ANTOLOGÍA BÁSICA

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA ESCUELA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN PLAN 1994

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Primera edición, México 1994

Universidad Pedagógica Nacional
Carretera Ajusco No. 24
Col. Héroes de Padierna
Delegación Tlalpan, C.P. 14200
México 22, D. F.

Impreso en México

ISBN 968-29-8554-4 (Obra C.)
968-29-8555-2

ESTE MATERIAL SE ELABORÓ CON EL APOYO DEL
FONDO PARA MODERNIZAR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

ÍNDICE

PRIMERA UNIDAD

¿CÓMO SE CONSTRUYE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO?

LECTURA: ¿POR QUÉ RECOMENDAMOS QUE LOS NIÑOS REINVENTEN LA ARITMÉTICA?*

¿POR QUÉ RECOMENDAMOS QUE LOS NIÑOS REINVENTEN LA ARITMÉTICA?

¿Por qué queremos que los niños reinventen la aritmética cuando podemos enseñarles fácilmente a sumar, restar, multiplicar y dividir? La respuesta a esta pregunta se presenta al final de este capítulo y se desarrolla a lo largo de todo el volumen. Comenzaré citando unas líneas extraídas del libro *Mathematics Today*, texto de matemáticas publicado por Harcourt Brace Jovanovich, para ilustrar la teoría en la que actualmente se basa la enseñanza de las matemáticas. A continuación, presentaré la teoría de Jean Piaget relacionada con la aritmética elemental, criticaré lo supuestos tradicionales sobre la enseñanza de las matemáticas y explicaré por qué creo que los niños ahorran trabajo a largo plazo si reinventan su propia aritmética en lugar de aprender a emitir respuestas correctas.

Los autores del libro de texto de la serie *Mathematics Today* enuncian en el manual del profesor de segundo curso que su programa «incluye todos los hechos numéricos básicos y técnicas de cálculo», y que «todas las operaciones básicas se presentan con modelos y algoritmos de dificultad progresiva, acompañados a menudo de útiles ilustraciones». (Abbott y Wells, 1985, pág. 126). Tras describir de este modo su método de enseñar aritmética, los autores relacionan enseñanza con el proceso de aprendizaje de los niños de la siguiente manera:

- «En Mathematics Today, las lecciones han sido cuidadosamente estructuradas para garantizar un buen aprendizaje. El aprendizaje comienza siempre en el nivel concreto, después pasa al semiconcreto, al simbólico y, finalmente, a los niveles abstractos. Así, los alumnos aprenden en primer lugar a contar objetos reales; después cuentan objetos en dibujos; y por último, generalizan relaciones numéricas» (pág. 126).

El párrafo anterior se basa en supuestos empíricos, según los cuales nuestro conocimiento tiene su origen en el ambiente y los niños lo adquieren interiorizándolo a través de los sentidos. Sin embargo, la investigación y la teoría de Piaget, llamada constructivismo, ha demostrado que los niños adquieren los conceptos y las operaciones numéricas construyéndolos internamente, no interiorizándolos a partir del ambiente. Esta afirmación se explica en la sección siguiente, con una tarea piagetiana que aclara dicho proceso.

La adquisición de conceptos numéricos

La tarea siguiente es una versión simplificada de varias tareas descritas por Inhelder y Piaget (1963). En ellas se emplean dos vasos idénticos, y de 30 a 50 canicas (fichas, bolas u otros objetos). Un vaso es para el niño y el otro para el investigador. Éste pide al niño que deje caer una canica en su vaso cada vez que él introduzca una en el suyo. Después de haber metido cinco canicas siguiendo esta correspondencia biunívoca, el adulto dice: «Ahora vamos a parar y quiero que observes lo que voy a hacer». Introduce una canica en su vaso y propone al niño continuar. Cada uno introduce unas cinco canicas más en su vaso, manteniendo este orden biunívoco, hasta que el adulto dice, «Ya vale».

Hasta ese momento ha ocurrido lo siguiente:

Adulto: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Niño: 1 1 1 1 1   1 1 1 1 1

Entonces el adulto pregunta, «¿Tenemos el mismo número (o cantidad) o tú tienes más o yo tengo más?».

Normalmente los niños de cuatro años responden que los dos vasos contienen la misma cantidad. Cuando preguntamos, «¿Cómo sabes que tenemos la misma cantidad?», el niño explica,

* Constance Kamii. "¿Por qué recomendamos que los niños reinventen la aritmética?," en: *Reinventando la aritmética II*. Aprendizaje-visor, Madrid, 1992. pp. 21-33.

«Porque veo que los dos tenemos la misma cantidad». «Sin embargo, algunos responden que *ellos* tienen más, y cuando se les pregunta cómo saben que tienen más, su explicación es bien sencilla, «Porque sí».

El adulto continúa preguntando, «¿Recuerdas cómo hemos ido introduciendo las canicas?», y el niño de cuatro años, por lo general, repite los pasos empíricos correctamente: «Me has dicho que pare y tú has metido otra canica en el vaso. Has metido sólo una y yo te he mirado porque me has dicho que esperara. Después hemos seguido». En otras palabras, los niños de cuatro años recuerdan todos los hechos empíricos correctamente y basan sus juicios de igualdad en la apariencia empírica de las cantidades.

Ahora bien, a los cinco o seis años, la mayoría de los niños deducen lógicamente que el adulto tiene una canica más en el vaso. Si se les pregunta que cómo saben que el adulto tiene una más, reproducen exactamente los mismos hechos empíricos que los niños de cuatro años.

Si el niño responde que el vaso del adulto tiene una canica más, el investigador le formula la siguiente pregunta: «Si continuáramos echando canicas todo el día (o toda la noche) de esta manera (con una correspondencia biunívoca), ¿crees que al final tendríamos el mismo número, o *tú* tendrías más que yo o yo más que tú?». Ante esta pregunta, los niños de cinco y seis años se dividen en dos grupos. Unos responden del modo que lo haría el adulto, es decir, *siempre* habrá una canica más en el vaso del adulto. Otros hacen una afirmación empírica de este tipo: «No lo sé porque todavía no lo hemos hecho», o «no tienes canicas suficientes para seguir echando en el vaso todo el día».

Esta tarea es uno de los inmunerales experimentos piagetianos que demuestran la diferencia entre el conocimiento empírico y el conocimiento lógico-matemático. (Pueden encontrarse otros ejemplos en Kamii, 1985, Capítulo1).

Los tres tipos de conocimientos de Piaget

El mejor modo de clarificar la diferencia entre el conocimiento empírico y el conocimiento lógico-matemático es revisando la distinción que estableció que estableció Piaget (1932/1965, 1950a, 1950b, 1950c, 1967/1971) entre los tres tipos de conocimiento: físico, lógico-matemático y social (convencional). Para establecer la diferencia entre estos tres tipos de conocimiento, Piaget se basó en sus fuentes y modos de estructuración.

Conocimiento físico y conocimiento lógico-matemático

El conocimiento físico es el conocimiento de los objetos de la realidad externa. El color y el peso de una canica son ejemplos de propiedades físicas que *pertenecen* a los objetos de la realidad externa y que pueden conocerse empíricamente mediante la observación. Saber que una canica se introducirá en el vaso si la dejamos caer es también un ejemplo de conocimiento físico.

Por otro lado, el conocimiento lógico-matemático consiste en la *relación* creada por cada individuo. Por ejemplo, cuando se nos muestra una canica azul y otra roja y pensamos que son «diferentes», esta diferencia es un ejemplo del conocimiento lógico-matemático. Las canicas son objetos observables, pero la *diferencia* entre ellas no lo es. La diferencia es una *relación* que cada individuo crea mentalmente al colocar ambos objetos en esta relación. La diferencia no está *en* la canica roja ni *en* la canica azul y si la persona no estableciera esta relación, la diferencia no existiría para ella.

Otros ejemplos de las relaciones que el individuo puede establecer entre estas mismas canicas son «iguales», «el mismo peso» y «dos». Es tan correcto decir que las canicas azul y roja son iguales como decir que son diferentes. La relación que el individuo establece entre los objetos es decisión suya. Desde un punto de vista las dos canicas son diferentes, desde otro, son iguales. Si la persona quiere comparar el peso de las dos canicas, es muy probable que diga que los objetos son «iguales» (en peso). Si, por otro lado, quiere pensar en los objetos numéricamente, dirá que son «dos». Las dos canicas son observables, pero el número «dos» no lo es. El número es una relación creada mentalmente por cada persona[1].

Por tanto, el conocimiento físico es un conocimiento empírico que tiene su fuente en los objetos. Por otro lado, el conocimiento lógico-matemático no es un conocimiento empírico, ya que sus fuentes están en la mente de los individuos, cada individuo debe crear esta relación, puesto que las relaciones «diferentes», «igual» y «dos» no existen en el mundo exterior y observable. El niño progresa en la construcción de su conocimiento lógico-matemático coordinando las relaciones simples que crea entre los objetos. Por ejemplo, una vez que ha coordinado las relaciones «igual» y «diferentes», es capaz de deducir que en el mundo hay más canicas que las rojas. Del mismo modo, una vez que ha coordinado la relación entre «dos» y «dos», llega a ser capaz de deducir que 2 + 2 = 4, y que 2 X 2=4.

