando golpecitos en sus latas*): Yo tengo dos y uno.
MH: Sí, ¿y cuántos tengo yo?
Gavin: Tres y nada. (*Da golpecitos en mis latas.*)
MH: Entonces, ¿quién tiene más, tú o yo?

Gavin: Yo. (*Pone una mano sobre sus dos latas.*)
MH: ¿Sí? ¿Cuántos tienes en total?
Gavin (*pausa. Comienza a abrir sus latas.*)
MH: No, no mires todavía. Trata de calcularlo. ¿Cuántos tienes?
Gavin: ¿Uno en esta lata y dos en esta otra? (*Señala cada lata.*)
MH: Sí, ¿cuántos son?
Gavin: Doce.
MH: Doce, mmm... más que yo, ¿no? ¿Cuántos tengo yo?
Gavin: Ninguno y... tres.
MH: Entonces tienes más que yo, ¿no?
Gavin: Ss... ssí...

En ese momento abrí las latas y le pedí a Gavin que contase cuántos bloques había en cada una. Acabó por reconocer que los dos teníamos tres bloques.

Gavin entendía el problema básico. Sabía que él tenía un bloque y dos bloques, y que yo tenía tres bloques y ningún bloque. Sin embargo dentro de esta situación no podía sumar el contenido de las latas. Su respuesta "doce" indica que se había distanciado mucho del contexto, y operaba de acuerdo con la regla —correcta en otros contextos— según la cual "uno y dos hacen doce". Aquí, por supuesto, la regla no se aplica en absoluto.

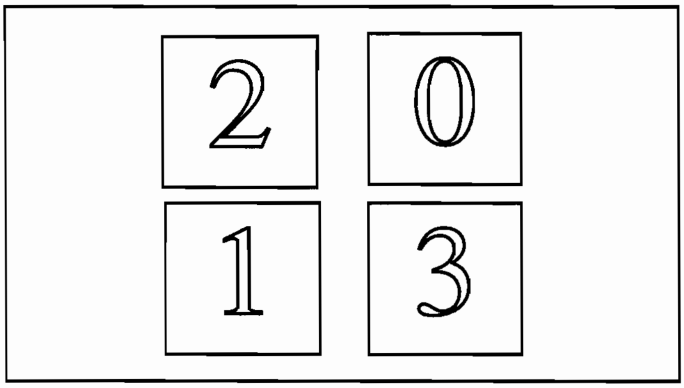
Muchos niños tuvieron dificultades iniciales semejantes a las de Gavin. Sin embargo, me di cuenta de que, si yo insistía en la cuestión, a veces lograban solucionar correctamente el problema. En el ejemplo siguiente, en Debbie (cuatro años y once meses) la comprensión surge de un modo súbito. El problema que se le había planteado a ella era idéntico al de Gavin (véase la figura 5). Delante de mí estaban las latas con las cifras "0" y "3", mientras que a ella le correspondían las cifras "2" y "1".

MH: ¿Quién tiene más, o es que los dos tenemos lo mismo?
Debbie: Yo soy la que tiene más.
MH: ¿Cuántos tienes?
Debbie (*pausa. Abre sus latas y cuenta*): Uno... dos... tres. Tengo tres.
MH: ¿Y cuántos tengo yo?
Debbie (*está a punto de abrir mis latas, cuando de pronto —comprendiendo— exclama*): ¡Oh!... ¡Los dos tenemos lo mismo! (*Señala sus latas.*) Uno... y dos... ¡son tres!

La expresión que apareció en la cara de Debbie fue algo inenarrable. Manifestaba estar pasando por lo que los psicólogos denominan una experiencia de "¡*Ajá*!", caracterizada por una comprensión repentina. Su cara se iluminó y miró hacia lo lejos, apartando la vista de las cajas. Esto constituyó sin duda un momento importante dentro del desarrollo matemático de Debbie, y tuve la suerte de observarlo. Sin embargo, la naturaleza exacta de su comprensión se hace menos evidente. Quizá ella ya estaba habituada a la expresión "uno y dos son tres", pero en aquel momento entendió súbitamente lo que *significaba* dentro de aquel contexto en particular. También es posible que haya comprendido de modo repentino la existencia real de una importante relación entre las cantidades "uno", "dos" y "tres", y haya descubierto una forma de *expresar* con palabras dicha relación. En cualquier caso se estaba configurando un nexo decisivo.

Proseguí en esta línea de investigación con mi propio hijo Owen (tres años y nueve meses). Se le planteaba exactamente el mismo problema que a Debbie y a Gavin (véase la figura 5).

MH: ¿Quién tiene más, tú o yo?
Owen: ¿Tú? (*Me mira, hace una ligera mueca, inseguro*).



Gavin MH

Figura 5. Patrón de latas correspondientes a Gavin y a MH.

MH: No estás seguro, ¿verdad? ¿Cómo podríamos averiguar quién tiene más bloques en sus latas?
Owen: No lo sé (*en tono más bien lúgubre*).
MH: ¿No sabes cómo averiguarlo?
Owen: No... (*mira en las cajas. De pronto me mira lleno de atención.*) ¡Los dos tenemos la misma cantidad!
MH: ¿Por qué piensas eso?
Owen: ¡Porque uno (*toma el "1" y lo vuelve a dejar*) más dos (*toma el "2" y lo vuelve a dejar*)!
MH: ¿Son?
Owen: ¡Tres!

Como en el caso de Debbie, la cara de Owen se iluminó repentinamente mientras efectuaba la conexión entre la situación concreta y la expresión abstracta: !Uno... más dos... son tres".

Quise ver cómo reaccionaba Owen si yo pasaba una lata vacía de una persona a la otra.

MH: Ahora te voy a dar esta lata. (*Desplaza la lata 0 hacia el lado de Owen*). ¿Quién tiene más ahora, tú o yo?
Owen: Yo. (*A continuación emite una fuerte exclamación, al darse cuenta de que está equivocado.*) ¡Los dos tenemos lo mismo!

Sin la menor duda, para Owen era muy divertido el hecho de pasar una lata de una persona a otra sin modificar el total de bloques que tenía cada uno.

Estas sesiones de utilización del juego de las latas demostraron que son extremadamente útiles para ayudar a los niños a captar ciertas nociones matemáticas importantes. Vale la pena comparar estos ejemplos de Debbie y Owen dándose cuenta repentinamente de un aspecto de la relación formal que existe entre los números "uno", "dos" y "tres" con mis infructuosos intentos —mencionados en el capítulo 4— de lograr esa misma comprensión (véase por ejemplo p. 69). Además, el juego de las latas sin duda puede desarrollarse de muchas maneras distintas: por ejemplo, con el propósito de demostrar que estas relaciones se dan sea cual fuere el objeto que contengan las cajas: bloques, cuentas o cualquier otra cosa. Sin embargo, la noción básica sobre la que se fundamenta el juego de las latas —colocar símbolos escritos sobre sus tapas— es para los niños algo extremadamente sencillo de captar.

La introducción de "+" y "-"

Quise comprobar si el juego de las latas podía emplearse para presentar los "+" y "-" ante los niños en edad preescolar. Como hemos visto con anterioridad, estos operadores provocan serias dificultades posteriores en la escuela. Por esta causa algunas personas podrían considerar que no conviene plantearlos ante los niños a edades tan tempranas. Sin embargo, me pareció que era factible introducirlos de un modo que permitiese a los niños captar con facilidad su significado. Si se lograba tal cosa, serviría para proporcionar nuevas perspectivas acerca de por qué posteriormente los niños de más edad los encuentran difíciles en la escuela, y también podría salir a la luz alguna manera de superar dichas dificultades.

Me propuse combinar la noción básica de la tarea de la caja, con la utilización de cifras imantadas en el juego de las latas. La tarea de las latas había revelado que los niños de tres y cuatro años sabían que al sumar dos bloques a otro que había en la caja, en ésta había tres bloques. Mi trabajo posterior con el juego de las latas también había puesto de manifiesto que los niños podían captar la idea de representar el contenido inicial de la caja colocando un número sobre la tapa. ¿Podrían aprender también a representar mediante el signo "+ 2" la suma posterior de dos bloques, de forma que en la tapa apareciese entonces el mensaje "1+2"? Además ¿sabrían los niños que una lata con dicho mensaje contenía la misma cantidad de bloques que una lata con el mensaje "3", "2+1" o incluso "4-1"?

No era fácil poner en práctica esta idea. El principal obstáculo consistía en que la mayoría de los niños prefería la cifra única "3" al innecesario grupo "1+2". Sin embargo, el hecho de que unos cuantos niños captasen la noción con mucha rapidez me sirvió de aliento.

Uno de estos niños era Thomas (cuatro años). Comenzamos poniendo un "1" en una lata que tenía un solo bloque en su interior. El bloque estaba envuelto en papel de aluminio y siempre nos referimos a él llamándole "caramelo". Le expliqué a Thomas que si yo ponía otro caramelo en la lata, tenía que colocar los signos "+" y "1" en la tapa, mientras que si ponía dos caramelos, tendría que representarlo mediante los signos "+" y "2". Le pedí que cerrara los ojos, coloqué otro caramelo en la lata y añadí los signos adecuados. Ahora en la tapa de la lata se veía la fórmula "1+1".

MH: ¿Cuántos caramelos hay ahora en la lata?
Thomas (*adivina con los ojos cerrados*): ¡Tres!
MH: ¡Abre los ojos!
Thomas (*ve "1+1" en la lata y parece comprender que su conjetura es incorrecta*): ¡Dije tres!
MH: ¿Cuántos caramelos he puesto?
Thomas: Dos... (*pausa*). Primero uno (*señala el "1" que hay a la izquierda*) y luego has puesto dos (*señala el "1" que hay a la derecha*).
MH: No, no he hecho eso.
Thomas: Has puesto uno más.
MH: He puesto uno más.
Thomas: ¡Que suman dos! (*Thomas sustituye "1+1" por un "2" y se tapa de nuevo los ojos. Pongo otros dos caramelos y añado "+2" a la tapa.*)
MH: Abre los ojos. ¿Cuántos he puesto esta vez?
Thomas (*mira la expresión "2+2"*): Esto quiere decir tres... porque has empezado con dos y luego has puesto uno... dos (*el "+2" le desconcierta.*)
MH: He puesto dos más, ¿no?
Thomas: Has puesto dos más ¡entonces son cuatro!

No cabe duda de que Thomas no había captado por completo todos los detalles correspondientes a la lectura e interpretación de los signos que aparecían en las latas. Sin embargo, se daba cuenta de algunas de las ideas implicadas en la cuestión. Entendía que se podía dejar un mensaje para comunicar información acerca de algo que había ocurrido en el pasado. También dominaba la convención según la cual dichos mensajes se leían de izquierda a derecha. Es interesante advertir que no se mencionó en ningún momento el término "caramelos", sino que utilizó frases como "has empezado con dos", "has puesto dos más" y "son cuatro".

Decidí llevar a cabo un estudio sistemático sobre si los niños en edad preescolar entendían en la práctica el simbolismo aritmético que se les presentase de este modo. Trabajé con veinte niños de cuatro años (entre cuatro años y un mes y cuatro años y once meses) procedentes de dos guarderías de Edimburgo. Diez de los niños pertenecían a un centro situado en una zona de la clase obrera, con grandes carencias de recursos y diversiones; sus padres eran obreros no cualificados, estaban desempleados o habían abandonado a su familia. Los otros diez niños asistían a un centro situado en un barrio de clase media desahogada; sus padres eran profesionales o directivos. Los niños fueron elegidos al azar dentro del grupo de sujetos de cuatro años que había en cada centro. (Véase más detalles en Hughes, 1983b).

Los niños siguieron un programa de investigación estructurado pero flexible. Dicho programa duró ocho sesiones a lo largo de seis semanas. En primer lugar los niños se habituaron al uso de cifras imantadas en el juego de las latas. A continuación se les introdujo paulatinamente el uso de "+" y "-" para presentar sumas y restas. El siguiente relato acerca de la forma en que presenté la expresión "+1" ilustra el enfoque general de la cuestión.

Saqué tres latas que contenían uno, dos y tres bloques. En las tapas figuraban las cifras que los niños habían colocado en la sesión anterior. Tomé un osito de juguete y expliqué que jugaríamos a un juego en el cual el osito ponía un bloque en una de las latas, mientras la niña tenía los ojos cerrados. Cuando la niña abrió los ojos le pedí que adivinara a cuál de las latas el osito había añadido un bloque. Abríamos la lata que ella elegía y se comparaba su contenido con lo que había en la tapa. Si la niña no podía averiguar si el osito había añadido un bloque o no, yo la ayudaba mediante preguntas como "¿cuántos bloques había antes en la lata?", "¿cuántos hay ahora dentro de ella?", y así sucesivamente. Esta parte del juego se repetía hasta que la niña captaba la idea.

En ese momento introducía el signo "+" (que yo siempre llamaba "más"). Explicaba que éste era uno de los signos especiales del osito. El osito los utilizaba para ayudar a la niña. Por ejemplo, si el osito había añadido un bloque en determinada caja, ponía "+" y "1" a la derecha de la cifra que mostraba el contenido. Mostraba esto a la niña y a continuación jugábamos utilizando estos signos. Cuando ella identificaba correctamente la lata a la cual el osito había agregado un bloque, yo le preguntaba: "¿Cuántos bloques hay ahora dentro de ella?" y así sucesivamente. En sesiones posteriores introducía "-1", "+2" y "-2", del mismo modo.