El conocimiento social

Las fuentes últimas del conocimiento social son las convenciones establecidas por las personas. Ejemplos del conocimiento social son que la Navidad se celebre el 25 de diciembre, que un árbol se llame «árbol» y que las mesas no sean para subirse sobre ellas. La característica principal del conocimiento social es su naturaleza eminentemente arbitraria. El hecho de que un árbol se llame «árbol» es un ejemplo de la arbitrariedad del conocimiento social. En otro idioma, el mismo objeto recibe otro nombre, dado que no existe una relación física o lógica entre el objeto y su nombre. Por consiguiente, para que el niño adquiera el conocimiento social es indispensable que reciba información de los demás.

Implicaciones para la aritmética

Volviendo a la tarea de las canicas y los vasos, saber que las canicas quedarán en los vasos como entidades separadas (en lugar de convertirse en una cantidad continua, como dos gotas de agua) es un ejemplo de conocimiento físico, empírico. Por otro lado, términos como *más, uno, dos, tres y cuatro,* que los niños utilizan a menudo, pertenecen al conocimiento social. Sin embargo, el pensamiento numérico, que constituye la parte más importante de la tarea de las canicas, tiene su origen en la mente del niño.

La distinción entre los tipos de conocimiento es esencial para explicar por qué la mayoría de los niños de cuatro años afirman que los dos vasos contienen la misma cantidad. Cuando los niños no han construido mentalmente las relaciones lógico-matemáticas de los números, todo lo que perciben del experimento es conocimiento físico, empírico. Ésta es la razón por la que los niños de cuatro años recuerdan el hecho empírico de dejar caer las canicas excepto una siguiendo una correspondencia biunívoca. Sin embargo, esta correspondencia biunívoca es sólo empírica y los niños de cuatro años juzgan la cantidad de canicas también empíricamente. Por esta razón dicen que en los dos vasos hay la misma cantidad y explican, «*Veo* que tienen la misma cantidad».

Sin embargo, a los cinco o seis años, la mayor parte de los niños han construido la relación lógico-matemática de la correspondencia biunívoca y pueden deducir a partir de los hechos empíricos que el experimentador tiene una canica de más. Lleva muchos años construir este sistema de relaciones, y que un niño posea conceptos numéricos hasta el diez o el quince no implica necesariamente que posea conceptos de 50, 100 o más. Por esto muchos niños de cinco o seis años que juzgan que el experimentador tiene una canica más vuelven al conocimiento empírico cuando se les pregunta qué pasaría si continuaran echando canicas durante mucho tiempo. Más adelante, cuando construyen un sistema de números mayor, llegan a ser capaces de deducir, como nosotros, que *siempre* habrá una canica más en el vaso del experimentador, independientemente de la cantidad de canicas que se introduzcan siguiendo la correspondencia biunívoca.

Tradicionalmente, los profesores de matemáticas no han establecido la diferencia entre los tipos de conocimiento y han creído que la aritmética debe interiorizarse a partir de los objetos (como si fuera conocimiento físico) y de las personas (como si fuera conocimiento social). Pasan por alto la parte más importante de la aritmética, el conocimiento lógico-matemático.

Dos nociones sobre cómo aprenden los niños aritmética

Nuestras ideas sobre la enseñanza de la aritmética dependerán de cómo entendemos que los niños aprenden. En la medida en que comprendamos cómo aprenden, podremos intentar facilitar su aprendizaje. Sin embargo, si nuestra teoría está equivocada, nuestra metodología interferirá directamente en su proceso de aprendizaje. Por consiguiente, vamos a examinar las dos nociones existentes sobre este tema.

La teoría de aprendizaje del método *«Mathematics Today»*, citada al comienzo de este capítulo, es compartida por la totalidad de los autores de otros métodos de matemáticas. El aprendizaje se divide en cuatro niveles básicos:

1. Nivel concreto: contar objetos reales.
2. Nivel semiconcreto: contar objetos en dibujos.
3. Nivel simbólico: emplear números escritos.
4. Nivel abstracto: generalizar relaciones numéricas.

Esta teoría se basa en supuestos empíricos, según los cuales todo conocimiento se adquiere a partir de la interiorización del exterior. Comienza porque el niño aprenda a contar objetos reales. No obstante, contar es fundamentalmente un conocimiento social más que lógico-matemático. Por esto un niño de cuatro años tal vez conozca todas las palabras necesarias para contar, pero las emplea para representar su conocimiento prelógico o preoperacional. Más adelante pondré dos ejemplos.

En mi opinión, los maestros tradicionales no diferencian entre abstracción y representación, por un lado y entre representación con símbolos personales y con signos-convencionales, por otro. Pasaré a comentarlos en este orden.

Abstracción

Según Piaget (1950, 1967/71), existen dos tipos de abstracción: empírica o simple y reflexionante o constructiva.

En la abstracción empírica, todo lo que el niño hace es concentrarse en cierta propiedad del objeto e ignorar las demás, es decir cuando abstrae el color de una canica, simplemente ignora el resto de las propiedades, por ejemplo, el peso y el material del que está hecha.

Por el contrario, la abstracción reflexionante o constructiva implica la construcción, por parte del niño, de relaciones entre los objetos. Como he señalado antes, las relaciones no existen en la realidad exterior. La similitud o diferencia entre dos canicas existen únicamente en la mente de aquéllos que las crean mentalmente.

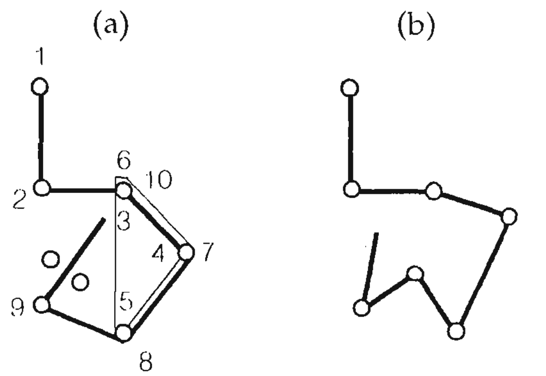
El lector habrá notado que la abstracción empírica está implicada en la adquisición del conocimiento físico por parte del niño, mientras que la abstracción constructiva está implicada en la adquisición del conocimiento lógico-matemático[2].

Los profesores de matemáticas tradicionales dicen que un número es una propiedad de un conjunto, por tanto, un conjunto de ocho objetos tiene la propiedad «ocho». En mi opinión, éste es un concepto equivocado. Los conjuntos no hacen nada por sí mismos, como «tener» una propiedad. La acción de «tener» la realiza el niño, que construye conceptos numéricos y los impone a los conjuntos. Esta afirmación puede aclararse presentando la teoría del número de Piaget, en la que sugiere que los niños construyen conceptos numéricos sintetizando dos tipos de relaciones que crean: orden e inclusión jerárquica. (Gréco, Grize, Papert y Piaget, 1960).

Examinaremos primero la relación de orden. Todos los maestros de niños pequeños han observado su tendencia natural a contar objetos saltándose algunos y contando otros más de una vez. Con ocho objetos, por ejemplo, un niño de cuatro años que sepa contar del 1 al 10 puede acabar asegurando que hay 10 cosas tras haberlos contado del modo que muestra la Figura1.1a. Esta tendencia indica que los niños no sienten la necesidad lógica de poner los objetos en una relación ordenada para asegurarse de que no se saltan ninguno o de que no cuentan el mismo dos veces. El único modo en que un individuo se asegura de que no se salta o repite ningún objeto es estableciendo entre ellos una relación de orden. No hace falta ordenarlos *espacialmente,* lo importante es que el individuo los ordene *mentalmente*, como muestra la Figura 1.1b.

FIGURA 1.1

(a) Contar sin ordenar los objetos y (b) ordenando mentalmente los mismos objetos.



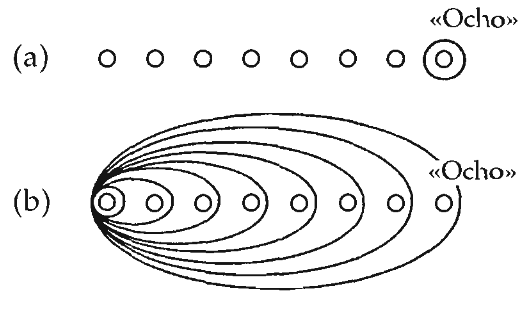
(De „El número en preescolar y jardín de infancia„, C. Kamii, 1982. Asociación nacional para la educación de los niños pequeños).

Aunque lo único que los niños hicieran con los objetos fuera ordenarlos, tampoco sabrían cuantificar la colección numéricamente. Por ejemplo, después de contar ocho objetos ordenados como se muestra en la Figura 1.2a, los niños de cuatro años generalmente afirman que hay ocho. Si les pedimos que nos los muestren, en ocasiones señalan el último de la colección (el octavo objeto). Esta conducta indica que para esos niños las palabras *uno, dos, tres, etc.* son nombres de elementos individuales de una serie, como *lunes, martes, miércoles,* etc. Cuando se les preguntan cuántos hay, creen que se espera que digan la última palabra de la serie. Para cuantificar la colección de objetos numéricamente tienen que colocarlos en una relación de inclusión jerárquica. Esta relación, que aparece en la Figura 1.2b, quiere decir que los niños incluyen *mentalmente* «uno» en «dos», «dos» en «tres», «tres» en «cuatro», etc. Cuando se les presenta ocho objetos sólo pueden cuantificar la colección numérica si los incluye en una única relación, sintetizando de este modo el orden y la inclusión jerárquica.