Unos cuantos niños (cinco de clase obrera, uno de clase media) utilizaron icónicamente las cifras imantadas. En el caso de estos niños adopté la convención según la cual "+" significaba que se había añadido uno, "-" significaba que se había quitado uno, "+ +" quería decir que se habían agregado dos, y "- -" que se habían quitado dos.

Después de varios ensayos en los que yo manejaba el osito, los roles se invertían y el niño tenía la oportunidad de desempeñar la función propia del osito. Esto constituía un elemento importante dentro del proceso y le brindaba al niño una experiencia directa en el manejo del osito, los símbolos y los bloques. Además, solía ser muy divertido para los niños.

Este estudio mostró con gran claridad que la mayoría de niños de cuatro años son capaces de utilizar y comprender una forma sencilla de simbolismo aritmético. Todos captaron la idea de que los operadores "+" y "-" podían utilizarse para indicar que en una lata habían sido colocados más bloques o que se le había quitado alguno, y casi todos aprendieron el significado de determinadas transformaciones; por ejemplo "+2" y "-1". El juego resultaba también muy entretenido. En la sesión final los niños se mostraban tan deseosos de jugar una partida como lo estaban al principio, si no más. Al mismo tiempo, ciertos aspectos de las sesiones planteaban sin duda dificultades, y muchos niños lo reconocían a través de comentarios como "éste sí que es difícil", "no lo sé, tengo que pensarlo". Esto no parecía disminuir su diversión: en efecto, a muchos de ellos parecían gustarles los problemas intelectuales que rozaban de este modo los límites de su comprensión.

Con determinados niños el método tenía casi siempre más éxito que con otros. En particular, algunos niños de origen obrero avanzaron tanto como los de clase media, pero a otros les costó captar la naturaleza de un mensaje como "1+2". Sabían que "+" significaba que se había añadido algo, pero tenían dificultades para averiguar qué había ocurrido exactamente.

También me interesaba determinar si los niños pertenecientes a ambas clases sociales podían generalizar dentro de nuevos contextos lo que habían aprendido. Se comprobó que incluso aquellos niños que habían tenido más éxito en el uso y la comprensión de los operadores a lo largo de los juegos con el osito, eran incapaces de establecer qué significaban estos signos cuando se utilizaban fuera del juego. Por ejemplo, en una prueba de generalización se les pidió a los sujetos que golpeasen un tambor "2+1" veces. Incluso aquellos niños que sabían de inmediato que "2+1" sobre una lata significaba que dentro de ella había tres bloques, quedaron desconcertados al toparse con "2+1" fuera de dicho contexto. No se sabe con claridad por qué los niños no efectuaban la conexión entre ambos contextos. Evidentemente, es posible que si yo les hubiera ayudado a ver el nexo entre el uso de los símbolos en el juego con el osito y su utilización dentro del contexto de tocar el tambor, la generalización se hubiese producido.

Este estudio muestra la posibilidad de presentar los signos "+" y "-" ante los niños de un modo que les resulte comprensible y divertido al mismo tiempo. Si el empleo de estos símbolos tiene una lógica, y si se construye un juego donde se ponga de manifiesto dicha lógica, la mayoría de los niños de cuatro años se muestran capaces de aprender el significado de "+" y "-". Esto sugiere que sus posteriores dificultades escolares están relacionadas con la manera en que estos símbolos se presentan y se utilizan, y no con una limitación profundamente arraigada en los niños.

RESUMEN

En este capítulo hemos visto diversos juegos que pueden practicarse con niños de edad preescolar. En todos ellos se presentan símbolos aritméticos ante los niños en contextos donde su significado resulta claro y comprensible a primera vista. Los niños los consideraban divertidos y aprendieron mucho gracias a ellos. También se produjeron momentos críticos de captación, como en el caso de Debbie, que —en el juego de las latas— comprendió súbitamente que "uno... y dos... ¡*suman tres*!". Al mismo tiempo cada juego planteaba dificultades específicas para los niños. En los juegos intervenían ideas o nociones que al principio no resultaban fáciles para algunos niños. Quizás esto era de esperar: el aprendizaje de las matemáticas no constituye un proceso fácil.

No hay razones para pensar que juegos de este tipo no puedan utilizarse para desarrollar la comprensión de otros aspectos de las relaciones formalizadas entre los números. Lo importante es tener en cuenta dos principios fundamentales que corresponden a las dos "direcciones" de la traducción. El primer principio, referente a traducir lo concreto a una representación numérica simbólica, afirma que los juegos deben presentar y utilizar los símbolos en situaciones dentro de las cuales posean un significado obvio, y donde su utilidad se demuestre con claridad. El segundo principio consiste en que los juegos deben estimular a los niños para que traduzcan de nuevo los símbolos a la correspondiente situación concreta, siempre que necesiten comprobar —o averiguar— la respuesta a un problema.

PRINCIPIOS PARA LA ENSEÑANZA

PRESENTACIÓN

El propósito de esta unidad es proporcionar al alumno un marco teórico de referencia que funcione como guía en la enseñanza de los contenidos matemáticos.

De acuerdo con Palacios, Bustos y Bollás, un principio importante par la enseñanza consiste en tomar en cuenta el nivel alcanzado por los niños así como sus potencialidades. Se rescata la idea vigotskiana de la zona de desarrollo próximo y la metáfora del andamiaje como apoyos que pueden favorecer el desarrollo.

En el artículo de Kamii se resalta la importancia de la interacción entre compañeros para el desarrollo del conocimiento lógico-matemático, partiendo de la idea de que los alumnos pueden aprender unos de otros, la autora propone una serie de actividades en las cuales se estimula el pensamiento y permite a los niños tomar sus propias decisiones.

Labinowicz sostiene que los contenidos matemáticos no solamente se pueden practicar de manera aislada sino que pueden aplicarse a situaciones de la solución de problemas. Asimismo señala que es necesario adaptar las preguntas o consignas a los niños para que accedan a la resolución del problema; sin embargo habría que tener cuidado porque la facilidad con que el niño resuelve el problema puede dar la idea de una comprensión superficial, de ahí que (como principio para la enseñanza) es conveniente observar a los niños en un amplio rango de actividades. Como último punto el autor propone una serie de actividades lúdicas susceptibles de ser utilizadas en el aula.

Por su parte Bassedas resalta la importancia de los juegos colectivos, tomando como referencia las concepciones actuales de la enseñanza sobre las matemáticas. Señala cuatro principios que se han de tomar en cuenta para dicha enseñanza: el primer principio se refiere al hecho de que los contenidos matemáticos estén ligados a actividades lúdicas y que éstas sean familiares y significativas para los alumnos; otro principio consiste en que el aprendizaje matemático funcione como instrumento intelectual que permita identificar y resolver problemas. Retoma el principio ya expuesto por Palacios y Kamii en el sentido de que se deben tomar en cuenta los niveles en el proceso de construcción individual pero que estos niveles deben de estar ligados a la resolución de problemas reales y concretos. Finalmente señala el principio de interacción mencionado por Kamii, en el cual los alumnos pueden aprender unos de otros; en este sentido es necesario favorecer el trabajo en pequeños grupos que permitan la interacción entre iguales para el aprendizaje de los contenidos matemáticos. De acuerdo con estos principios Bassedas propone trabajar los contenidos matemáticos a través de talleres de juego.

Tema 1. *Relaciones entre aprendizaje y desarrollo*

LECTURA: REFLEXIONES EN TORNO A LAS IMPLICACIONES EDUCATIVAS DE LA OBRA DE VIGOTSKI*

PRESENTACIÓN

Palacios, citando a Vigotski, sostiene que los niños construyen conocimientos matemáticos antes de su ingreso a la escuela, por lo que el aprendizaje escolar nunca parte de cero. Cuando el niño ingresa a preescolar habrá tenido ya la oportunidad de construir (a través de experiencias concretas de su vida cotidiana y en las interacciones que establecen con los adultos y con sus compañeros) ciertas hipótesis acerca de los contenidos matemáticos.

Reconocer que el niño cuenta con conocimientos previos permite valorar su capacidad real, es decir, el nivel alcanzado que determina la forma particular que tiene el niño de conceptualizar los contenidos matemáticos (conservación de las cantidades, representación gráfica, conteo, etc.). En este sentido la capacidad real hace referencia a las características evolutivas de un determinado nivel alcanzado por el niño. Dichas características son de gran importancia para el aprendizaje matemático dado que permite partir de lo que el niño sabe (nivel alcanzado) para llevarlo, progresivamente, hacia características más evolucionadas que puedan ser definidas, según Vigotski, como capacidad potencial.

De acuerdo con Vigotski es necesario distinguir dos niveles de desarrollo en el niño; a) la capacidad real. Lo que el niño ya ha construido como resultado de un desarrollo y experiencias previas, se trata del nivel o estadio alcanzado y b) la capacidad potencial (zona de desarrollo próximo). Lo que el niño es capaz de alcanzar (un nivel más elevado) si recibe la ayuda de un adulto o un niño más desarrollado. La capacidad potencial o zona de desarrollo próximo hace referencia a procesos de desarrollo que están progresando, o aquellos que ocurrirán y comenzarán a progresar.

Jesús Palacios opina que el punto de vista de Vigotski sobre esta relación es interaccionista, ya que considera en el niño un nivel de desarrollo real alcanzado y, además, posee un nivel que está al alcance de sus posibilidades siempre y cuando reciba ayuda.

De esta manera la enseñanza consiste precisamente en aportar asistencia que permita actualizar los contenidos incluidos en la zona de desarrollo próximo del niño para llevarle más allá de su capacidad real. En este sentido el aprendizaje es susceptible de favorecer el desarrollo, siempre y cuando se parta de los niveles alcanzados por el niño.

REFLEXIONES EN TORNO A LAS IMPLICACIONES EDUCATIVAS DE LA OBRA DE VIGOTSKI

Resulta difícil referirse a las aportaciones de Vigotski sin hacer mención a las implicaciones educativas que de ella derivan o con ella están contenidas. En las páginas que siguen se presentan algunas reflexiones que pretenden resaltar el valor de esas aportaciones, salir al paso de interpretaciones con las que no siempre es fácil estar de acuerdo y, finalmente, proponer una extensión del concepto de zona de desarrollo próximo y de sus implicaciones educativas profesionales.

Todos sabemos lo difícil que resulta escapar a las simplificaciones o a las caricaturas cuando se trata, sobre todo, de exponer puntos de vista que son contrapuestos. En el terreno que nos ocupa, la simplificación más extendida ha consistido en contraponer los puntos de vista de Piaget y Vigotski en lo que se refiere a las relaciones que existen entre desarrollo y aprendizaje. La caricatura ha consistido en despachar el problema diciendo que para Piaget el aprendizaje debe seguir al desarrollo, mientras que para Vigostki el desarrollo es un

* Jesús Palacios. "Reflexiones en torno a las implicaciones aducativas de la obra de Vigotski", en: Siguán, M. (Coord.). *Actualidad de lev s. Vigotski.* Barcelona, Ed. Anthropos, 1987. pp. 176-181.
Texto presentado en la "Sesión Conmemorativa de L.S. Vigotski", orgnizada por la Sociedad Española de Psicología, Madrid, mayo de 1985.

resultado del aprendizaje. Al simplificar así las cosas parece que se está obligando a Piaget a sostener que el aprendizaje no influye sobre el desarrollo y a Vigotski a postular que el desarrollo previo del niño incide poco sobre sus capacidades de aprendizaje. Ni Piaget ni Vigotski pensaban de esa guisa, y afirmaciones tales son sólo producto de las deformaciones propias de todas las caricaturas.

Nunca sostuvo Piaget que el aprendizaje no influye sobre el desarrollo. Antes al contrario, la transmisión social y la educación forman parte, junto a la maduración, la experiencia y la tendencia a la equilibración de la tétrada de factores según, según él, constituyen el motor del desarrollo.

Igualmente ilusorio es creer que Vigotski sostuvo que el desarrollo depende del aprendizaje, sin introducir más matizaciones. Por citar el propio Vigostki (1934-84) "es una comprobación empírica, frecuentemente verificada e indiscutible, que el aprendizaje debe ser congruente con el nivel de desarrollo del niño. No es necesario, en absoluto, proporcionar pruebas para demostrar que sólo a cierta edad puede comenzarse a enseñar la gramática, que sólo a cierta edad el alumno es capaz de aprender álgebra. Por tanto podemos tomar tranquilamente como punto de partida el hecho fundamental e incontrovertible de que hay una relación entre determinado nivel de desarrollo y la capacidad potencial de aprendizaje" (p. 111). Como resulta obvio y como no podía ser de otra manera, Vigostki era consciente de que las posibilidades de aprendizaje de un niño guardan estrecha relación con su nivel de desarrollo. Decir simplemente, por tanto, que para Vigotski el desarrollo debe seguir o, de hecho, sigue al aprendizaje, no solamente no refleja el punto de vista vigotskiano sino que de hecho refleja una de las concepciones que, en torno a las relaciones desarrollo-aprendizaje, el propio Vigotski criticó reiteradamente.

La zona de desarrollo próximo y las relaciones entre desarrollo y aprendizaje

Para comprender cabalmente el punto de vista de Vigotski sobre las relaciones entre aprendizaje y desarrollo, no hay más remedio que traer a colación la noción de zona de desarrollo próximo.

El punto de partida de los análisis sobre esta temática por parte de Vigotski consiste en la constatación de que el aprendizaje del niño comienza mucho antes del aprendizaje escolar. Para decirlo con sus propias palabras, "el aprendizaje escolar jamás parte de cero. Todo el aprendizaje del niño en la escuela tiene una prehistoria" (Ibid, p. 110). Así, según el ejemplo del propio Vigotski, cuando el niño comienza a estudiar aritmética en la escuela, tiene tras de sí una cierta experiencia de la cantidad, de las operaciones de adición y sustracción; "el niño —dice Vigotski— ha tenido ya una pre-escuela de aritmética y el psicólogo que lo ignorase estaría ciego" (*Ibid*).