Espero haber demostrado mi afirmación de que los conjuntos no «poseen» una propiedad numérica y que no existe lo que se denomina concepto numérico en el llamado nivel concreto, según afirman en el método *«Mathematics Today»*. Los conceptos numéricos son siempre abstractos porque los crea cada niño mediante la abstracción constructiva. Tras haber argumentado que no existe el nivel concreto en el aprendizaje de los números, pasaré a tratar los niveles simbólicos y semiconcretos, igualmente equívocos. Para ello es preciso acudir a la teoría de la representación de Piaget.

FIGURA 1.2

El término ocho empleado en (a) para referirse sólo al último elemento y en (b) para referirse a todos los elementos con la estructura de inclusión jerárquica.



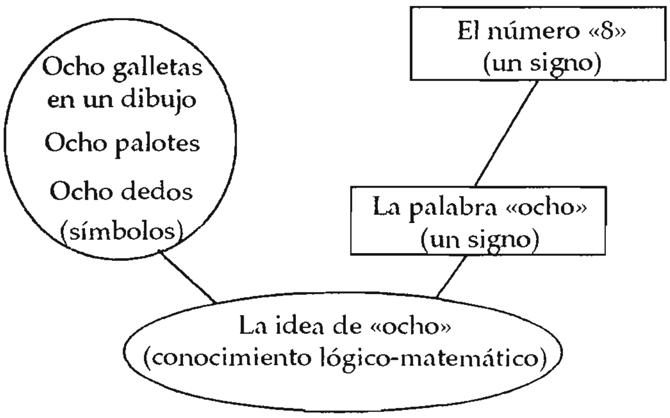
(De «Los niños reinventan la aritmética», C. Kamii, 1985, Nueva York, Teachers College Press).

Representación

La primera puntualización que debe hacerse sobre la representación es que, según Piaget (Piaget y Inhelder, 1966/69), la palabra *ocho* o un dibujo de ocho galletas no representa la idea de «ocho». Representación es lo que hacen los niños, no lo que hace la palabra o el dibujo. Si los niños han construido la idea de "ocho", mediante la abstracción constructiva, representarán esta idea para sí mismos con la palabras *ocho* o un dibujo de ocho objetos. Si no, asignarán un significado prenumérico a la palabra o dibujo.

La Figura 1.3 ilustra la distinción que estableció Piaget (Piaget y Inheler, 1966/69) entre símbolos y signos. Esta distinción muestra que no existe el supuesto nivel semiconcreto en el aprendizaje de los números. Ejemplos de símbolos son los dibujos, palotes y dedos empleados como instrumentos para contar. Las características de los símbolos son 1) que presentan un parecido figurativo con la idea que representan y 2) que cada niño pueda inventarlos. Los símbolos no requieren que otras personas los expliquen para comprenderlos y los niños de cuatro años inventan símbolos como los que se in- cluyen en la Figura 1.4 (Sinclair, Siergist y Sinclair, 1983). Una vez que los niños han construido la idea de «tres», de «ocho», mediante la abstracción constructiva, inventan sus propios símbolos para representar este conocimiento lógico-matemático. Por otra parte, los signos, como la palabra ocho, pertenecen al conocimiento social (convencional) y requieren que otras personas lo transmitan. Los signos, por tanto, surgen de fuentes diferentes y no son más «avanzados» que los símbolos. Los niños pueden emplear simultáneamente símbolos y signos para expresar el conocimiento matemático.

FIGURA 1.3.



Ejemplos de distinción piagetiana entre símbolos y signos y su relación independiente con la expresión del conocimiento lógico-matemático.

Símbolos inventados por un niño de cuatro años para representar ideas numéricas.

Se deduce de esta exposición que todos los dibujos de los libros y hojas de trabajo son innecesarios para los niños que están aprendiendo aritmética, puesto que no extraen el conocimiento lógico-matemático de los dibujos. Si necesitan algo para contar, elaboran sus propios símbolos dibujando palotes o empleando los dedos.

No abordaré el tercer nivel o nivel simbólico propuesto en la terminología del método *Mathematics Today*. Como muestra la Figura 1.3, los numerales se crearon para representar palabras habladas. Puede entenderse con esa figura que si la palabra «ocho» obtiene su significado del conocimiento lógico-matemático de cada individuo, al numeral escrito 8 le ocurre otro tanto. En conscuencia, el llamado nivel simbólico de los numerales escritos (en la terminología de *Mathematics Today*) no es un nivel que se forma a partir del llamado nivel semiconcreto de los dibujos.

Por fin llegamos al último nivel propuesto por los profesores de matemáticas tradicionales, el nivel abstracto de generalización de las relaciones numéricas. La tarea de dejar caer canicas en dos vasos, así como otras muchas tareas, demuestra que el niño construye relaciones numéricas mediante la abstracción constructiva, y no previo paso por el nivel semiconcreto o simbólico. Algunos niños de cinco o seis años que no cuentan bien o no identifican los numerales dicen que siempre habrá una canica más en el vaso del experimentador, aunque se echaran las canicas en los dos vasos siguiendo una correspondencia biunívoca hasta el infinito. Como muchos maestros tradicionales de matemáticas no han oído hablar de la abstracción constructiva o han preferido ignorarla, se centran únicamente en la representación y pasan por alto la importancia de la abstracción.

"Hechos numéricos"

Hemos visto al principio del capítulo que el método *Mathematics Today* afirma que presentan todos los «hechos numéricos básicos y técnicas de cálculo» (Abbott y Wells, 1985, pág. T26). Espero haber demostrado que no existe nada parecido a un «hecho numérico». Un hecho es observable y es conocimiento empírico, pero los conceptos numéricos no son observables. Si «ocho» es una relación creada por cada niño, 8 + 8 es una relación basada en dos relaciones y también creada mentalmente por cada niño, mediante la abstracción constructiva.

De acuerdo con Piaget, (Piaget y Inheler, 1948/67) incluso los hechos se leen de modo diferente según la fase de desarrollo en que se encuentre el niño. Esta afirmación está ilustrada en el experimento sobre la memoria descrito en mi volumen anterior (Kamii, 1985, pág. 69-72).

En ese experimento, los niños de edades comprendidas entre los cuatro y los seis años y medio, observaban un modelo que consistía en tres hileras de seis fichas azules. Las tres hileras constaban de los siguientes subgrupos: 3 + 3, 1+ 2 + 3 y 1 + 5. Se pedía a los niños que emplearan un conjunto de seis fichas rojas para comprobar si las rojas cubrían totalmente cada hilera. Tras observar que realmente podían cubrir cada hilera con sus fichas rojas, se les pidió que reprodujeran el modelo de memoria. Sólo un niño, el mayor del grupo, reprodujo el modelo con exactitud; los de cuatro años formaron hileras numéricamente muy diferentes, es decir, de 12, 8 y 9 fichas. Aquellos que se situaban entre los dos extremos formaron distribuciones de 15, 13 y 13; 7, 5 y 6; 4, 4 y 8. Incluso los hechos observables son recordados de modo diferente por niños en distintas etapas de desarrollo.

Algoritmos

Como se ha señalado previamente, los autores de *Mathematics Today* afirman que en su programa «todas las operaciones básicas se introducen con modelos y algoritmos de dificultad progresiva, que a menudo van acompañados de útiles ilustraciones» (Abbott y Wells, 1985, pág. 126). En los capítulos 2, 6 y 10, demostraré que estos modelos y algoritmos son reglas impuestas por los adultos que los niños sólo consiguen explicar diciendo, «el maestro nos ha dicho que lo hagamos así».

Por qué deberían reinventar la aritmética

Puedo citar tres razones para defender que los niños reinventen la aritmética. Primera, porque debido al fundamento erróneo de la teoría en que se basan los profesores tradicionales de matemáticas acerca de cómo aprenden los niños, la enseñanza actual de la aritmética no da resultado. Por ejemplo, se sabe desde 1980 que sólo la mitad de los alumnos de cuarto curso llegan a dominar el valor de la posición (M. Kamii, 1980, 1982). Otros investigadores han confirmado en repetidas ocasiones la validez de esta conclusión, como veremos en el Capítulo 2. En el Capítulo 10 demostraré también que sólo el 23% de los alumnos de segundo grado, con los que se había seguido el método tradicional de enseñanza, podía explicar el razonamiento envuelto en la adición con «llevadas» o «reagrupamiento». Si estos datos corresponden a niños de clase media-alta, la proporción que puede esperarse de niños desaventajados es aún menor.

La segunda razón es que cuando los niños reinventan la aritmética llegan a ser más competentes que los que han aprendido con el método tradicional. Esta afirmación se elabora en el Capítulo 10, donde también se comparan los resultados obtenidos por dos grupos de niños al finalizar segundo curso después de haber seguido la teoría tradicional y la teoría constructivista.