De acuerdo con el análisis de Vigostki, el error que más frecuentemente se comete cuando se analizan las relaciones entre aprendizaje y desarrollo estriba en prestar atención sólo a uno de los niveles de desarrollo que el niño posee. Es aquí donde hay que distinguir entre el nivel de desarrollo efectivo, actual, que el niño presenta, y el nivel de desarrollo potencial, el que puede alcanzar. El primero de ellos, como es bien conocido, se refiere al nivel de desarrollo que el niño ya ha conseguido como resultado de su desarrollo y experiencias previas. El nivel de desarrollo potencial se refiere a los procesos de desarrollo que están ocurriendo y progresando, o a aquellos que están a punto de ocurrir y empezar a progresar. Para Vigotski el nivel de desarrollo de un niño sólo puede determinarse refiriéndose como mínimo a esos dos niveles: el nivel de desarrollo efectivo y el nivel de desarrollo posible y, por así decirlo, "a la mano", lo que se conoce con el nombre de zona de desarrollo próximo.

Según lo entiende Vigotski, una enseñanza orientada hacia la etapa de desarrollo ya realizado es ineficaz desde el punto de vista del desarrollo general del niño; no es capaz de dirigir el proceso de desarrollo, sino que le va a la zaga.Por el contrario, la teoría de la zona de desarrollo potencial sostiene que "la única buena enseñanza es la que se adelanta al desarrollo" (*Ibid.*).

Esto significa, como el propio Vitoski lo indica en otro lugar (Vigotski, 1979), que, si bien aprendizaje no equivale a desarrollo, no obstante el aprendizaje organizado se convierte en desarrollo mental y pone en marcha una serie de procesos evolutivos que no podrían darse nunca al margen del aprendizaje; "el aprendizaje —según palabras del propio Vigotski— es un aspecto universal y necesario del proceso de desarrollo culturalmente organizado y específicamente humano de las funciones psicológicas" (p. 139).

Es cierto que, de acuerdo con Vigotski, el proceso de desarrollo va a remolque del proceso de aprendizaje *a condición* de que ese aprendizaje actúe sobre la zona de desarrollo próximo que el sujeto ya tenía.Dicho de otra forma: el aprendizaje no produce desarrollo en cualquier circunstancia, sino sólo en aquellas en las que el niño ha alcanzado ya un determinado nivel de desarrollo potencial.Según la metáfora del propio Vigotski, las posibilidades contenidas en la zona de desarrollo próximo son los capullos o las flores de las que han de salir los frutos del desarrollo; es sobre esos capullos y esas flores sobre las que incidirían las actividades de aprendizaje que son útiles para acabar de madurar el fruto.

Este punto de vista está, como se ve, igualmente alejado de dos concepciones, una a la que podríamos denominar fatalista y otra a la que podríamos etiquetar como preformacionista.Para la actitud fatalista el aprendizaje debería esperar en todos los casos a que el desarrollo se produjera, estando fatalmente condenadas al fracaso todas las actividades de enseñanza que se introdujeran prematuramente respecto al nivel de desarrollo actual del niño.

El punto de vista preformacionista sostendría que todo el desarrollo es fruto del aprendizaje y que, si queremos que un aspecto o área de la personalidad se desarrolle, basta con introducir las tareas de aprendizaje adecuadas.Esta visión, próxima a algunos de los postulados del análisis funcional de la conducta, tiene el defecto de ser un análisis excesivamente externo de lo que es el desarrollo, olvidando (o quizás ignorando) la dinámica interna que existe en todo proceso de desarrollo.

El punto de vista de Vigotski es netamente interaccionista: el niño tiene ya un determinado nivel de desarrollo y posee también un nivel de desarrollo que está al alcance de sus posibilidades a condición de que se le ayude; la enseñanza consistirá justamente en aportar esa asistencia que permite actualizar los contenidos incluidos en la zona de desarrollo potencial.

Pero el punto de vista de Piaget es también interaccionista. El desarrollo es una consecuencia de la acción mancomunada de la maduración biológica, la experiencia del niño en su contacto con las cosas, la educación y la tendencia a la equilibración, como hemos recordado más arriba. **Pero se trata, en comparación con el punto de vista de Vigotski, de un interaccionismo de signo distinto.**En primer lugar porque Piaget —como en seguida veremos— insiste sobre todo en la interacción del sujeto con el objeto; en segundo lugar porque desde su punto de vista la educación es sólo un factor más de los que ayudan al desarrollo. Por su parte Vigotski confiere una extraordinaria importancia a la interacción social, como veremos en el apartado siguiente, y además entiende que el aprendizaje es un momento "intrínsecamente necesario" para que el desarrollo se produzca: "el aprendizaje no es en sí mismo desarrollo, pero una correcta organización del aprendizaje del niño lleva al desarrollo mental, activa todo un grupo de procesos de desarrollo y esta activación no podría producirse sin el aprendizaje. Por ello el aprendizaje es un momento intrínsecamente necesario y universal para que se desarrollen en el niño esas características humanas no naturales, sino formadas históricamente" (Vigotski, 1934/1984, p. 115).

Creemos que las ideas de Piaget respecto al tema que nos ocupa lindan con una actitud espontaneísta, en la que se confía en que el aprendizaje y el desarrollo tienden a producirse espontáneamente como consecuencia de las actividades y experiencias personales sobre los objetos o la realidad en general, la influencia educativa, etc. Por su parte la posición vigotskiana encaja mejor en una actitud culturalista, en el sentido de que la asistencia al aprendizaje y el desarrollo, culturalmente organizada, se convierte en elemento clave y necesario que posibilita y garantiza que tanto el aprendizaje como el desarrollo se produzcan.

Interacción social, aprendizaje, desarrollo

Aunque, como todo el mundo conoce, la noción de zona de desarrollo potencial es vigotskiana y no pertenece en absoluto al acervo de las nociones piagetianas, se puede tener, sin embargo, la impresión de que, por lo que se refiere al análisis precedente y en contra de las simplificaciones que se suelen hacer, los puntos de vista de Piaget y de Vigotski no son necesariamente divergentes (lo cual, como es obvio, no significa que coincidan). Así, por ejemplo, en el Prólogo al conocido libro de Inhelder, Sinclair y Bovet *Apprentissage et structures de la connaissance (1979)*, Piaget afirma: "[...] en condiciones experimentales idénticas, los mismos factores introductorios por la experiencia no producen los mismos efectos, según sea el nivel de los sujetos. Reuniendo los resultados obtenidos en las diferentes situaciones estudiadas, se comprueba en efecto que las acciones muy ampliamente dominantes consisten en pasos de un nivel al siguiente (o a su sucesor) y eso tanto más frecuentemente cuando el sujeto se sitúa más cerca de los niveles superiores [...]. Por tanto es evidente que no podrá reducirse el desarrollo tan sólo a los aprendizajes y que las nociones de niveles y de "competencia" se imponen como condiciones previas" (Piaget, 1974, p. 15 de la trad. cast.). En las conclusiones de esta misma obra Inhelder y sus colaboradores afirman que "los sujetos más avanzados se aprovechan más de los ejercicios y de las informaciones [...] en el curso de los aprendizajes" (Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974, p. 324 de la trad. cast.).

Hay otra área, sin embargo, en la que las posiciones de Piaget y las de Vigotski estaban, a nuestro entender, mucho más alejadas. De hecho, en sus diferencias respecto a lo que sigue radican buena parte de las diferencias entre una concepción del desarrollo en términos de lo que Reese y Overton (1970) llamaron modelos organísmicos y una concepción de tipo contextual-dialéctico.

De acuerdo con las afirmaciones de Coll (1984) "en la mayoría de las aplicaciones pedagógicas de base piagetiana, el alumno es percibido como un ser socialmente aislado que debe descubrir por sí sólo las propiedades de los objetos e incluso de sus propias acciones, viéndose privado de toda ayuda o soporte que tenga su origen en otros seres humanos. La centración casi exclusiva —prosigue Coll— en las interacciones entre el alumno y un medio esencialmente físico lleva aparejado un menosprecio por las interacciones del alumno con su medio social y, por supuesto, de los posibles efectos de estas últimas sobre la adquisición del conocimiento" (p. 125).

Nada hay más alejado de las perspectivas vigotskianas. Como se sabe, junto a la noción de zona de desarrollo próximo, una de las aportaciones conceptuales más importantes de Vigotski se refiere a la teoría del doble origen de las funciones psíquicas. De acuerdo con tal teoría, "todas las funciones psicointelectivas superiores aparecen dos veces en el curso del desarrollo del niño; la primera vez en las actividades colectivas, en las actividades sociales, o sea como funciones interpsíquicas; la segunda en las actividades individuales, como propiedades internas del pensamiento del niño, o sea como funciones intrapsíquicas" (Vigotski, 1934/1984, p. 114). Lo que ocurre con el lenguaje y con su papel en la regulación de la conducta es, sin lugar a dudas, muy ilustrativo.

El poderoso papel que la interacción entre los iguales tiene sobre la construcción del conocimiento, la forma en que esa interacción puede ser organizada para sacar de ella todo su provecho educativo, han sido objeto recientemente de una serie de artículos publicados en el último número de 1984 de la revista *Infancia y aprendizaje* (Coll, 1984; Forman y Cazden, 1984; Webb, 1982). En concreto, los conflictos socio cognoscitivos que ocurren en situaciones de aprendizaje cooperativo, tal y como han sido conceptualizados por Perret-Clermont, Doise y Mugny, son fuentes de desarrollo intelectual. Originado en la confrontación entre esquemas de sujetos con diferente nivel de competencia ante una tarea determinada, el conflicto sociocognitivo constructivo que se da en determinadas situaciones de la interacción social favorece el desarrollo tanto del razonamiento lógico como de la adquisición de contenidos escolares, y ello como consecuencia del proceso de reorganización cognitiva provocado por el conflicto y su superación colectiva (Coll, 1984).

No abundaremos más en este tema concreto por haber sido objeto, como he señalado, de publicaciones excelentes. Quisiéramos, en su lugar, utilizar otro contexto como ejemplo de la importancia que tienen las interacciones en la génesis del conocimiento. En este caso se trata de interacciones entre las madres y sus hijos pequeños. El proceso escogido para ilustrar nuestro argumento procede del área del lenguaje.

Como muchos conocen, las décadas de los sesenta y los setenta vieron florecer en diversos países —no precisamente el nuestro, desgraciadamente— multitud de programas de intervención educativa que tenían una finalidad preventiva y/o compensatoria. Aquellos programas que empezaron aplicándose a sujetos preescolares de 3 a 5 años pronto pusieron de manifiesto que era importante empezar la intervención a edad más temprana con el fin de hacerla más eficaz. Por aquella misma época se popularizaron en psicología los resultados de investigación animal que ponían de manifiesto cómo, cuando determinados animales —en concreto ratas— crecían en ambientes pobres de estímulos, los resultados en sus niveles de ejecución posterior en diferentes pruebas, así como el desarrollo general de su cerebro, se veían notablemente favorecidos.

Como consecuencia de la convergencia de estos dos hechos, se pusieron en circulación ideas de estimulación a los niños pequeños basada fundamentalmente en la presencia de estímulos físicos a su alrededor. Algunos psicólogos estadounidenses, siempre tan ávidos de aceleraciones, alentaron a los padres a colocar móviles sobre la cuna de sus bebés, prometiendo no sé cuántos puntos de mejora en sus cocientes intelectuales. Por fortuna algunos otros fueron más sensatos y propusieron cursos de acción más razonables.

De entre los programas de intervención destinados a la primera infancia, uno de los más destacados es sin duda el desarrollado por Levenstein (1970, 1977). En este programa un visitador va a la casa del niño y lleva cada semana un juguete o un libro nuevo. El visitador enseña a la madre a utilizarlo, a sacarle partido educativo. Por otro lado el material que se lleva es crecientemente complejo, adaptado a las capacidades en aumento del niño. Pero el éxito del programa —porque el programa funciona con notables resultados— no radica en el material; tampoco la clave está en los consejos de tipo general que se le dan a la madre, pues en grupos experimentales a los que sólo se da el material sin ninguna otra indicación, o sólo se dan consejos generales, los niños no mejoran más que otros del grupo control con los que no se hace nada. La clave del éxito del programa de Levenstein radica en que a la madre se le enseña a hacer de mediadora entre el objeto y el niño; la clave está en la interacción, en la modificación y enriquecimiento de las interacciones.

Lo que determina el futuro intelectual de un niño no son los estímulos que le rodean, sino el papel mediador de los adultos, es decir, las actividades en las que adulto y niño se embarcan en una actividad conjunta alrededor de un objeto, a propósito de él. Ahí, en esa escena en la que adulto y niño se enfrascan en una actividad conjunta, en la que el lenguaje actúa como soldadura entre la vida mental del adulto y la del niño, es donde nos parece que radica, en buena medida, la esencia de la estimulación cognitiva de los niños pequeños y de los que no lo son tanto.

Hemos traído además a colación el ejemplo del programa de Levenstein por dos razones adicionales: una, por estar muy centrado en el lenguaje, uno de los temas más cruciales de la obra de Vigotski; otra, porque nos parece que en él se pone particularmente de manifiesto lo que es la zona de desarrollo potencial que los padres van ensanchando con su actuación, y cómo los procesos que empiezan siendo diálogo interpersonal acaban convirtiéndose en lenguaje soterrado, y luego en pensamiento, en el niño.

LECTURA: LA METÁFORA DEL ANDAMIAJE*

PRESENTACIÓN

En el presente artículo los autores resaltan la importancia sobre la labor del andamiaje, como un principio para la enseñanza de los contenidos matemáticos. Para poder realizar la labor de andamiaje, retoman el postulado vigotskiano de zona de desarrollo próximo.

Citando a Vigotski, los autores mencionan que es necesario determinar dos niveles de desarrollo en el niño; el primero es el nivel alcanzado por él en el transcurso de su desarrollo (capacidad real), la cual le permite resolver una tarea por sí solo. El segundo nivel es la capacidad potencial del niño que se refiere a un nivel de desarrollo aún no alcanzado por el niño pero que puede acceder a él con la ayuda de los adultos o de compañeros más avanzados.

A este respecto Bruner, citado por Palacios, propone la metáfora de andamiaje en la que es necesario tomar en cuenta la capacidad real del niño y de acuerdo a ésta proporcionar los apoyos (o andamios) adecuados que permitan acceder a nuevos niveles de desarrollo. Los andamios tienen la virtud de "jalar" al niño progresivamente hacia niveles de competencia y desarrollo más elevados.

Bustos y Bollás ilustran mediante ejemplos la labor del andamiaje en la representación gráfica de las cantidades.

Por último se presenta una estrategia didáctica con el propósito de favorecer en el niño la correspondencia biunívoca en la representación gráfica. En dicha estrategia se puede observar también los momentos en que el educador puede proporcionar los andamios pertinentes en el momento en que el niño lo requiera.

* Vianey Bustos y P. Bollás. *La metáfora del andamiaje*. México, 1995. (mimeo).

LA METÁFORA DEL ANDAMIAJE

La zona de desarrollo próximo y la metáfora del andamiaje

En el desarrollo del niño, es usual analizar los procesos de cambio psicológico en función de estadios o niveles. Los estadios presentan características cualitativas que hacen referencia a lo que el niño es capaz de hacer por sí solo. Decir, por ejemplo, que el niño conserva las cantidades lo ubica en un nivel cualitativamente diferente a otro niño que aún no ha construido la correspondencia biunívoca pero que, sin embargo, está en vías de construcción. Este nivel, según Vigotski, es un nivel de desarrollo potencial que el niño puede alcanzar si recibe apoyo.

El nivel o estadio alcanzado por el niño en el transcurso de su desarrollo hace referencia a una capacidad (real) que le permite resolver por sí solo un problema o una tarea. Paralelamente a esta capacidad real, se observa en el niño una capacidad potencial, se trata de un nivel de desarrollo aún no alcanzado pero que se puede acceder a él con la ayuda de un adulto o un niño más desarrollado. De acuerdo con Vigotski (1934/1986), lo que el niño es capaz de hacer con la ayuda de los adultos (o con niños más capaces) para favorecer sus futuras potencialidades se le llama zona de desarrollo próximo.

Al respecto Vigotski señala: "Lo que el niño puede hacer hoy con la ayuda de los adultos lo podrá hacer mañana por sí solo. El área de desarrollo potencial (zona de desarrollo próximo) nos permite, pues, determinar los futuros pasos del niño y la dinámica de su desarrollo y examinar no sólo lo que ya ha producido el desarrollo, sino lo que producirá en el proceso de maduración" (Vigotski, 1934/1986, 34).

Tomando como referencia la zona de desarrollo próximo, Bruner, citado por Palacios (1990), propone la metáfora de andamiaje como un principio para la enseñanza. Para entender dicha metáfora es necesario tomar en cuenta la capacidad real del niño y de acuerdo a ésta proporcionar los apoyos adecuados que permitan acceder a nuevos niveles de desarrollo, los andamios (o apoyos) permiten "jalar" al niño progresivamente a niveles superiores, niveles que están definidos por su capacidad potencial. Cuando los andamios o apoyos han cumplido su papel se sustituyen por otros más evolucionados, siempre en la mira de llevar al sujeto **más allá** de su capacidad real.

Palacios ejemplifica la metáfora del andamiaje en los siguientes términos:

> Tenemos (...) a un niño y a un adulto que ahora concentran su atención conjunta en la construcción de una pirámide cuyos elementos son piezas de distintos tamaños y colores que deben de ser encajadas en un pivote a través de un agujero que llevan en el centro. Demasiadas exigencias para un bebé que por primera vez se enfrenta a esta tarea. Sin la ayuda y guía, no será capaz de resolverla. Lo que el adulto va a hacer es comenzar por simplificarle la tarea, asumiendo él mismo la realización de las partes difíciles y dejándole las más fáciles; cuando ya sea eficaz en éstas el adulto va a quitar parte de su apoyo, dejando al niño la ejecución de un fragmento de la tarea que antes realizaba él. Según el niño gana en competencia, el adulto va aumentando las exigencias al retirarle parte de los apoyos que antes le prestaba (...). Lo que ocurre aquí es que el adulto parte del punto en el que el niño se encuentra (su nivel de desarrollo actual) y va "tirando" de sus competencias hacia arriba, moviéndole en el sentido de una competencia dentro de la zona de desarrollo que les es posible desde el punto del que parte (su zona de desarrollo próximo). La tarea del adulto es la de modular los movimientos hacia arriba del andamio sobre el que apoya los logros del niño, siendo a la vez sensible al punto de partida de éste y a su capacidad para ir un poco más allá. Al final de una construcción así andamiada, lo que ocurre es que el niño es capaz de montar su pirámide y de disfrutar haciéndolo, no quedan ya rastros visibles de los apoyos que el adulto fue prestando, pero sin ellos el niño no hubiese alcanzado el nivel de competencia que ahora presenta" (Palacios, 1988, 14).

Andamiaje y la representación gráfica de las cantidades

Veamos ahora un ejemplo en el que se pueda ilustrar la metáfora del andamiaje como promotora del desarrollo.

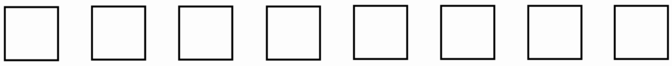
De acuerdo con los datos reportados por Bollás y Sánchez (1994), cuando se le presenta al niño de preescolar una cantidad de "n" elementos (por ejemplo ocho cubos) y se le solicita su producción gráfica, se pueden distinguir varios niveles.

Producción pictográfica	Características evolutivas	Edad aproximada (años)
Sin cantidad	Predominan las características cualitativas de los objetos por representar. El niño no toma en cuanta la cantidad de elementos presentados en el modelo.	4 — 5
Intermedio I	Predominan las características cualitativas. El niño comienza por establecer una correspondencia biunívoca con pocas cantidades (de uno a cinco elementos). Sin embargo, dicha corres-pondencia no está sólidamente establecida	4 — 5
Con poca cantidad	Se recuperan las características cualitativas de los objetos y el niño establece de manera sistemática la correspondencia biunívoca con pocas cantidades (de uno a cinco elementos).	5 — 6
Intermedio II	La correspondencia biunívoca se comienza a extender a ocho o nueve elementos, sin embargo no está sólidamente establecida.	5 — 6
Con cantidad	En las producciones de los niños, se establece la correspondencia biunívoca con ocho o nueve elementos de manera sistemática.	6

Particularmente, con respecto a la producción pictográfica, se distinguen los niveles que a continuación se detallan: (Tabla página anterior)

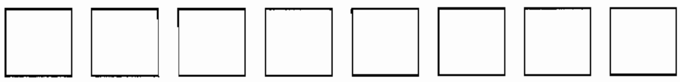
Ahora supongamos que el niño se encuentra ubicado en un nivel pictográfico sin cantidad, esto constituye su capacidad real. Paralelamente, presenta una zona de desarrollo potencial determinado por niveles que aún no ha alcanzado (pictográfico intermedio I y pictográfico con poca cantidad), pero que podrá llegar a ellos con apoyos (andamios) pertinentes.

Así, por ejemplo, si al niño se le presentan cinco cubos para que los represente gráficamente se espera, por las características de su nivel, una producción del siguiente tipo:



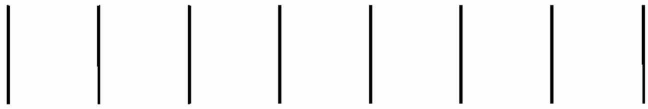
Partiendo de esta capacidad real, conviene presentarle un andamio de la siguiente forma: presentarle tan sólo tres cubos y pedirle un dibujo contorneado, es decir, que coloque primero un cubo sobre la hoja y lo contornee, después otro y así sucesivamente. Una vez que ha dominado esta actividad, se le puede solicitar que los represente sin ser contorneados. En este momento el andamio presenta una modificación que permite llevar al niño más allá de su capacidad previamente alcanzada. Cuando el niño realiza por sí solo esta nueva tarea, se pueden introducir uno y después otro elemento que permitan al niño alcanzar un nivel pictográfico con poca cantidad.

Veamos otro ejemplo. Supongamos que el niño se ubica en un nivel pictográfico con cantidad. Cuando se le presenta un conjunto de ocho cubos se espera que su producción sea del siguiente tipo:



Ahora bien, para que el niño acceda a una representación convencional tiene que dejar de lado las características cualitativas de los objetos (abstracción de las cualidades).

Para trabajar la abstracción de las cualidades se le puede indicar, a manera de andamio, que utilice iconos, es decir, que esos mismos objetos se pueden representar de la siguiente forma:



Para llevarlo más allá, una vez que la representación mediante iconos ha pasado a ser parte de su capacidad real, se le puede indicar al niño que esos mismos objetos se pueden representar de la siguiente forma:

1 2 3 4 5 6 7 8

Se trata de representar a cada objeto mediante un numeral (sin el carácter inclusivo). Finalmente el andamio que se le puede proporcionar consiste en señalar que todos los objetos pueden ser representados tan sólo por el último numeral (carácter inclusivo que implica la cardinalidad).

Estrategia didáctica

Como es de suponerse toda estrategia didáctica debe ir acompañada de un conocimiento sobre el desarrollo cognitivo del alumno, de su capacidad real así como de sus capacidades potenciales. Si se pretende que tal didáctica tenga éxito en la enseñanza de las matemáticas, es conveniente presentarle los apoyos pertinentes a través de actividades lúdicas y de interés para los niños. A continuación se presenta una estrategia didáctica donde se retoman los aspectos mencionados.

"La gallina de los huevos de oro"[1]

Propósitos:

Favorecer la correspondencia biunívoca en la representación gráfica de las cantidades. Particularmente lograr que el niño ubicado en un nivel pictográfico sin cantidad acceda al nivel intermedio I. Por lo que esta actividad es propia para los niños de cuatro o cinco años.

Materiales:

Gallinas de cartón[2]
Huevos de unisel color dorado
Tarjetas blancas
Plumones de colores

Descripción del procedimiento

El educador organiza al grupo en equipo de cuatro alumnos, a cada equipo se le da tarjetas blancas, plumones y "una gallina de los huevos de oro", que contiene varios huevos. Por ejemplo, a un equipo se le da una gallina con tres huevos, a otro equipo con cinco, a otro con dos, a otro con cuatro. Inclusive se le puede dar a dos equipos la misma cantidad de huevos. Lo importante es que no excedan de cinco.

Una vez que cada equipo tenga una gallina, el educador dice lo siguiente:

Esta era una gallina mágica que ponía huevos de oro y sólo se les aparecía a los niños. En cierta ocasión se le apareció a una niña que anhelaba tener juguetes, entonces la gallinita al verla triste le dijo que le contara lo que le sucedía, la gallinita al oírla le contó su secreto y le dijo: "te voy a regalar algunos huevos para que los vendas y te compres los juguetes que te gustan. Por cada huevo que yo te dé, lo anotas en una tarjetita para que no se te olvide pedir, después, una moneda por cada huevo".

Después da la siguiente consigna: "Ahora vamos a sacar los huevos que tiene nuestra gallina para anotarlos en la tarjetita".

El educador observa con cuidado el trabajo de cada equipo para verificar si se comprendió la consigna, fomentar que los alumnos tomen sus propias decisiones para realizar la tarea (decidir, por ejemplo, sobre los turnos) y favorecer la interacción entre ellos. Si el docente encuentra, por ejemplo, que en las producciones no se toma en cuenta la cantidad, puede introducir el siguiente andamio:

Pedir a los equipos que introduzcan nuevamente todos los huevos en la gallina para, después, sacar uno a la vez y, en cada ocasión, se anote el huevo extraído.

Posteriormente el educador pasa con cada equipo para indicarles que coloquen la tarjeta enfrente de su gallina para que otros equipos sepan cuántos huevos tenía. Finalmente recoge todos los huevos y los pone sobre la mesa.

Después el educador lanza las siguientes preguntas:

¿Cuántos huevos había en la gallina de este equipo (señalando)? ¿Y en este otro? ¿En qué equipo la gallina tenía más huevos? ¿En qué equipo la gallina tenía menos huevos?

Si se perciben dificultades, el educador puede andamiar diciéndole a los niños que cuenten el número de "huevos" que están dibujados en las tarjetas.

Para finalizar la actividad el docente le pide a un integrante de un equipo que coloque los huevos que había en la gallina de otro equipo. Así sucesivamente hasta que todas las gallinas tengan sus huevos.

En cada ocasión que los niños realicen las actividades propuestas, el educador estará atento para proporcionar los andamios pertinentes que permitan al niño superar sus dificultades y, con ello, acceder a respuestas más evolucionadas.