La tercera razón reside en que los procedimientos que los niños inventan surgen de lo más profundo de su intuición y de su manera natural de pensar. Si favorecemos que ejerciten su forma genuina de pensar, en lugar de exigirles que memoricen reglas que para ellos carecen de sentido, desarrollarán una base cognitiva más sólida y una mayor seguridad. Los niños que se sienten seguros aprenden más a largo plazo que aquellos que han sido instruidos de un modo que les hace dudar de sus propios razonamientos.

La enseñanza tradicional impone técnicas (algoritmos), ajenas a los procesos de pensamiento de los niños pequeños. Por ejemplo, si les decimos que la forma de sumar 13 + 13 es 3 + 3 + 10 + 10, vamos en contra de su manera de pensar. Los niños conciben el 13 como 10 y 3, no como 3 y 10. Por eso universalmente suman primero las decenas y después las unidades cuando se les permite inventar sus propios procedimientos.

Tras conocer mis postulados, algunas personas concluyen que quiero que los niños reinventen toda la matemática, incluso el álgebra. Esto no es exacto. Considero que el papel de la enseñanza debe aumentar a medida que el niño crece, sin embargo, estoy firmemente convencida de que en los primeros cursos los niños deben construir por sí mismos un nivel tras otro, si se desea que adquieran una buena base de aprendizaje. A la larga, los niños a los que se permite que expliquen sus propias ideas llegan mucho más lejos que aquellos que tienen que limitarse a seguir las reglas de otras personas y responder a problemas desconocidos diciendo, «no lo sé, todavía no lo he aprendido».

Notas de lectura:

[1] Hay que decir que el 2 no es buen ejemplo para ilustrar la naturaleza lógico-matemática del número porque es un número perceptivo. Piaget llama a los números pequeños, hasta el 4 o el 5, «números perceptivos» porque las cantidades pequeñas de objetos, como «00» y «000», pueden diferenciarse fácilmente unas de otras por la percepción. Sin embargo es imposible distinguir perceptivamente siete u ocho objetos cuando se presentan juntos (por ejemplo, «0000000» y «00000000»).

El 2 también puede ser número lógico-matemático para un adulto que ha construido el sistéma de números lógico-matemático. A pesar de este problema, he elegido el número 2 en este ejemplo porque con dos canicas puedo ilustrar otras relaciones simples como «diferente», «similar» y «del mismo peso».

[2] Tras establecer la diferencia teórica entre abstracción empírica y abstracción constructiva, Piaget continuó diciendo que en la realidad psicológica del niño, no puede tener lugar un tipo de abstracción sin la otra. Por ejemplo, el niño no podría construir la relación «diferente» si todo los objetos fueran idénticos en el mundo, y a la inversa, el niño no podría construir el conocimiento físico sin un marco lógico-matemático. Para que el niño comprenda que un pez es rojo, por ejemplo, necesita un esquema de clasificación con el que distinguir el rojo del resto de los colores. También necesita un esquema de clasificación con el que distinguir «pez» del resto de los objetos conocidos. Por tanto, es imprescindible un marco lógico-matemático para que la abstracción empírica pueda tener lugar, de lo contrario, los niños no podrían «leer» hechos de la realidad externa si cada hecho permaneciera como una «pieza» de conocimiento aislado, sin ninguna relación con el conocimiento construido de manera organizada.

LECTURA: APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCION DE PROBLEMAS[1]

Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo es construido.

BACHELARD, *La formación del espíritu científico*

¿LECCIONES DE LA HISTORIA?

La historia de la matemática, en la complejidad de su evolución y de sus revoluciones, ilustra bien esta cita de Bachelard. Las matemáticas se han construido como respuesta a preguntas que han sido traducidas en otros tantos problemas. Estas preguntas han variado en sus orígenes y en sus contextos: problemas de orden doméstico (división de tierras, cálculo de créditos...); problemas planteados en estrecha vinculación con otras ciencias (astronomía, física...); especulaciones en apariencia "gratuitas" sobre "objetos" pertenecientes a las matemáticas mismas, necesidad de organizar elementos ya existentes, de estructurarlos, por ejemplo, por las exigencias de la exposición (enseñanza...), etcétera.

De más está decir que la actividad de resolución de problemas ha estado en el corazón mismo de la elaboración de la ciencia matemática. "¡Hacer matemática es resolver problemas!", no temen afirmar algunos.

Pero esta elaboración no se realiza sin dificultad. Los problemas a menudo ofrecen resistencia; las soluciones son casi siempre parciales, aun si destellos geniales provocan avances espectaculares... que a veces no son reconocidos desde el principio. "En el uso frecuente de textos originales y también en el de obras generales —suma de saberes históricamente acumulados en este dominio— hemos descubierto un tejido complejo y difuso hecho de conjeturas, de dudas, de *gaffe*, de modelos concurrentes, de intuiciones fulgurantes y también de momentos de axiomatización y síntesis", escriben A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffer en el prefacio de su libro.

¿Pueden estas consideraciones (muy esquemáticas) sobre el origen del conocimiento matemático y sobre las condiciones de su elaboración encontrar eco en una reflexión sobre la cuestión del aprendizaje matemático en el contexto escolar? La respuesta debe ser prudente y cuidadosa: las herramientas o nociones elaboradas en una época determinada lo han sido, en efecto, en un contexto cultural, socioeconómico..., que no es aquel en el que viven nuestros alumnos. Resta decir que son los problemas que les han dado origen (y los que ha planteado a continuación) los que han dado sentido a las matemáticas producidas. Esta es, tal vez, la principal lección que tener en cuenta en la enseñanza.

CONSTRUIR EL SENTIDO...

Uno de los objetivos esenciales (y al mismo tiempo una de las dificultades principales) de la enseñanza de la matemática es precisamente que lo que se ha enseñado esté cargado de significado, tenga sentido para el alumno.

Para G. Brousseau (1983),

> el sentido de un conocimiento matemático se define:
> — no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución,
> — sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.

*Roland Charnay. "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en: PARRA, Cecilia e Irma Saiz (comps.). *Didáctica de matemáticas.* Paidós, Argentina, 1994. pp. 51-63.

Agreguemos que la construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles:

- un nivel "externo": ¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?
- un nivel "interno": ¿cómo y por qué funciona tal herramienta? (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?).

La cuestión esencial de la enseñanza de la matemática es entonces: ¿cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno?

El alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas.

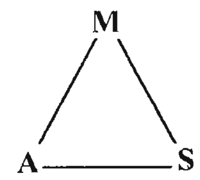
Y es, en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE

Se plantea entonces al docente la elección de una estrategia de aprendizaje. Esta elección (que cada uno hace al menos implícitamente) está influida por numerosas variables: el punto de vista del docente sobre la disciplina enseñada (¿qué es la matemática?, ¿qué es hacer matemática?), su punto de vista sobre los objetivos generales de la enseñanza y sobre aquellos específicos de la matemática, su punto de vista sobre los alumnos (sus posibilidades, sus expectativas), la imagen que el docente se hace de las demandas de la institución (explícitas, implícitas o supuestas), de la demanda social o también de la de los padres...

Para describir algunos modelos de aprendizaje, se puede apoyar en la idea de "contrato didáctico", tal como Brousseau lo ha definido: conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumnos-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?...

Así, una situación de enseñanza puede ser observada a través de las relaciones que se "juegan" entre estos tres polos: maestro, alumno, saber:



analizando:

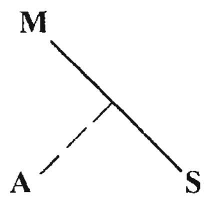
— la distribución de los roles de cada uno,

— el proyecto de cada uno,

— las reglas del juego: ¿qué está permitido, qué es lo que realmente se demanda, qué se espera, qué hay que hacer o decir para "mostrar que se sabe"...?

Muy esquemáticamente se describirán tres modelos de referencia:

1. *El modelo llamado "normativo" (centrado en el contenido)*



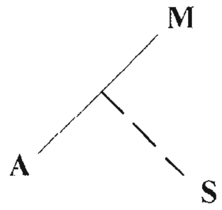
Se trata de aportar, de comunicar un saber a los alumnos. La pedagogía es entonces el arte de comunicar, de "hacer pasar" un saber.

— El maestro muestra las nociones, las introduce, provee los ejemplos.

— El alumno, en primer lugar, aprende, escucha, debe estar atento; luego imita, se entrena, se ejercita, y al final aplica.

— El saber ya está acabado, ya construido. Se reconocen allí los métodos a veces llamados dogmáticos (de la regla a las aplicaciones) o mayeúticos (preguntas/respuestas).

2. *El modelo llamado "incitativo"* (*centrado en el alumno*)



Al principio se le pregunta al alumno sobre sus intereses, sus motivaciones, sus propias necesidades, su entorno.

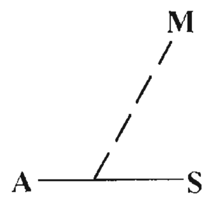
— El maestro escucha al alumno, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demandas, lo remite a herramientas de aprendizaje (fichas), busca una mejor motivación (medio: cálculo vivo de Freinet, centros de interés de Decroly).