México D.F., mayo de 1995

Notas de la lectura

1 Véase Alcántara, C. *et. al. La representación gráfica en los niños*. UPN, México, 1995. (mimeo).

2 La gallina puede ser elaborada con papel cartulina y una caja pequeña para zapatos. La cabeza y la cola de la gallina se dibujarán y pintarán en la cartulina en proporción al tamaño de la caja, se recortan las partes y se pegan a cada extremo de la caja.

Tema 2. *Interacción entre compañeros*

LECTURA: LA IMPORTANCIA DE LA INTERACCIÓN SOCIAL*

PRESENTACIÓN

Partiendo del hecho de que el entorno social de un niño lo conforman los compañeros y los adultos, así como los objetos con los que interactúa para la construcción del conocimiento, Kamii expone la importancia de la interacción social para el desarrollo del conocimiento lógico-matemático.

Retomando los resultados obtenidos en las investigaciones de Perret-Clermont e Inhelder, Sinclair y Bovet, se considera que los niños con cierto nivel de desarrollo son capaces de lograr un mayor nivel en la construcción de conocimiento lógico-matemático a través de la confrontación por parte de un adulto hacia la respuesta dada. Pero también la confrontación de las respuestas entre los mismos compañeros permite la construcción de respuestas más elaboradas.

La autora opina que aplicando el principio de la interacción entre compañeros, el aprendizaje de los contenidos matemáticos permite que se estimule a los niños a pensar y a tomar sus propias decisiones con el propósito de probar o defender sus respuestas ante sus compañeros y así valorar lo pertinente o no de dichas respuestas ante un problema planteado. Con la aplicación de este principio se pretende dejar de lado un aprendizaje memorístico de los contenidos matemáticos.

Al final del artículo de describen algunas situaciones que se podrían aplicar al interior del aula.

LA IMPORTANCIA DE LA INTERACCIÓN SOCIAL

¿Cómo desarrollan los niños su capacidad natural para pensar lógicamente, para construir el número y para inventar la aritmética? Parte de la respuesta reside en la interacción social, o más específicamente en la actividad mental que se da en el contexto de los intercambios sociales. En este capítulo abordaré, en primer lugar, la importancia de la interacción social para el desarrollo del conocimiento lógico-matemático. En la segunda parte pasaré a especificar dos tipos de actividades que los maestros pueden usar en clase para estimular la construcción del conocimiento lógico-matemático mediante el intercambio de puntos de vista.

La importancia de la interacción social en la construcción del conocimiento lógico-matemático

Dos grupos de estudios recientes

Piaget (1974) afirmó que la interacción social es indispensable para que el niño desarrolle la lógica. Los niños muy pequeños son egocéntricos y no se sienten obligados a ser coherentes al hablar. La obligación de no auto-contradecirse, de razonar lógicamente, de hacer afirmaciones verdaderas y de usar palabras comprendidas comúnmente (culturalmente) surge de la interacción social. Piaget escribió que "primeramente el niño busca evitar contradecirse a sí mismo cuando se halla en presencia de otros" (p. 163). El deseo de "hablar con sentido" y de intercambiar puntos de vista con otras personas alimenta la creciente capacidad del niño para pensar lógicamente.

Dos estudios relativamente recientes demuestran la importancia de la interacción social y, por extensión, la nula importancia de la enseñanza directa, en la construcción del conocimiento lógico-matemático. Uno de ellos fue llevado a cabo por Perret-Clermont (1980) y el otro por Inhelder, Sinclair y Bovet (1974).

El estudio de Perret-Clermont

Perret-Clermont estudió los efectos de los intercambios de ideas entre niños integrantes de grupos pequeños. En uno de los experimentos dio

* Constance Kamii. "La importancia de la interacción social", en: *El niño reinventa la aritmética*. Madrid, Ed. Visor, 1986.

zumo de frutas en una jarra opaca a un niño que no conservaba y le pidió que diera exactamente la misma cantidad para beber a otros dos niños. A los dos niños que recibían el zumo se les daban vasos de forma diferente, uno (B) más ancho y corto que el otro (A). También se daba, de paso, un tercer vaso (A') de las mismas dimensiones que el vaso A, para usarlo si hacía falta. (También se podía disponer de otro vaso, idéntico a A y A'.) Se les dijo a los niños que se podrían beber su ración de zumo en cuanto estuvieran de acuerdo en que los otros con vasos distintos (A y B) tenían exactamente la misma cantidad.

Normalmente los niños empezaban por verter el líquido en A y en B. (Ninguno usó primero A y A'; para a continuación transferir el contenido de A' a B). El intercambio de opiniones continuó al menos durante diez minutos, acompañado de muchas acciones. Por ejemplo un niño podía devolver un poco de líquido de B a la jarra, afirmando que en B había más. Después otro podía insistir en volver a llenar un poco B para que volviera a alcanzar el mismo nivel. Entonces un tercer niño podía sugerir que debía vaciarse el contenido de B en A'.

Tanto si el grupo estaba formado sólo por niños que no conservaban con si en el trío había mayoría o minoría de niños que no conservaban, se vio que, de manera significativa, en el grupo experimental hubo más niños que progresaron en el postest y/o en el segundo postest que en el grupo control. (El segundo postest era idéntico al primero, pero se administraba un mes más tarde. La única diferencia entre el grupo control y el grupo experimental era que el segundo había realizado la sesión experimental de diez minutos acabada de describir.)

El pretest y los postests no sólo consistían en la tarea de conservación de líquidos, sino también en tareas de conservación de cantidades numéricas, de cantidad de arcilla y de longitud. Entre los resultados significativos de este estudio destacan los siguientes:

1. Más del 70 por 100 de los que hicieron progresos en la tarea de conservación de líquidos los hicieron también en la tarea de conservación de la cantidad de arcilla. Así pues, puede inferirse que el provecho de la interacción social se amplía hasta más allá del contenido específico de líquido en recipientes. Los desacuerdos entre los niños parecían haber estimulado su capacidad para coordinar también otras relaciones.
2. Los niños que mostraron haber progresado en el postest eran los que según el pretest podían conservar o estaban en un nivel intermedio en la tarea de conservación de las cantidades numéricas. Así pues, la interacción social sólo facilita el desarrollo de un nivel de pensamiento lógico más elevado cuando en el pensamiento de los niños ya existen los elementos aún no coordinados que necesitan coordinarse para producir este nivel más elevado.

El estudio de Inhelder, Sinclair y Bovet

Conflicto cognitivo en la conservación. Perret-Clermont se basó en el trabajo de los más cercanos colaboradores de Piaget: Inhelder, Sinclair y Bovet. Sus experimentos sobre el aprendizaje se llevaron a cabo para comprender mejor el proceso constructivo implicado en el progreso de un niño de un nivel al siguiente, y no para ver si era posible acelerar el desarrollo. Plantearon tareas clásicas como conservación de líquidos e inclusión de clases a niños solos en vez de a grupos pequeños. Cuando un niño reaccionaba estableciendo relaciones inadecuadas entre diversos elementos, el adulto intentaba crear un conflicto cognitivo entre un punto de vista (una relación) y otro, planteando una pregunta y/o llamando la atención del niño hacia un factor pertinente que no era tenido en cuenta. La razón de tratar de inducir un conflicto cognitivo en el niño era que el conflicto es una característica de un nivel intermedio que se da antes de alcanzar la coordinación propia de un nivel superior (lo que Piaget denominó "équilibration majorante" o "equilibración maximizadora"). Así pues, los investigadores ni enseñaban respuestas "correctas" ni corregían las "incorrectas".

Una de las tareas comporta una situación creada para producir un conflicto cognitivo usando el aparato que se muestra en la figura 2. 1. Se fijaron sobre una tabla tres pares de recipientes cilíndricos de cristal. Los dos pares superiores (A, A', B y B') tenían espitas que el niño podía manipular para regular el flujo de líquido que caía en los recipientes inferiores. Los pares superior e inferior (A, A', C y C', con un diámetro de 5 cm y una altura de 7 cm) permanecían fijos, pero el vaso B' (que era idéntico al B) era reemplazado algunas veces por un vaso E más estrecho (con un diámetro de 3 cm) o más ancho (con un diámetro de 7 cm).

Con el recipiente E estrecho en medio, como en la figura 2. 1, se le pedía al niño, entre otras cosas, que vaciara todo el líquido de A en B. A continuación se le pedía que dejara pasar líquido de A' a E, para hacer que E tuviera la misma cantidad que B. Después se le preguntaba si habría la misma cantidad para beber en Cy en C' si vaciaba B y E en ellos. Entonces el niño verificaba su predicción contrastándola con los hechos empíricos.

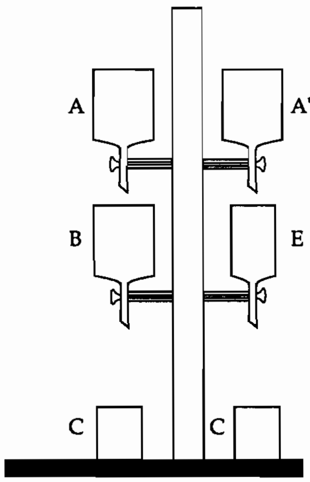


Figura 2.1
Aparato con el que algunos niños aprendían a conservar la cantidad de líquido.

En esta situación se observaron dos tipos de comportamiento. El niño, o bien igualaba los niveles de B y E (dejando, pues, un poco de líquido en A' y obteniendo cantidades desiguales en C y en C') o vaciaba todo el contenido de A' en E (consiguiendo así niveles desiguales en B y en E y la misma cantidad en C y en C'). Hiciera lo que hiciera el niño nunca se le decía que lo hacía "bien" ni se corregía ningún "error". El adulto sólo preguntaba al niño qué pensaba, por qué C y C' acababan teniendo niveles distintos, qué se podía hacer para que en ellos hubiese la misma cantidad, etcétera.

De los 19 niños que dieron un nivel intermedio en el pretest, 16 realizaron un progreso impresionante, y 10 resultaron tener una sólida capacidad de conservación en el segundo postest. Sin embargo de los 15 niños que no podían conservar según el pretest, sólo dos progresaron un poco. Estos niños eran los que dieron un nivel más bajo en el pretest, estando seguros, sin abrigar duda alguna, de que en uno de los vasos había más. Los niños del nivel inferior no sienten ningún conflicto al pensar que dos recipientes, A y A', tienen la misma cantidad y que E tiene más cuando el contenido de A' se vacía en él (E). La vacilación y la incertidumbre son signos de conflicto, es decir, de un nivel superior al del niño que no establece ninguna conexión entre pensar que A = A' y que E > B.

Los educadores deberían tomar nota de dos aspectos de este estudio:

1. Los niños no necesitan ninguna enseñanza directa para progresar en el ámbito lógico-matemático. La confrontación con una idea conflictiva casi siempre acarrea un pensamiento de mayor nivel.
2. El progreso realizado por un niño está en función del nivel ya alcanzado. Los niños que muestran progreso en el postest son los que ya muestran hallarse en un nivel intermedio, relativamente elevado, en el pretest.

Conflicto cognitivo en la inclusión de clases. Me gustaría citar otro ejemplo extraído de Inhelder y otros (1974) sobre una tarea más puramente lógico-matemática: la inclusión de clases.[1] El experimentador daba una colección de frutas de plástico a una muñeca, como por ejemplo dos manzanas y cuatro melocotones. Entonces se le pedía al niño que diera a otra muñeca "más manzanas, porque las manzanas le gustan mucho, pero las dos muñecas han de tener la misma cantidad de frutas para que las dos estén contentas". Esta tarea estaba pensada para que se realizara más fácilmente la comparación entre una subclase (manzanas o melocotones) y una clase (fruta), pidiendo al niño que hiciera una colección en la que cambiara el tamaño relativo de los subgrupos.[2]

En las respuestas dadas por los niños durante las sesiones de aprendizaje se hallaron estos cinco niveles jerárquicos:

Ia. El niño formaba una colección idéntica a la del experimentador como si hubiera oído "Da lo mismo a la otra muñeca".

Ib. Sólo respondía a una parte de la demanda, es decir, "Da más manzanas" y daba a la segunda muñeca cuatro manzanas y ningún melocotón.

II. Daba más manzanas, pero la misma cantidad de melocotones a la segunda muñeca: cuatro manzanas y cuatro melocotones.

III. Daba más manzanas y compensaba cualitativamente esta adición dando cuatro manzanas y tres melocotones.

IV. Daba seis manzanas, eliminando así el problema de la compensación. ¡Realmente seis manzanas son "más manzanas y la misma cantidad de fruta"!

V. Daba tres, cuatro, cinco o seis manzanas y compensaba esta adición dando tres, dos, uno o ningún melocotón, respectivamente.

Normalmente las personas que llevan a cabo experimentos en los Estados Unidos sólo prestan atención al número de respuestas correctas que dan los niños en el pretest y en el postest. Por contra, Inhelder y los otros investigadores de Ginebra se preocuparon mucho por analizar el proceso constructivo del aprendizaje de cada niño durante cada sesión. Como puede verse en los niveles jerárquicos, los niños construían el conocimiento lógico-matemático mediante la coordinación progresiva de relaciones. En el nivel I el niño pensaba o bien en "la misma cantidad de fruta" o bien en "más manzanas", dándose una completa independencia entre ambas ideas. En el nivel II tenía presentes ambas ideas, pero sin compensar la de "más manzanas" reduciendo la cantidad de melocotones. En el nivel III la compensación empezaba a aparecer, aunque sólo de manera intuitiva y cualitativa, todavía sin precisión. La solución dada en el nivel IV era muy ingeniosa porque el niño simplificaba el problema no dando a su muñeca más que manzanas. Por último, en el nivel V el niño era capaz de compensar con precisión la adición de manzanas, reduciendo la cantidad de melocotones en la cuantía adecuada.