— El alumno busca, organiza, luego estudia, aprende (a menudo de manera próxima a lo que es la enseñanza programada).

— El saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (la estructura propia de este saber pasa a un segundo plano).

Se reconocen allí las diferentes corrientes llamadas "métodos activos".

3. *El modelo llamado "aproximativo"* (*centrado en la construcción del saber por el alumno*)



Se propone partir de "modelos", de concepciones existentes en el alumno y "ponerlas a prueba" para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas.

— El maestro propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones), organiza las diferentes fases (investigación, formulación, validación, institucionalización).

— Organiza la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (notaciones, terminología).

— El alumno ensaya, busca, propone soluciones, las confronta con las de sus compañeros, las defiende o las discute.

— El saber es considerado con su lógica propia.

Notemos que ningún docente utiliza exclusivamente uno de los modelos; que el acto pedagógico o en toda su complejidad utiliza elementos de cada uno de los modelos..., pero que, a pasar de todo, cada uno hace una elección, consciente o no y de manera privilegiada, de uno de ellos.

Agreguemos que el estudio de estos modelos provee una buena herramienta de análisis de las situaciones didácticas y de reflexión para los docentes en formación.

Tres elementos de la actividad pedagógica se muestran privilegiados para diferenciar estos tres modelos y reflexionar sobre su puesta en práctica:

— El comportamiento del docente frente a los errores de sus alumnos: ¿qué interpretación hace de ellos?, ¿cómo interviene?, ¿para hacer qué?, ¿qué demanda, entonces a sus alumnos?

— Las prácticas de utilización de la evaluación: ¿de qué sirve la evaluación?, ¿en qué momento interviene en el proceso de aprendizaje?, ¿bajo qué formas?

— El rol y el lugar que el maestro asigna a la actividad de resolución de problemas: ¿qué es para él un problema?, ¿cuándo utiliza problemas, en qué momentos del aprendizaje?, ¿con qué fin?

*A continuación, nos interesamos esencialmente en este tercer punto. Para esto, proponemos un esquema, inspirado en un artículo de R. Champagnol (*Revue Française de Pédagogie*) que resume las diversas posiciones respecto a la utilización de la resolución de problemas en relación con los tres modelos de aprendizaje descritos anteriormente.*

1) *El problema como criterio del aprendizaje* (modelo llamado "normativo")

mecanismos
- lecciones (adquisición)
- ejercicios (ejercitación)

sentidos
- problemas (utilización de lo conocimientos para el alumno, control para el maestro)

donde los nuevos saberes son integrados al saber antiguo, a veces modificado (cf. Piaget).

Así, un nuevo saber puede cuestionar las concepciones del alumno originadas por un saber anterior: por ejemplo, el estudio de los decimales debería conducir al alumno a cuestionar la idea de que la multiplicación "agranda" siempre (idea que él ha podido elaborar estudiando los naturales).

Del mismo modo, un saber adquirido puede hacerse fracasar fácilmente aun ante mínimas modificaciones de las variables de la situación: así, G. Vergnaud (1981) ha mostrado que la "noción de adición" o las estructuras aditivas no son totalmente dominadas hasta muy tarde...

2) *El rol de la acción en el aprendizaje*

Piaget también ha subrayado el rol de "la acción" en la construcción de conceptos. Por supuesto, se trata de la actividad propia del alumno que no se ejerce forzosamente en la manipulación de objetos materiales, sino de una acción con una finalidad, problematizada, que supone una dialéctica pensamiento-acción muy diferente de una simple manipulación guiada, tendiente a menudo a una tarea de constatación por parte del alumno... Hay que subrayar aquí el rol de la *anticipación*: la actividad matemática consiste a menudo en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permite anticipar el resultado de una acción no realizada todavía o no actual sobre la cual se dispone de ciertas informaciones.

3) *Sólo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver...*

...es decir cuando reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta. Aquí también podemos recurrir a Piaget, para quien el conocimiento no es ni simplemente empírico (constataciones sobre el medio) ni preelaborado (estructuras innatas), sino el resultado de una interacción sujeto-medio (cf. arriba punto 2). Lo que da *sentido* a los conceptos o teorías son los problemas que ellos o ellas permiten resolver.

Así, es la resistencia de la situación la que obliga al sujeto a acomodarse, a modificar o percibir los límites de sus conocimientos anteriores y a elaborar nuevas herramientas (idea de conflicto cognitivo). Habrá que tener esto en cuenta para la elección de las situaciones.

En la misma perspectiva, se tiende a preferir la motivación propia de la actividad propuesta (dificultad que se desea salvar, franquear) a la motivación externa (necesidades de la vida corriente, observaciones) cuyo interés, sin embargo, no se debe descartar: el problema es entonces percibido como un desafío intelectual.

4) *Las producciones del alumno son una información sobre su "estado de saber"*

En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia de saber sino, más bien, a una manera de conocer (que a veces ha servido en otros contextos) contra la cual el alumno deberá construir el nuevo conocimiento. El alumno no tiene jamás la cabeza vacía: no puede ser considerado como una página en blanco sobre la cual será suficiente imprimir conocimientos correctos y bien enunciados.

5) *Los conceptos matemáticos no están aislados*

Hay que hablar más bien de campos de conceptos entrelazados entre ellos y que se consolidan mutuamente: de ahí la idea de proponer a los alumnos campos de problemas que permitan la construcción de estas redes de conceptos que conviene elucidar previamente (tarea que pasa a ser fundamental...).

6) *La interacción social es un elemento importante en el aprendizaje*

Se trata tanto de las relaciones maestro-alumnos como de las relaciones alumnos-alumnos, puestas en marcha en las actividades de formulación (decir, describir, expresar), de prueba (convencer, cuestionar) o de cooperación (ayuda, trabajo cooperativo): idea de conflicto sociocognitivo, sobre todo entre pares.

EN EL TRIÁNGULO DOCENTE-ALUMNOS-PROBLEMA

Trataremos de precisar las características de estas relaciones en el cuadro de un aprendizaje que se apoya en la resolución de problemas.

Relación entre la situación-problema y los alumnos:

— La actividad debe proponer un verdadero *problema por resolver* para el alumno: debe ser comprendido por todos los alumnos (es decir que éstos puedan prever lo que puede ser una respuesta al problema).

— Debe permitir al alumno *utilizar los conocimientos anteriores...*, no quedar desarmado frente a ella.

— Pero, sin embargo, debe ofrecer una *resistencia suficiente* para llevar al alumno a hacer evolucionar los conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos (problema abierto a la investigación del alumno, sentimiento de desafío intelectual).

— Finalmente, es deseable que *la sanción (la validación) no venga del maestro, sino de la situación misma.*

Relación docente-alumno

¿Qué percepción tiene el alumno de las *expectativas del maestro*? Las relaciones pedagógicas deben conducir a los alumnos a percibir que les es más conveniente establecer ellos mismos la validez de lo que afirman que solicitar pruebas a los otros.

— Una distinción neta debe ser establecida entre *los aportes del docente y las pruebas que los alumnos aportan.*

Relación maestro-situación

—Le corresponde al maestro ubicar la situación propuesta en el cuadro del aprendizaje apuntado, *distinguir el objetivo inmediato de los objetivos más lejanos,* elegir ciertos parámetros de la situación (idea de "variables didácticas" de la situación).

— *El conocimiento considerado debe ser el más adaptado* para resolver el problema propuesto (desde el punto de vista de los alumnos).

— Le corresponde también observar las incomprensiones, *los errores significativos,* analizarlos y tenerlos en cuenta para la elaboración de nuevas situaciones.

— Le corresponde, en fin, *provocar o hacer la síntesis.*

¿QUÉ PROBLEMAS ELEGIR? ¿QUÉ PUESTA EN MARCHA PEDAGOGICA?

Una precisión ante todo: el *termino "problema"* utilizado aquí no se reduce a la situación propuesta (enunciado-pregunta). Se define, más bien, como una terna: situación-alumno-entorno. Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una determinada situación que "hace problema" para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar. Por fin, el entorno es un elemento del problema, en particular las condiciones didácticas de la resolución (organización de la clase, intercambios, expectativas explícitas o implícitas del docente).

Sin duda conviene diferenciar *los objetivos de la actividad de resolución de problemas:*

— Objetivos de orden "metodológico": en una palabra, "aprender a resolver problemas, a investigar". El objetivo está, de alguna manera, en la actividad misma (cf. práctica del "problema abierto" descrito por el IREM de Lyon):

— Objetivos de orden "cognitivo": se apunta a un conocimiento (noción, algoritmo) a través de la actividad de resolución de problemas. Se puede, entonces, desde este punto de vista, distinguir entre los problemas que se sitúan en la fuente de un nuevo aprendizaje y aquellos que se utilizan como problemas de resignificación.

Desde esta última óptica, se pueden considerar algunas cuestiones que, se le plantean al maestro respecto de un conocimiento dado:

— Elección de enseñar una determinada concepción del conocimiento considerado (problema de transposición didáctica): ¿cuáles son las concepciones tomadas en cuenta (estado actual de este conocimiento, de su enseñanza, estados anteriores, evolución histórica, diferentes aspectos): cuestiones de epistemología; cuáles son las concepciones posibles con los alumnos de un determinado nivel de enseñanza en relación con los niveles precedentes y siguientes?, ¿de qué tipo de saber se trata (formal, descriptivo u operativo, funcional)?

— Elección de la situación o más bien de la serie de situaciones a proponer a los alumnos. La idea de obstáculo es aquí importante: sin los conocimientos anteriores adecuados para resolver el problema no hay interés por movilizar una nueva herramienta. La elección es difícil: es necesario no desmovilizar al alumno con una dificultad demasiado grande ni dar la impresión de "derribar puertas abiertas con una excavadora".

— Elección de una puesta en marcha pedagógica. No hay soluciones tipo, pero se puede anticipar con la mayor parte de los didactas actuales una estrategia de referencia que comprenda varias etapas: investigar individualmente y/o en grupos, formular oralmente o por escrito, validar, institucionalizar (identificación del saber, convenciones para el lenguaje, las notaciones), evaluar, proceso que puede extenderse en varias sesiones e incluso utilizar varias situaciones problemas.

Notas de lectura

[1]En *Grand N*, revista de matemática, ciencias y tecnología para los maestros de la escuela primaria y pre-primaria, no. 42, enero 1988, Documento CRDP, Grenoble, Francia. Traducción del francés de Santiago Ruiz en colaboración con Gema Fioriti y María Elena Ruiz, y publicado con autorización del CRDP (Centre Regional de Documentation Pédagogique).

LECTURA: MATEMÁTICAS*

MATEMÁTICAS

Enfoque

Introducción

Las matemáticas son un producto del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas. Muchos desarrollos importantes de esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos, propios de los grupos sociales. Por ejemplo, los números, tan familiares para todos, surgieron de la necesidad de contar y son también una abstracción de la realidad que se fue desarrollando durante largo tiempo. Este desarrollo está además estrechamente ligado a las particularidades culturales de los pueblos: todas las culturas tienen un sistema para contar, aunque no todas cuenten de la misma manera.

En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños también parten de experiencias concretas. Paulatinamente, y a medida que van haciendo abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos. El diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos; asi, tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro. El éxito en el aprendizaje de esta disciplina depende en buena medida del diseño de actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas, en la interacción con los otros. En esas actividades, las matemáticas serán para el niño herramientas funcionales y flexibles que le permitirán resolver las situaciones problemáticas que se le planteen.

Las matemáticas permiten resolver problemas en diversos ámbitos, tales como el científico, el técnico, el artístico y la vida cotidiana. Si bien todas las personas construyen conocimientos fuera de la escuela que les permiten enfrentar dichos problemas, esos conocimientos no bastan para actuar eficazmente en la práctica diaria. Los procedimientos generados en la vida cotidiana para resolver situaciones problemáticas, muchas veces son largos, complicados y poco eficientes, si se les compara con los procedimientos convencionales que permiten resolver las mismas situaciones con más facilidad y rapidez.

Contar con las habilidades, conocimientos y formas de expresión que la escuela proporciona, permite la comunicación y comprensión de la información matemática presentada a través de medios de distinta índole.

Se considera que una de las funciones de la escuela es brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver ciertos problemas y que, a partir de sus soluciones iniciales, comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerlos evolucionar hacia los procedimientos y las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Propósitos generales

Los alumnos en la escuela primaria deberán adquirir conocimientos básicos de las matemáticas y desarrollar:

- La capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas
- La capacidad de anticipar y verificar resultados
- La capacidad de comunicar e interpretar información matemática
- La imaginación espacial
- La habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones
- La destreza en el uso de ciertos instrumentos de medición, dibujo y cálculo
- El pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sis-

*SEP. "Matemáticas", en: *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*. México, 1993. pp. 52-55.

tematización y generalización de procedimientos y estrategias

En resumen, para elevar la calidad del aprendizaje es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés.

Organización general de los contenidos

La selección de contenidos de esta propuesta descansa en el conocimiento que actualmente se tiene sobre el desarrollo cognoscitivo del niño y sobre los procesos que sigue en la adquisición y la construcción de conceptos matemáticos específicos. Los contenidos incorporados al currículum se han articulado con base en seis ejes, a saber:

- Los números, sus relaciones y sus operaciones
- Medición
- Geometría
- Procesos de cambio
- Tratamiento de la información
- Predicción y azar

La organización por ejes permite que la enseñanza incorpore de manera estructurada, no sólo contenidos matemáticos, sino el desarrollo de ciertas habilidades y destrezas, fundamentales para una buena formación básica en matemáticas.

Los números, sus relaciones y sus operaciones

Los contenidos de esta línea se trabajan desde el primer grado con el fin de proporcionar experiencias que pongan en juego los significados que los números adquieren en diversos contextos y las diferentes relaciones que pueden establecerse entre ellos. El objetivo es que los alumnos, a partir de los conocimientos con que llegan a la escuela, comprendan más cabalmente el significado de los números y de los símbolos que los representan y puedan utilizarlos como herramientas para solucionar diversas situaciones problemáticas. Dichas situaciones se plantean con el fin de promover en los niños el desarrollo de una serie de actividades, reflexiones, estrategias y discusiones, que les permitan la construcción de conocimientos nuevos o la búsqueda de la solución a partir de los conocimientos que ya poseen.

Las operaciones son concebidas como instrumentos que permiten resolver problemas; el significado y sentido que los niños puedan darles, deriva precisamente de las situaciones que resuelven con ellas.

La resolución de problemas es entonces, a lo largo de la primaria, el sustento de los nuevos programas. A partir de las acciones realizadas al resolver un problema (agregar, unir, igualar, quitar, buscar un faltante, sumar repetidamente, repartir, medir, etcétera) el niño construye los significados de las operaciones.

El grado de dificultad de los problemas que se plantean va aumentando a lo largo de los seis grados. El aumento en la dificultad no radica solamente en el uso de números de mayor valor, sino también en la variedad de problemas que se resuelven con cada una de las operaciones y en las relaciones que se establecen entre los datos.

Medición

El interés central a lo largo de la primaria en relación con la medición es que los conceptos ligados a ella se construyan a través de acciones directas sobre los objetos, mediante la reflexión sobre esas acciones y la comunicación de sus resultados.

Con base en la idea anterior, los contenidos de este eje integran tres aspectos fundamentales:

- El estudio de las magnitudes
- La noción de unidad de medida
- La cuantificación, como resultado de la medición de dichas magnitudes

Geometría

A lo largo de la primaria, se presentan contenidos y situaciones que favorecen la ubicación del alumno en relación con su entorno. Asimismo se proponen actividades de manipulación, observación, dibujo y análisis de formas diversas. A través de la formalización paulatina de las relaciones que el niño percibe y de su representación en el plano, se pretende que estructure y enriquezca su manejo e interpretación del espacio y de las formas.

Procesos de cambio

El desarrollo de este eje se inicia con situaciones sencillas en el cuarto grado y se profundiza en los dos últimos grados de la educación primaria. En él se abordan fenómenos de variación proporcional y no proporcional. El eje conductor está conformado por la lectura, elaboración y análisis de tablas y gráficas donde se registran y analizan procesos de variación. Se culmina con las nociones de razón y proporción, las cuales son fundamentales para la comprensión de varios tópicos matemáticos y para la resolución de muchos problemas que se presentan en la vida diaria de las personas.

Tratamiento de la información

Analizar y seleccionar información planteada a través de textos, imágenes u otros medios es la primera tarea que realiza quien intenta resolver un problema matemático. Ofrecer situaciones que promuevan este trabajo es propiciar en los alumnos el desarrollo de la capacidad para resolver problemas. Por ello, a lo largo de la primaria, se proponen contenidos que tienden a desarrollar en los alumnos la capacidad para tratar la información.

Por otro lado, en la actualidad se recibe constantemente información cuantitativa en estadísticas, gráficas y tablas. Es necesario que los alumnos desde la primaria se inicien en el análisis de la información de estadística simple, presentada en forma de gráficas o tablas y también en el contexto de documentos, propagandas, imágenes u otros textos particulares.

La predicción y el azar

En este eje se pretende que, a partir del tercer grado, los alumnos exploren situaciones donde el azar interviene y que desarrollen gradualmente la noción de lo que es probable o no es probable que ocurra en dichas situaciones.

Cambios principales al programa anterior

Los cambios principales, como se ha descrito arriba, se refieren fundamentalmente al enfoque didáctico. Este enfoque coloca en primer término el planteamiento y resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos.

En relación con los contenidos se han hecho los siguientes cambios:

Se eliminaron los temas de "Lógica y conjuntos", ya que esta temática mostró en los hechos, en México y en el mundo, su ineficacia como contenido de la educación primaria. Existe reconocimiento de que los niños no asimilaron significativamente esta temática y que, en cambio, su presencia disminuyó el espacio para trabajar otros contenidos fundamentales. Se sabe, por otra parte, que la enseñanza de la lógica como contenido aislado no es un elemento central para la formación del pensamiento lógico.

Los números negativos, como objeto de estudio formal, se transfirieron a la escuela secundaria.