Este y muchos otros estudios muestran que cada nivel de "incorrección" es un paso necesario en la construcción del nivel siguiente. Las ideas "erróneas" de los niños no son errores a eliminar, sino relaciones a coordinar mejor en el nivel siguiente. Por ejemplo el nivel III es numéricamente erróneo, pero constituye un enorme avance respecto al nivel II y es un paso necesario en la consecución del nivel V.

Inhelder y otros han clasificado la teoría de Piaget sobre el aprendizaje y han vuelto a demostrar lo inadecuado del empirismo. Los niños no adquieren el conocimiento lógico-matemático mediante transmisión, asociación o refuerzo, como creen los empiristas.

Implicaciones pedagógicas de estos estudios

En los experimentos de Inhelder, Sinclair y Bovet, cada niño interactuaba individualmente con un adulto. En estos experimentos los autores demostraron que una pregunta socrática, o presentación de un punto de vista conflictivo sin ninguna enseñanza directa era suficiente para que un niño construyera conocimientos lógico-matemáticos de mayor nivel. Basándose en estos trabajos, Perret-Clermont hizo que los niños confrontaran entre sí sus distintas ideas sin la intervención de un adulto. Mostró que esta confrontación facilita la construcción de ideas más avanzadas por parte de los niños.

En aritmética y más concretamente en la adición, se puede pedir a niños que llegan a sumas diferentes (por ejemplo $8 + 5 = 12$ y $8 + 5 = 14$) que se expliquen mutuamente cómo han llegado a sus respuestas. El consiguiente diálogo, fomentado por el maestro, permitiría que los niños pensaran sobre lo adecuado de una u otra solución, o manera de llegar a una solución. Con este intercambio se conseguirían dos cosas: se estimularía a los niños a pensar con el fin de probar o defender sus soluciones ante sus compañeros, y se impediría que se desarrollara la idea de que las matemáticas son arbitrarias, incomprensibles y destinadas a ser memorizadas. Para que se diera tal intercambio los maestros tendrían que plantearse seriamente la cuestión de cómo crear una atmósfera adecuada para el pensamiento de los niños, en vez de plantearse cómo se dirige una clase para que se den aprendizajes específicos.

En la medida en que los compañeros y los adultos constituyen el entorno social del niño y, por tanto, los objetos de su interacción social, influyen de manera muy importante en la construcción de su conocimiento lógico-matemático. Aportan combustible a la actividad mental del niño por medios indirectos, como por ejemplo diciendo algo que plantee dudas en su pensamiento respecto a lo adecuado de una idea. También hacen cosas que le impulsan a establecer una nueva relación.

Sin embargo la gente no es fuente de feedback para el conocimiento lógico-matemático. Esta fuente reside completamente en el interior del niño y no es otra cosa que la coherencia interna de su sistema de pensamiento. Por ejemplo en la anterior situación de las manzanas y los melocotones, el niño del nivel I, II o III casi siempre era insensible a afirmaciones como "No comprendo (cómo has dado más manzanas y la misma cantidad de frutas)", a menos que estuviera a punto de realizar la siguiente coordinación. Igualmente si se sabe que el objeto a adivinar en el juego del "Sí o no"[3] no es un animal y un niño pregunta "¿Es un perro?", no hay forma de convencerle de que esta pregunta no tiene sentido a menos que ya se encuentre en un nivel cercano al establecimiento de la relación lógica entre "animales", "objetos que no son animales" y "perros".

Como se dijo en el Capítulo I, el conocimiento lógico-matemático se desarrolla mediante la abstracción reflexionante, es decir, mediante la coordinación por parte del niño de las relaciones creadas por él mismo. Así el niño que piensa que hay más perros que "animales" (es decir, gatos) cuando se le enseñan seis perros y dos gatos y se le pregunta si hay más perros o más animales, lo hace así porque está coordinando las relaciones creadas por él mismo entre los objetos. Para él, en este momento, sólo hay perros y gatos porque la clase de orden superior "desaparece" cuando piensa en los perros. Más adelante cuando se vuelve capaz de pensar simultáneamente en todos y en partes (en animales, así como en perros y en gatos), obtiene estos puntos de vista coordinando las relaciones que había creado en una estructura jerárquica. Entonces es capaz de decir, con la fuerza de la necesidad lógica, que hay más animales que perros.

Cuando Piaget indicaba la importancia de coordinar puntos de vista, no hablaba de coordinaciones observables externamente. La confrontación de puntos de vista es importante para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, porque coloca al niño en un contexto social que le incita a pensar en otros puntos de vista en relación al suyo propio. En el estudio de Perret-Clermont, los niños sabían que los vasos A y A' eran iguales. Pero antes de una discusión no se les ocurría que la manera de hacer que A y B tuvieran la misma cantidad era vertiendo primero líquido de A a A'. Al coordinar esta relación (A = A') con A' = B, dedujeron que A = B. Esta era una relación nueva establecida por un niño que se había visto facilitado por el contexto social. Los otros niños que fueron persuadidos por esta idea estuvieron de acuerdo con ella no porque la relación les fuera transmitida, sino porque ellos mismos establecieron una nueva relación (A = B) con las que habían creado anteriormente. Los niños que simplemente no podían entender la explicación que se les daba, eran los que no podían llevar a cabo estas conexiones.

Hay un mundo de diferencia entre la transmisión social y el estímulo del pensamiento mediante la confrontación de puntos de vista. El conocimiento social requiere la transmisión de información a partir de la gente. Posiblemente los niños no pueden llegar a saber por su cuenta que "jinete" se escribe con "j" y que "girar" se escribe con "g". Por otra parte el conocimiento lógico-matemático no requiere este tipo de transmisión. Como vimos en el Capítulo I, los niños construyen por su cuenta el número, la adición y la inclusión de clases mediante la abstracción reflexionante, sin ninguna transmisión social. No hay absolutamente nada de arbitrario en el conocimiento lógico-matemático, y ello explica que el intercambio de puntos de vista sin transmisión de conocimientos sea suficiente para su construcción.

Actualmente la aritmética se enseña por transmisión, como si fuera un conocimiento social. Si, por ejemplo, un niño escribe 4 + 2 = 5, los maestros normalmente tildan esta respuesta de incorrecta. En la medida en que impida que los niños discutan entre sí, este feeback directo procedente de una fuente externa con autoridad no es deseable porque subyuga la iniciativa de los niños y la confianza en su propia capacidad para pensar.

A continuación nos centraremos en dos tipos de situaciones que puede crear el maestro para estimular la actividad mental (abstracción reflexionante) de los niños mediante la interacción social.

Dos tipos de situaciones en la clase

Las situaciones de cada día y los juegos colectivos proporcionan oportunidades para que los niños piensen. (Trate el lector de pensar en otras posibilidades[4].)

Hay muchos momentos en el quehacer diario de una clase en los que se puede plantear una votación. Una vez, cuando una clase trataba de decidir si continuar realizando una actividad o no, 13 niños votaron a favor de continuarla. Inmediatamente un niño dijo: "No hace falta que votemos la otra alternativa". La maestra, Georgia DeClark, que conscientemente buscaba este tipo de problemas numéricos en la actividad de cada día, dedicó un poco de tiempo para preguntar al niño cómo sabía que no hacía falta votar la otra alternativa. El niño explicó que "13 + 13 = 26, y hoy sólo somos 24 niños". Muchos niños no comprendieron este razonamiento y la maestra preguntó a la clase si quería votar la alternativa. Los niños que no habían comprendido se conformaban con valerse de este método empírico. Los que lo habían comprendido no perdieron tiempo en decir "Ya te hemos dicho que los 13 han ganado".

Normalmente los maestros no dedican tiempo a discutir este tipo de comentarios ¡porque temen restar tiempo al programa de estudios! Pero en este tipo de situaciones los niños se hallan emocionalmente implicados y están mentalmente activos, y cuando se sienten implicados y están interesados aprenden más de prisa. Es menos probable que los ejercicios repetitivos y mecánicos que se encuentran en los cuadernos de ejercicios provoquen esta actividad mental.

Los juegos colectivos como la "Doble guerra" pueden estimular a los niños a pensar, a comparar, a debatir. Este juego se juega como el de la "Guerra", excepto que en vez de compararse una carta de cada participante para ver cuál es la más alta, se compara la suma de dos cartas de cada uno de los participantes y quien tiene la suma mayor se queda con las cuatro cartas. A principios de curso pueden usarse las cartas de dos barajas con valores no superiores a 4 (4 x 8 = 32 cartas), pudiéndose ampliar la baraja posteriormente. Se reparten las cartas entre dos jugadores, haciéndose dos montones para cada uno. Los niños descubren las cartas superiores de cada uno de sus montones y comparan las sumas de sus valores. Gana el participante que se ha quedado con más cartas al final.

Este tipo de juegos goza de las siguientes ventajas en comparación con los cuadernos de ejercicios:

- *Dan al niño una razón propia para hacer aritmética.* Una maestra de tercer curso de una escuela pública de una ciudad del interior me dijo una vez que su grupo de alumnos "lentos" no parecía recordar de un día para otro las combinaciones que hacen un total de 7 (6 + 1, 5 + 2 y 4 + 3). Le sugerí el siguiente juego de cartas llamado "Sietes"[5]: Se usan cartas de valor inferior a 6 y se ponen boca arriba las tres primeras cartas de la baraja. Por turnos, los niños tratan de coger dos cartas que sumen 7 en total. Si es imposible llegar a este total (cuando, por ejemplo, salen un 6, un 2 y un 3), el jugador que viene a continuación empieza un montón para una cuarta carta. A medida que se cogen las cartas son reemplazadas por otras cartas de la baraja. Gana el jugador que acaba con más cartas al final. Para sorpresa de la maestra, algunos de los niños volvieron al día siguiente recordando todas las combinaciones. Estos niños no estaban dispuestos a aprender sumas para complacer a la maestra, sino para poder jugar con sus amigos.

- *El feedback proviene de los compañeros y de uno mismo.* Muchos niños y adultos están convencidos de que las matemáticas son especialmente difíciles, incomprensibles y misteriosas. Cuando visito las clases de primer curso, mientras los niños trabajan con sus cuadernos de ejercicios y me detengo a preguntar a uno de los niños cómo ha llegado a una respuesta determinada, ¡casi siempre reacciona cogiendo la goma de borrar y empezando a borrar la respuesta, aunque sea perfectamente correcta! Este comportamiento indica que, ya en primer curso, estos niños han perdido confianza en su propia capacidad para contar. Los niños que no tienen confianza en su propia capacidad para pensar no desarrollan esta capacidad.

  En los juegos, el *feedback* proviene de los otros niños y de uno mismo. Por ejemplo, si un niño no puede ver dos cartas que sumen un total de 7 en el juego de los "Sietes" anteriormente explicado, los otros niños tienen la oportunidad de decir algo. En los juegos, los niños comprueban mutuamente su pensamiento y aprenden que pueden pensar por sí mismos.

Los niños se vuelven mentalmente más activos cuando existe la posibilidad de superar a sus oponentes o de ser superados por ellos. Cuando se usan hojas de ejercicios, los maestros casi siempre han de corregir los mismos errores día tras día. La razón de ello es que el feedback es a la vez distante y tardío. En los juegos, por contra, hay un *feedback* inmediato que proviene directamente de los amigos.

Comentarios y conclusiones

El clima social y la situación que crea el maestro son cruciales para el desarrollo del conocimiento lógico-matemático. Dado que éste es construido por el niño mediante la abstracción reflexionante, es importante que el entorno social fomente este tipo de abstracción. Piaget mantenía que cualquier niño con inteligencia normal es capaz de aprender aritmética. La aritmética es algo que los niños pueden reinventar y no algo que les ha de ser transmitido. Si los niños pueden pensar, no pueden dejar de construir el número, la adición y la sustracción. Si las matemáticas son tan difíciles para muchos niños, normalmente es porque se les impone demasiado pronto y sin una conciencia adecuada de cómo piensan y aprenden. En palabras de Piaget:

> Todo estudiante es capaz de razonar bien matemáticamente si su atención se dirige a actividades de su interés, y si mediante este método se eliminan las inhibiciones emocionales que con demasiada frecuencia le provocan un sentimiento de inferioridad ante las lecciones de esta materia. En la mayoría de las lecciones de matemáticas, la diferencia estriba por entero en el hecho de que se le pide al estudiante que acepte desde el exterior una disciplina intelectual que ya está completamente organizada y que él puede o no comprender, mientras que en un contexto de actividad autónoma se le pide que descubra[6] las relaciones y las ideas por sí mismo y que las vuelva a crear, hasta que llegue el momento en que se sentirá contento de ser guiado y enseñado (1948, p. 98-99).

Si bien los educadores han llegado a reconocer que la enseñanza global a toda la clase no es deseable, se han ido al otro extremo, siempre dentro de la tradición empirista, y se han decantado por la enseñanza individualizada con folletos programados, materiales autocorregibles, máquinas de enseñanza y ordenadores usados como cuadernos de ejercicios.[7] Aislar a los niños para verter conocimientos en su cabeza sistemática y eficazmente no es deseable. En el ámbito lógico-matemático, la confrontación de puntos de vista sirve para acrecentar la capacidad del niño de razonar a niveles progresivamente mayores. Por lo tanto, debería maximizarse la interacción con los compañeros.