Se aplazó la introducción de las *fracciones* hasta el tercer grado y la *multiplicación y división* con fracciones pasó a la secundaria. Lo anterior se basa en la dificultad que tienen los niños para comprender las fracciones y sus operaciones en los grados en los que se proponían anteriormente. A cambio de ello, se propone un trabajo más intenso sobre los diferentes significados de la fracción en situaciones de reparto y medición y en el significado de las fracciones como razón y división.

Las propiedades de las operaciones (asociativa, conmutativa y distributiva) no se introducen de manera formal, se utilizan sólo como herramientas para realizar, facilitar o explicar cálculos.

Las nociones de peso, capacidad, superficie y tiempo, además de la noción de longitud de objetos y distancias, se introducen desde primer grado.

En relación con el cálculo del volumen de cuerpos geométricos, se trabaja el volumen de cubos y prismas; el volumen de cilindros y pirámides se transfirió a la escuela secundaria.

La noción de temperatura y el uso de los *grados centígrados y Farenheit* se introduce en sexto grado.

Se utilizan únicamente las fórmulas del área del cuadrado, rectángulo y triángulo para el cálculo de áreas; el área de otras figuras se calcula a partir de su descomposición en triángulos, cuadrados y rectángulos.

Se favorece el uso de los instrumentos geométricos (regla, compás, escuadra y transportador) para dibujar y trazar figuras, frisos y patrones de cuerpos geométricos.

Los contenidos de "Estadística" se incluyen en el eje "Tratamiento de la información"; en este eje se incluye también un trabajo de análisis de información contenida en imágenes y se analiza e interpreta la información presentada en gráficas y en documentos tales como el periódico, revistas y enciclopedias.

El tema de "Probabilidad", presente en los programas anteriores de todos los grados, se incluye bajo el nombre de "La predicción y el azar" y se introduce a partir de tercer grado. Un cambio fundamental es que se disminuye el énfasis en la cuantificación de las probabilidades. El interés central está en que los alumnos exploren las situaciones donde interviene el azar y que desarrollen gradualmente la noción de lo que es probable o no es probable esperar que ocurra en dichas situaciones.

LOS NÚMEROS Y EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

LECTURA: TENDENCIAS DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS EN FRANCIA*

TENDENCIAS DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS EN FRANCIA

Resumen

El objetivo de ese artículo es presentar el estado actual de las investigaciones sobre el aprendizaje de los números, así como las propuestas pedagógicas sobre el tema para la escuela primaria y la educación preescolar en Francia. Estas propuestas surgieron fundamentalmente de las investigaciones realizadas en el seno del INRP (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica).

A. Aspectos teóricos

I. Adquisición de la serie numérica oral

De acuerdo con diversas investigaciones, hoy sabemos que el conteo de los objetos de una colección exige al niño una triple tarea:

a) activar en la memoria, y pronunciar una serie ordenada de palabras (serie numérica);
b) tomar uno a uno los objetos que constituyen la colección sin olvidar ninguno y sin contar ninguno más de una vez;
c) coordinar las dos actividades precedentes.

En lo que sigue expondré brevemente el conocimiento que —con base en distintas investigaciones— hoy se tiene acerca de la adquisición de la serie numérica.

El niño adquiere esta serie de palabras a una edad muy temprana. Hacia los dos años, los niños perciben y comprenden que hay palabras que sirven para contar y otras que no son útiles para este fin. Diversos trabajos (por ejemplo el de Gelman y Gallistel; 1978) han constatado que niños de entre dos y cinco años, al contar, raramente recurren a palabras que no son números.

Durante su adquisición (que ocurre entre los 2 y 6 años) se puede observar que las series numéricas orales obtenidas a partir de la consigna: "Muéstrame hasta qué número sabes contar", se pueden descomponer en tres partes:

1 2 3 4 5 6	8 10	11 13 14 16 20 21
1 2 3 4 5 6	8 10	12 14 15 20
1 2 3 4 5 6	8 10	15 13 11
I Parte estable y convencional	II Parte estable y no convencional	III Parte no estable y no convencional

Figura 1

La primera parte es estable y convencional. Dicha parte corresponde a la serie canónica y va en aumento conforme el niño crece. La parte estable es muy variable según los individuos y está muy ligada al medio que rodea al niño. Como se ve en la Figura 1, esta primera parte de la serie numérica se mantiene en los diversos intentos realizados por un mismo sujeto.

La segunda parte es estable pero no convencional; presenta un orden diferente al establecido por los adultos, o bien tiene elementos faltantes. Esta parte de la serie numérica oral, sin embargo, permite a los niños respetar y poner en acción una de las reglas de la numeración: asociar a cada objeto una y sólo una etiqueta lexical.

La tercera parte de la serie numérica no es estable ni convencional. En ocasiones contiene denominaciones inventadas a partir de las reglas de sucesión de la numeración —por ejemplo "20 y 10" en lugar de 30— y es variable, en un mismo sujeto, de un intento a otro. (Fuson *et al.* cit. por Fayol; 1990).

*Marie-Lise Peltier. "Tendencias de la investigación en didáctica de las matemáticas y la enseñanza de los números en Francia", en: *Educación matemática.* Vol. 7, núm. 2, Agosto de 1995.

Las variaciones en el manejo de la serie numérica que se observan en los distintos niños —según se ha constatado en algunos estudios— se deben, entre otras cosas, a los estímulos proporcionados por el entorno. Sin embargo, existen también estudios que señalan que tales variaciones son eliminadas, o al menos disminuidas, con algunas semanas de escolaridad.

En francés, la serie numérica necesita, para los primeros 16 números, de un aprendizaje automático, memorístico, porque no hay una lógica de la cual el niño pueda derivar el nombre del número siguiente. El aprendizaje automático es indispensable en esta parte de la numeración. Pero más adelante es necesario trabajar para que los niños comprendan los principios del funcionamiento de la numeración oral.

Pero la construcción de la serie numérica oral pasa por distintas etapas; en su construcción se observan distintos niveles de organización y estructuración. En un primer nivel los nombres de los números no tienen ninguna individualidad, el niño sólo pronuncia la serie como una totalidad única, se trata de un "bloque verbal" desprovisto de significado aritmético, pero enunciado en presencia de objetos por enumerar:

> unodostrescuatrocincoseis...

Esta en en realidad una simulación del conteo. Un poco más tarde, la serie numérica se compone de palabras individuales, y el niño puede citar la sucesión de palabras como términos independientes:

> uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ...

En este nivel, sin embargo, el niño no puede pronunciar la serie a partir de *n*; sólo puede empezar a partir de uno. Pero puede resolver problemas aditivos sencillos "volviendo a contar" todos los objetos implicados en el cálculo:

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ...

Más adelante, el niño pasa a un nivel en el cual puede comenzar a contar a partir de *n* (cualquier número); puede contar de *n* a *p*, contar al revés a partir de *p* y contar de *p* a *p*. En este nivel es también capaz de identificar el sucesor y el antecesor de un número, y de resolver problemas aditivos por *subconteo* (conteo a partir del último elemento del primer conjunto, sin necesidad de re-contar los elementos de dicho conjunto) o *conteo hacia atrás*.

// cuatro, cinco, seis, siete, ocho //

// cinco, cuatro, tres, dos, uno //

En el último nivel (nivel terminal) los números que componen la serie numérica son tratados como entidades distintas. El niño puede contar, por ejemplo, cuatro a partir de cinco, hacia adelante, o hacia atrás:

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete
uno dos tres

cinco, seis, siete, ocho
uno dos tres cuatro

Este trabajo exige mucho al niño; se necesita mucha memoria a corto plazo para realizarlo, porque debe pronunciar los números conservando en la memoria a corto plazo el recuerdo de elementos ya contados (en el ejemplo anterior sería el cinco).

Con frecuencia, ante este tipo de tareas el niño se ayuda con los dedos, y ésta es una muy buena manera de apoyarse para avanzar en el dominio de la serie numérica y el conteo.

II. La cuantificación

Pueden distinguirse tres grandes procedimientos de cuantificación de los elementos de un conjunto dado.

1) La primera es una percepción global e inmediata de la cantidad de elementos; para referirse a ella se utiliza el vocablo inglés *subitizing*. Se trata de la definición rápida y exacta de la numerosidad de una colección; el número de ob-

jetos que constituyen la colección se percibe sin recurrir al conteo. Esta forma de cuantificación es eficaz en la medida en que el tamaño del conjunto lo permite. Para que el *subitizing* se lleve a cabo se necesita, además, que la disposición de los objetos sea regular.

Parece que el *subitizing* se manifiesta en edad muy temprana (en los bebés) pero no parece derivar de un mecanismo psicológico automático, sino sobre todo de un reconocimiento de patrones perceptivos canónicos. El *subitizing* parece ser una aptitud que se adquiere y que se puede desarrollar. Puede ser, así, objeto de aprendizaje.