En la escuela, a los niños se les pregunta muy pocas veces por lo que piensan honradamente. No se les anima a que tengan opiniones propias y defienden sus puntos de vista. Si un niño piensa que 8 + 5 = 12, debería animarse a defender esta idea hasta que él mismo decida que hay otra solución mejor. Es importante animar a los niños a que tengan sus propias opiniones y dejar que ellos mismos decidan cuándo hay otra idea mejor. Las ideas erróneas han de ser modificadas por el niño. No pueden ser eliminadas por el maestro. Además la naturaleza del conocimiento lógico-matemático es tal que cualquier maestro puede estar seguro de que los niños llegarán a las respuestas correctas si debaten entre sí durante un tiempo suficiente.

Con todo esto no se pretende decir que los niños no aprenden mediante los cuadernos de ejercicios y la transmisión. Ciertamente lo hacen, y normalmente adquieren antes la verdad si se les dice que si la construyen por su cuenta. Pero debemos pensar en el aprendizaje en base a un contexto más amplio que el de la memorización de sumas y la capacidad de obtener puntuaciones altas en las pruebas. En otras palabras, necesitamos considerar la autonomía como meta fundamental de la educación, y a ello dedicaremos el capítulo siguiente.

Notas de la lectura

1 La tarea de conservación de líquidos implica tanto conocimientos físicos como lógico-matemáticos porque requiere razonar lógicamente sobre un contenido físico. La tarea de inclusión de clases implica principalmente conocimientos lógico–matemáticos porque trata de relaciones entre objetos, y las propiedades específicas de los objetos no tienen importancia. Lo importante es la relación partetodo entre una clase y una subclase.

2 Nótese que tanto en esta tarea como en la anterior se le pide al niño que realice algo (en vez de solamente decir algo). Esta acción física es crucial, no porque la manipulación como tal sea importante, sino porque el niño a de pensar activamente cuando ha de producir un resultado deseado. Los niños piensan mucho cuando han de decidir cómo producir un resultado deseado, y es este pensamiento activo lo que es importante en la construcción del conocimiento lógico–matemático.

3 El juego del "Sí o no" (Twenty Questions, veinte preguntas, en el original) se juega de la manera siguiente. Alguien (A) piensa en algo, y el resto de los jugadores trata de adivinar que es haciendo preguntas (A) responde con "sí" o "no". Puesto que no se pueden hacer más de veinte preguntas, lo mejor es plantearselas en función de categorías como "¿Es un animal?". Sí la respuesta es "no", los niños pequeños casi siempre preguntan "¿Es un perro?".

4 Esta es la diferencia entre un "método" de enseñanza y el uso de una teoría científica en la educación. Cuando un libro no da un método o receta, su autor espera que otras personas tengan sus propias ideas sobre cómo usar principios generales en su práctica cotidiana.

5 Véanse más comentarios sobre este juego en los Capítulos 7 y 10.

6 Aquí Piaget hubiera usado "inventar" en vez de "descubrir". Véase en la introducción una discusión sobre el uso de estos términos.

7 Inhelder, Sinclair y Bovet (1974) evitaron el enfoque de la enseñanza programada, cuyo objetivo es provocar respuestas correctas. He aquí lo que dijeron sobre la enseñanza programada: "Va contra la idea de que el niño debe ser intelectualmente activo para que se dé un aprendizaje verdadero" (pág. 26).

Tema 3. *Los juegos colectivos*

LECTURA: UTILIZAR EL CÁLCULO EN LA ESCUELA: LA PROGRAMACIÓN DE UNA SITUACIÓN SIGNIFICATIVA*

PRESENTACIÓN

Tomando como referencia las concepciones actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, Bassedas propone los siguientes principios para la enseñanza.

* *Que los contenidos matemáticos estén ligados a actividades (lúdicas) familiares y significativas para los niños.*
* *Que el aprendizaje matemático signifique para los niños un instrumento intelectual que les permita identificar y resolver situaciones-problema.*
* *Tomar en cuenta los niveles en el proceso de construcción individual de los conceptos matemáticos, proceso ligado a la resolución de situaciones problemas reales y concretas. Estos niveles determinarán los conocimientos previos con los que cuentan los niños. Aspecto que ha de tomarse en cuenta sobre todo en la introducción de un nuevo tema.*
* *Bajo el principio de que los alumnos aprendan unos de otros, es necesario favorecer el trabajo en pequeños grupos. En este sentido se resalta la importancia de la interacción entre iguales para el aprendizaje de los contenidos matemáticos.*

En base a estos principios, Bassedas sugiere trabajar el aprendizaje del cálculo a través de talleres de juego. En el taller los alumnos, agrupados en pequeños equipos, trabajan los contenidos matemáticos a través del juego.

Los juegos se desarrollan en tres sesiones: en la primera sesión se da una presentación del juego y sus normas. En esta primera sesión, la maestra juega una o dos partidas con los niños. En la segunda sesión y con el mismo juego, la maestra toma el papel de observadora activa (para percibir las dificultades y brindar el apoyo necesario para superarlas, asimismo favorece la interacción entre los compañeros). En la tercera y última sesión, los alumnos trabajan solos intercambiando sus puntos de vista.

UTILIZAR EL CÁLCULO EN LA ESCUELA: LA PROGRAMACIÓN DE UNA SITUACIÓN SIGNIFICATIVA

La necesidad de que los conceptos y signos matemáticos estén ligados desde sus inicios a actividades familiares y significativas es la idea que guía esta experiencia didáctica, en que la construcción de los conocimientos matemáticos en niños de 4 a 8 años se realiza en talleres con juegos habituales como la oca, el parchís o los naipes.

Contextualización de la experiencia

El trabajo que presentamos es el resultado de una tarea compartida por diversos profesionales dedicados a la educación. Podría decirse que se trata de una experiencia en la que conjuntamente algunos profesionales hemos buscado diferentes soluciones a los problemas que se planteaban en la práctica educativa. En lo esencial nuestro interés se centraba en buscar nuevos caminos que nos ayudaran a perfeccionar y a avanzar en un intento de hacer más significativo el aprendizaje en las diferentes áreas. En este caso, además, tratábamos de profundizar en la organización de clase mediante rincones o talleres de juego/trabajo, y concretamente en el área de matemáticas, en el aprendizaje de cálculo que se pretende realizar con los alumnos de 4 a 8 años en la escuela.

La experiencia se ha realizado en una escuela pública de una población del cinturón industrial de Barcelona, en la que ya había una tradición de innovación, en el sentido de que se habían iniciado algunas experiencias que habían representado para la escuela la necesidad de replantearse metodologías, objetivos de escuela, organización de los contenidos... (podemos citar en este sentido el

* Eulalia Bassedas. "Utilizar el cálculo en la escuela: La programación de una situación significativa", en: *Comunicación, lenguaje y educación. 11–12*. Barcelona, Ed. Pablo del Río, 1991, pp. 95–112.

planteamiento de la atención a la diversidad en los distintos ciclos, la introducción de métodos de aprendizaje del catalán desde las primeras edades, la introducción de talleres de pretecnología en ciclo medio,...).

Los inicios del trabajo que presentamos surgen en el curso 1986-87 mediante el replanteamiento por parte de las maestras de parvulario, de ciclo inicial y de apoyo para la educación especial, del modo de llevar a cabo el aprendizaje de las matemáticas, que consideraban poco motivador para los alumnos representando un aprendizaje poco funcional; al mismo tiempo había un interés en profundizar en la metodología de rincones/talleres, es decir, en intentar introducir los contenidos propios de las diferentes áreas curriculares, a partir de una organización de clase por talleres. Desde un principio este trabajo se ha realizado conjuntamente entre las maestras de la escuela y la firmante del artículo, que era en aquel momento la psicóloga del Equipo de Asesoramiento Sicopedagógico que atendía la escuela. El trabajo en común se ha planteado siempre como una colaboración en la que cada una de las partes ha tenido algo diferente que aportar al grupo. Así pues, pensamos que trabajos de este tipo representan una investigación compartida por todos los que participan en ella, y en la que se trata de buscar soluciones a los problemas que la práctica educativa cotidiana presenta (Bassedas y otros, 1990).

Aprender aritmética jugando

Las concepciones actuales sobre la enseñanza de las matemáticas ponen el énfasis en la utilidad que deben tener los conceptos y procedimientos adquiridos en la escuela para poder resolver problemas prácticos. Igualmente (M. E. C. 1989), en la escolaridad primaria se propone atender básicamente los aspectos de habilidades de cálculo mental y que los alumnos sean capaces de hacer estimaciones del tipo de operaciones que será necesario realizar para resolver un determinado problema y de los resultados que se encontrarán. Asimismo se incide en la importancia de fomentar una actitud positiva hacia la posibilidad de buscar soluciones a los problemas matemáticos con los que nos enfrentamos, así como buscar situaciones en las que los alumnos puedan entender qué son y para qué sirven las matemáticas.

Es decir, se hace un especial hincapié en que los aprendizajes matemáticos signifiquen para los niños de estas edades un instrumento intelectual más, que les permita identificar y resolver situaciones en un sentido amplio.

Otro de los aspectos a señalar en el planteamiento actual de la psicopedagogía de las matemáticas es la importancia otorgada al proceso de construcción individual de los conceptos matemáticos, proceso ligado a la resolución de situaciones-problema reales y concretas con los que se enfrenta individualmente o en pequeño grupo.

En los ciclos que nos ocupan (educación infantil y primer ciclo de primaria) es necesario incorporar ya estas ideas sobre lo que tiene que ser para los alumnos el aprendizaje de las matemáticas. Igualmente nos interesa resaltar la importancia del modo que la escuela tenga de aproximar a los alumnos a esta área, para el posterior éxito en su aprendizaje. En este sentido nos parece muy interesante otorgar un papel, en el trabajo con niños de estas edades, a los procedimientos informales (Baroody, 1988) que los alumnos hayan construido para resolver las situaciones matemáticas que inevitablemente se han encontrado antes de su entrada en la escuela. La matemática es un lenguaje aplicado a una realidad concreta, y lo que hace la escuela es ayudar a los alumnos a acceder a este lenguaje formal. Pero si entendemos que los niños ya tienen un pensamiento y un conocimiento matemático antes de la entrada a la escuela, será mucho más posible que seamos respetuosos con los conocimientos previos que aportan desde su experiencia extraescolar. Así, es imprescindible que los alumnos aprendan a manipular los signos propios del lenguaje formal, sólo a partir de la comprensión de su significado, hecho que es posible siempre que éstos se hayan utilizado en contextos familiares anteriormente.

Las ideas expuestas sobre el aprendizaje de las matemáticas, nos llevan a señalar que entendemos que en la escuela hay multitud de situaciones en las que pueden aprenderse significativamente los conceptos y procedimientos propios de esta área y en las edades que nos ocupan. Sin embargo es importante delimitar estas situaciones, analizar los conocimientos de los alumnos, e intervenir en consecuencia. En nuestra experiencia esto se ha realizado principalmente en los talleres de juego, pero hay que señalar que se utilizan también otras situaciones de vida cotidiana diarias o puntuales para aproximar a los alumnos al mundo de las matemáticas (votaciones, pasar lista, el calendario...).

La situación de trabajo en talleres que se presenta a los alumnos está centrada en el juego mediante juegos de normas (la oca, el parchís, entre los más conocidos) y los juegos de naipes. Una vez realizado el análisis de estos juegos se ha podido concretar los contenidos de tipo matemático que los alumnos tienen que poner en marchar cuando están realizando una partida. Así, ha sido necesario hacer una selección del material de juego adecuado para cada una de las edades, y ofrecer a los alumnos el material correspondiente que permita ejercitar los conceptos matemáticos adecuados a los conocimientos previos que los alumnos tienen. En este sentido las decisiones están entre presentar un tipo de juego u otro, o un material de juego con variaciones: un dado de cuatro, de seis, de diez o veinte caras, de cifras o con puntos, un tablero con numeración hasta el 10 o el 50, etc.

Es importante señalar que consideramos que los alumnos, durante las sesiones de juegos de mesa, utilizan de un modo totalmente funcional los procedimientos que se espera que aprendan los alumnos de estas edades: contar, leer una cifra, descomponer en diferentes sumandos, aprenderse la serie numérica, hacer adiciones mentalmente, otorgar un ordinal a una serie, entre otros. Así pues, consideramos muy importante este aspecto que nos permite dejar de lado los aprendizajes mecánicos y no significativos de los procedimientos de cálculo.

La situación didáctica: el funcionamiento de los talleres

La unidad didáctica que presentamos se basa en el trabajo por grupos en la clase. Hemos denominado talleres a la agrupación de alumnos que llevan a cabo una tarea en común y mediante la cual se pretende conseguir unos objetivos determinados previamente. Consideramos importante la interacción entre iguales en el sentido de que esto permite que los alumnos aprendan unos de otros, y que establezcan entre ellos los procesos de ayuda, comentario, ánimo que muchas veces la maestra no puede ofrecer a todos por igual. Entendemos que mediante los procesos de interacción entre iguales se establecen lazos entre los diferentes niveles y capacidades de los alumnos que permiten avanzar a todos ellos en un sentido de mayor capacidad en el tema que se trabaja, en nuestro caso el cálculo.

A pesar del énfasis en la importancia de la interacción entre los alumnos no podemos olvidar el papel que juega la maestra en estas situaciones de trabajo en pequeño grupo: su tarea se fundamenta en la observación de los procesos que realizan los alumnos en la resolución de las situaciones planificadas por ella y en la intervención adecuada que procure la ayuda educativa que el alumno requiere para avanzar en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos.

Los juegos están organizados por sesiones diferentes, siempre en situación de trabajo en pequeño grupo (máximo de 6 alumnos). A lo largo de la experiencia hemos visto que ha sido interesante organizar los talleres en base a 3 sesiones diferentes con cada juego.

Así, en la *primera sesión*, se hace una presentación del juego, sus normas y particularidades y seguidamente la maestra juega una partida con ellos.

En la *segunda sesión* con el mismo juego, la maestra pasa a hacer un papel de observadora activa, tratando de hacer una observación de diversos aspectos que tienen que ver con los contenidos que se trabajan durante el juego: estrategias de recuento, dificultades o errores en la suma de los dados o cartas, tipo de interacción entre los alumnos del grupo. A partir de la observación de estos aspectos la maestra interviene o no en el sentido de permitir el avance del grupo o del alumno en particular. Para llevar a cabo este trabajo con el mayor conocimiento de los aspectos a observar, se han confeccionado unas pautas u hojas de observación que son de gran ayuda en este proceso.

Más adelante se explicarán algunas de estas pautas en juegos concretos.

En la *tercera sesión*, que representa la última partida con el juego iniciado dos sesiones antes, se pasa, una vez finalizada, a rellenar en grupo, individualmente, con la ayuda de la maestra o sin ella (dependiendo del momento del juego, del curso y del grupo de alumnos) lo que hemos denominado la ficha-resumen. En ella se trata de hacer un recordatorio por escrito de algunos aspectos que se han realizado mediante la práctica durante el juego. Es en este momento cuando se inicia el paso al papel de algunos contenidos puestos en práctica durante el juego: escritura de la numeración, resolución de pequeños problemas planteados durante el juego mediante la adición o sustracción con los dados o cartas, descomposición de los números,... Es un momento en que pueden darse situaciones de discusión entre los alumnos en relación a los conceptos matemáticos trabajados hasta el momento en el juego.

A lo largo del curso, se repite semanalmente esta organización hasta que todos los alumnos han realizado todos los juegos que se han programado en los talleres para aquel curso. Se acostumbra a realizar un promedio de diez juegos diferentes en cada uno de los niveles a lo largo del curso escolar. Las observaciones realizadas durante los años en los que se han utilizado los juegos de este modo, nos permiten afirmar que durante un curso puede verse una gran variación en las estrategias de cálculo utilizadas por los alumnos. Podemos asegurar que la ayuda aportada por la maestra —basada en una observación sistemática— y por los compañeros es muy importante a la hora de favorecer el avance en la adquisición de los procedimientos de cálculo. En este sentido podemos señalar que la observación de los procesos que realizan los alumnos es un instrumento básico en la evaluación formativa de la situación de aprendizaje en la que se encuentran.

Descripción de los juegos

Con el fin de ejemplificar estas tres sesiones descritas, pasaremos a explicar el modo como se plantean en dos juegos. En primer lugar se explicará un juego de naipes tal como se utiliza en la clase de parvulario 5 años. A continuación se comentará un juego de normas con dados utilizado en Segundo de E. G. B.

a) El primer juego

El primer juego se denomina "Sietes"[1] y consiste en un juego de cartas en el que los niños tienen que formar el número 7 con una carta de las que se les ha repartido y todas las demás que están encima de la mesa y de las que otros se han descartado. Se trata pues de un juego en el que básicamente se trabaja la descomposición del número.

La *observación* en este juego se puede organizar en base a tres momentos:

1) Antes del juego: modo de repartir las cartas (igual número de cartas a cada niño/niña, reparte de uno en uno, de dos en dos, seguimiento de un orden en el reparto...).
2) Durante el juego: lectura del número de las cartas (reconoce automáticamente el número y le otorga la cantidad correspondiente, tiene que reseguir con el dedo el número de objetos dibujados en la carta, cuenta los objetos con acciones visibles-golpes de cabeza, dedos...); adición de los números para hacer 7 (cuenta el número de objetos de su carta y el de otras hasta conseguir llegar al 7, no necesita contar el número de su carta y busca contando directamente en las otras cartas, busca directamente el número que le falta sin necesidad de contar con acciones visibles, se equivoca sistemáticamente en la adición de los números...).
3) Después del juego: recuento del número de veces que ha completado 7; reconocimiento del ganador.

La *ficha resumen* realizada para este juego consta de los siguientes apartados (ver figura 1 página siguiente):

Figura 1

Nombre del alumno: .... Fecha del juego: ....
Nombre del juego: ....
Número de niños que han jugado: ....
Número de veces que cada uno ha podido completar 7: ....
Expresión gráfica de las diferentes combinaciones realizadas (de dos o de tres sumandos): ....
....
....
Nombre del compañero ganador: ....

El aprendizaje el cálculo mediante los juegos en pequeño grupo

Los aspectos que podemos señalar como más positivos en la organización del aprendizaje del cálculo mediante los talleres de juego los podemos resumir en los siguientes:

— los alumnos realizan un aprendizaje funcional de la numeración y de los diversos conceptos y procedimientos del cálculo : utilizan el número y las operaciones matemáticas para resolver una "situación problema" que tienen interés en resolver;

— en este tipo de situaciones de aprendizaje se parte y se respetan los conocimientos de matemática informal (Baroody, 1988) que los alumnos tienen en el momento de empezar la escuela, y se puede hacer un paso progresivo a la matemática formal que es la que se aprende en la escuela y que es necesaria para el aprendizaje posterior de conceptos matemáticos;

— el maestro puede llevar a cabo una observación de las estrategias, "errores", dificultades, procedimientos utilizados por los diferentes alumnos y hacer intervenciones que sean claramente una ayuda educativa para ellos, ya que se sitúa justamente en la franja adecuada de ayuda que el maestro debe dar a sus alumnos para ayudarles a construir los conocimientos (Coll, Solé, 1989);

— la formación de grupos de alumnos en este tipo de tarea es muy beneficioso, ya que cada uno de ellos utiliza las estrategias que ha podido llegar a construir. Los compañeros aprenden unos de otros mediante la confrontación de diversos procedimientos, de diferentes experiencias extraescolares, de diversos niveles de capacidad. Así pues, consideramos que mediante este tipo de organización de clase permitimos la existencia de diversidad en los grupos y existe la posibilidad de construcción a diferentes ritmos de los conceptos matemáticos que están implicados en los juegos;

— los alumnos consiguen una agilidad importante en el cálculo mental utilizando diversas estrategias de descomposición de los números, y al mismo tiempo tienen la posibilidad de iniciarse en las primeras formalizaciones del lenguaje matemático mediante la utilización de signos representativos por escrito.

Nota de la lectura

[1] Este juego, así como otros de los utilizados en la clase, está extraído de la obra de C. Kamii (1986), citado en la bibliografía.

LECTURA: ACTIVIDADES PARA ESTIMULAR EL PENSAMIENTO NUMÉRICO*

PRESENTACIÓN

Kamii y DeClark ofrecen dos juegos colectivos ("Sietes" y "Destapar") en los que se estimula el cálculo mental de la suma, dichos juegos son susceptibles de ser utilizados en el aula de preescolar a través de los talleres de juego propuestos por Bassedas (véase en la Antología Básica el artículo "Utilizar el cálculo en la escuela: la programación de una situación significativa").

El lector podrá encontrar en la Antología Complementaria otros juegos propuestos por Kamii en el texto: "Situaciones que el maestro puede utilizar en la escuela para "enseñar" el número".

SIETES

Se usan veinticuatro cartas numeradas del 1 al 6 (6 x 4 = 24). Todas las cartas se reúnen en un montón para "pillar" y se retiran las tres de arriba, que se colocan en fila encima de la mesa, boca arriba. El fin del juego es encontrar dos cartas que hagan un total de siete (6 + 1, 5 + 2 o 4 + 3). Cuando le llega el turno, cada jugador coge dos cartas, si es posible, y las reemplaza con dos del montón. Si con las nuevas cartas no puede hacer la suma de siete, pasa el turno. Cada vez que un jugador no pueda coger dos cartas que hagan un total de siete, el jugador siguiente toma la carta superior del montón y trata de sumar siete con ella. Si no puede, empieza a hacer un montón de descarte. En cuanto un jugador puede coger dos cartas, el montón de descarte vuelve a ponerse, por debajo, en el montón para "pillar". Gana quien acaba con más cartas.

Este juego gozó de poca popularidad porque 5 + 3 es una de las combinaciones más difíciles de recordar, y 5 + 2 tampoco es fácil (véase la tabla 5. 1). Lo presentamos aquí para ilustrar un principio en base al cual inventar otros juegos que impliquen la partición de conjuntos. El principio consiste en usar cartas con números hasta n-1, siendo n el conjunto sobre el cual efectuar la partición, y levantar tres cartas como en el juego de los "Sietes", nueve cartas como en el juego de los "Dieces" con cartas, o cualquier otro número intermedio. Por ejemplo si el conjunto es de 8, se usan cartas numeradas hasta el 7 y pueden levantarse hasta cinco cartas.

Este juego no funcionó bien con los niños de primer curso pero era excelente para unos niños de tercer curso algo "lentos" que parecían incapaces de recordar sumas. Su maestra corregía los mismos errores en las hojas de ejercicios día tras día, y un día decidió introducir el juego de los "Sietes". Para su sorpresa, unos cuantos de estos niños volvieron al día siguiente recordando todas las combinaciones. Los niños que no estaban dispuestos a memorizar sumas para complacer a su maestra, estaban dispuestos a ello para poder jugar de forma inteligente con sus amigos. Los que no conocían las combinaciones de memoria, se vieron motivados a emular a los jugadores más hábiles.

DESTAPAR

Se trata de un juego hecho a mano que se juega con el tablero de la figura 1. Se usan dos dados numerados del 0 al 5, y 20 fichas de póker. El juego empieza con todos los números tapados con las fichas. Los jugadores, que se sientan uno frente a otro, se turnan para echar los dados. Cada jugador determina la suma de los dos números que hayan salido y destapa el número correspondiente de su lado del tablero. Gana el primer jugador que destapa todos los números de su lado.

* Constance Kamii y G. DeClark. "Actividades para estimular el pensamiento numérico", en: *El niño reinventa la aritmética.* Madrid, Ed. Visor, 1986. pp. 151–152.

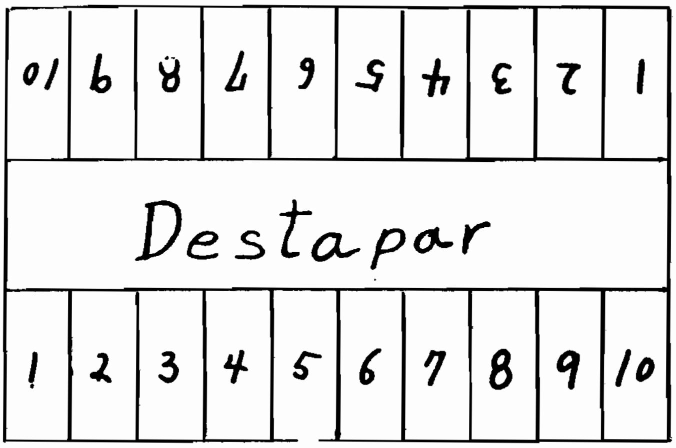


Figura 1.
El tablero usado en "Destapar"

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

BAROODY, A. *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid, Ed. Visor, 1988.

BASSEDAS, E. "Utilizar el cálculo en la escuela: la programación de una situación significativa". en: *Comunicación, lenguaje y educación*. 11-12. Barcelona, Ed. Pablo del Río, 1991.

BOLLÁS, P. *Representación gráfica*. México, UPN, 1995. (mimeo).

BOLLÁS, P. y M. Sánchez. "De la cualidad a la cantidad en la representación gráfica de las cantidades". en: *Educación matemática. vol. VI, no. 3*. México, Ed. Iberoamericana, 1994.

BRISSIAUD, R. *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid, Ed. Visor, 1989.

BUSTOS, V. y P. Bollás. *La metáfora del andamiaje*. México, 1995. (mimeo).

HUGHES, M. *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Ed. Paideia, 1987.

KAMII, C. *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid, Ed. Visor, 1986.

LABINOWICZ, E. *Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking. A piagetian approach*. Addison-Wesley Publishing Company, 1985. (Trad. por Mario A. Sánchez R.).

LERNER, Delia. "Concepto de número. Aspecto didáctico", en: *Clasificación, seriación y concepto de número*. Venezuela, Consejo Venezolano del Niño, 1977 (división de primaria y segunda infancia).

NEMIROVSKY, M. y A. Carvajal. *Contenidos de aprendizaje. Concepto de número*. México, SEP-UPN, 1987.

PALACIOS, J. "Reflexiones en torno a las implicaciones educativas de la obra de Vigotski", en: Siguán, M. (coord.). *Actualidad de Lev s. vigotski*. Barcelona, Ed. Anthropos, 1987.

GÉNESIS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL NIÑO DE EDAD PREESCOLAR

ANTOLOGÍA BÁSICA

PARTICIPARON EN SU ELABORACIÓN

RESPONSABLE
PEDRO BOLLÁS GARCÍA
UNIDAD AJUSCO

COLABORADOR
VIANEY BUSTOS PINEDA

COORDINACIÓN DEL PROYECTO
XÓCHITL LETICIA MORENO FERNÁNDEZ

Esta obra se terminó de imprimir en marzo de 1997
en los talleres de EDIMSA, S.A. de C.V.,
Avenida Tláhuac 43-F, col. Santa Isabel Industrial,
C.P. 09870, México D.F.

Se tiraron 1920 ejemplares.