2) El conteo. El conteo lleva a una cuantificación precisa de los conjuntos sin importar el tamaño de éstos. El conteo implica diversas habilidades:

— señalar el objeto y decir las palabras (nombres de los números). La eficacia del señalamiento depende mucho de la disposición de los elementos. En la Figura 2, el niño tiene muchos más problemas para contar la colección señalada con A, luego la colección B, y después la colección C:

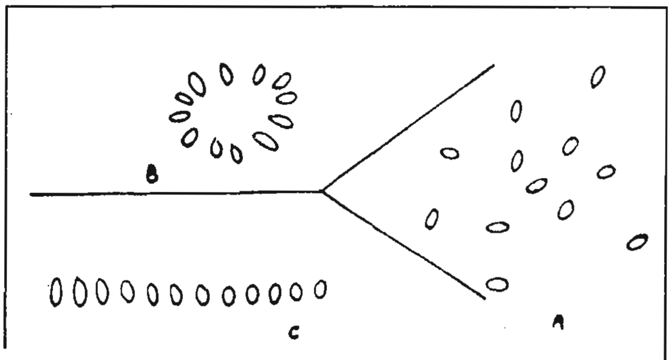


Figura 2

Cuando el niño no se le hace señalar los elementos para el conteo, se ha observado que cuenta oralmente muchísimo más lejos que cuando tiene que hacerlo. Si el experimentador es quien va señalando los objetos y el niño sólo tiene que pronunciar la serie numérica, puede avanzar muchísimo más en ella. Trabajos muy actuales indican que los niños tienen muchas habilidades para esto; ya hacia los tres o cuatro años las capacidades tienen lugar en estos cinco aspectos:

— La correspondencia término a término entre el objeto y el número;
— La cardinalidad, es decir, el último término citado corresponde al número de elementos de la colección;
— La abstracción: no tiene importancia el tipo de objeto;
— La irrelevancia del orden, es decir, el orden en el cual se cuentan los objetos carece de importancia.

Se cree que los niños a la edad de tres o cuatro años ya tienen estas aptitudes pero tienen problemas para coordinarlas. Es necesario trabajar en la escuela para coordinar dichas competencias.

3) La tercera forma de cuantificar un conjunto es una evaluación (estimación) global de la cantidad. La estimación permite una cuantificación muy rápida —pero sólo aproximada— del tamaño de un conjunto. Este procedimiento ha sido estudiado muy poco. Es una pena que los problemas de aproximación y estimación no sean sino escasamente estudiados y que no se les trabaje en las escuelas de manera sistemática.

III. Conservación de las cantidades

Desde los trabajos de Piaget ha habido una evolución importante en la forma en que se concibe la relación entre la conservación de la cantidades y el conteo.

Contrariamente a las hipótesis de Piaget y de Gréco, que planteaban como secundarias las actividades de enumeración, en relación al carácter fundamental de la conservación de cantidades discontinuas, los trabajos ulteriores parecen mostrar que:

— El desarrollo de las habilidades numéricas, aún complejas, no depende del acceso previo a la conservación del número.
— El hecho de poner a contar al niño antes de que logre la conservación de canti-

dades, conlleva un importante mejoramiento en la conservación de las mismas.

— El entrenamiento en actividades numéricas introduce progresos a la vez en el campo numérico y en las actividades lógicas, mientras que un entrenamiento en las actividades de seriación y clasificación no implica un mejoramiento sino en este sector, y no en las actividades numéricas.

Así pues, nos encontramos confrontados a una constatación paradójica: sabemos —empíricamente— que el recurrir a las actividades numéricas facilita y favorece el acceso a la conservación de cantidades; sabemos también —empíricamente— que el desempeño en el conteo no permite al sujeto (de 6 a 7 años de edad) cimentar la conservación sobre la observación. Es decir, que para eliminar esta contradicción, habría que considerar que la influencia de las actividades numéricas sobre el acceso a la conservación resulta no de un impacto directo, sino más bien de la abstracción reflexiva que realiza el sujeto en relación con sus propias acciones y coordinaciones.

IV. De la formulación oral al código escrito

La adquisición del código numérico escrito es un dominio poco explorado en psicología. El estudio histórico de los sistemas numéricos escritos muestra que estos estuvieron por mucho tiempo ligados a la correspondencia término a término.

Los sistemas posicionales son muy económicos, pero más obscuros a la comprensión y más complejos en su utilización, de ahí la necesidad de una enseñanza sistemática.

Al respecto se pueden constatar diversos fenómenos y dificultades:

— Muy pronto, los niños parecen percibir la diversidad de funciones del número.

Por ejemplo, para comunicar por escrito la cardinalidad de una colección de objetos ocultos en un recipiente, se observan cinco etapas:

1a. Indicaciones incomunicables: el mensaje sólo contiene dibujos sin relación con el número de elementos;
2a. Pictogramas que ilustran la numerosidad y la apariencia de los objetos: el niño los dibuja y progresivamente se va alejando de la representación del objeto (esto hacia los cuatro años);
3a. Símbolos que aseguran la correspondencia término a término, sin preocupación por la semejanza con los objetos representados;
4a. Uso de símbolos convencionales, asignando uno a cada objeto;
5a. El niño acepta un símbolo para representar el total de objetos del conjunto.

Con frecuencia se comprueba que diversos estadios coexisten en el niño.

B. Propuestas pedagógicas

I. El contexto de los últimos cuarenta años

Las respuestas aportadas por la escuela al difícil problema de los primeros aprendizajes numéricos ha variado mucho durante este periodo. Antes de 1970 los números se enseñaban en la escuela en el orden usual: un nuevo número era presentado en relación con el número precedente ($n+1$); con frecuencia, esto se hacía a partir de conjuntos de objetos, bajo forma de constelaciones o sobre dados y fichas de dominó. Cada número era escrito, nombrado y descompuesto. Siempre se presentaba a los niños un conjunto, se escribía el número, se le nombraba y se le descomponía.

Las competencias y conocimientos iniciales de los alumnos no se tomaban en cuenta: el alumno debía observar, imitar, reproducir, repetir. Los principios de la numeración eran más evocados que estudiados cuando se llegaba a la decena. Simplemente se trataba de mostrar a los niños cómo construirla.

En 1970 surge la llamada "reforma de las matemáticas modernas". En ese entonces se quiso construir la noción y el concepto de número antes de estudiar los números y utilizarlos. A la escuela maternal y al inicio del curso preparatorio (equivalente al primer grado de primaria mexicana) les correspondía asegurar los "prerrequisitos" del concepto de número (clasificación, seriación, correspondencia término a término...). De tal enfoque derivó un retraso muy claro de las actividades numéricas (a veces inclusive completamente ausentes) puesto que se trataba de poner en marcha las estructuras fundamentales, con el fin de respetar la construcción matemática del concepto de número.

Las concepciones de aprendizaje subyacentes en esta reforma estuvieron fuertemente inspiradas en ideas estructuralistas e invocan abundantemente los trabajos de Piaget, en particular en lo que concierne al papel de la acción en los procesos de aprendizaje: "es a partir de su acción sobre lo real que el alumno puede abstraer las nociones y poner en evidencia las estructuras".

Desde hace unos quince años, numerosos trabajos de psicología cognitiva (en torno a las capacidades del niño y sus modalidades de aprendizaje) y de didáctica de las matemáticas, así como el análisis de las prácticas existentes en el salón de clase, condujeron a reexaminar las condiciones de apropiación de los números por los niños pequeños, y a proponer un nuevo enfoque de las actividades numéricas desde la escuela maternal.

Las tareas de los equipos de investigación, desde entonces, son múltiples, y se trata

— "de analizar las prácticas en curso a la luz de las corrientes pedagógicas que les dieron origen.
— de hacer un inventario de las diferentes dificultades a partir de los trabajos de investigación sobre los aprendizajes, y en particular sobre la función de la resolución de problemas en la construcción del saber y del saber hacer.
— de definir nuevas propuestas, de elaborar situaciones de aprendizaje, de experimentarlas, de modificarlas en función de numerosas observaciones". (Ermel; 1991; Introducción).

II. Hipótesis didácticas

Las hipótesis en las cuales nos apoyamos para la enseñanza de los números son las mismas que sustentan toda la enseñanza de las matemáticas:

— Los conocimientos se construyen a partir de acciones con finalidad, es decir, mediante acciones que permiten resolver problemas
— los conocimientos no se construyen de manera lineal, sino a través de numerosas rupturas, desequilibrios y reorganizaciones; también se construyen por repetición, por evocación
— los conocimientos se construyen mejor dentro de un contexto social, por interacción entre los niños
— el error tiene un papel positivo, es la expresión de una forma de conocimiento que se tiene en un momento... pero que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado... (Brousseau, 1983).

III. El papel de los números

Las situaciones de aprendizaje sobre los números van a ser pues, elaboradas por el maestro. En estas situaciones el alumno tendrá que comprender lo que está en juego en la situación; se necesita que vea claramente cuál es la finalidad a la que tiene que llegar, y que pueda acceder a la actividad considerando alguno de los procedimientos que ya posee.

El profesor tiene que preguntarse para qué sirven los números, qué problemas pueden ayudar a resolver al niño, más que preguntarse qué es un número. Pronto los números son para los niños, medios o "herramientas" para dominar lo real, objetos con los que les gusta jugar y que tienen ganas de conocer mejor. Es pues esta toma de conciencia de la finalidad de los números la que constituye el objetivo a alcanzar.

El número como medio tiene dos aspectos:

a) es un instrumento para la memoria, recuerdo de una cantidad que permite evocarlo aun cuando no esté presente. Por ejemplo, ir a buscar el número de vestidos para unas muñecas sin que haya más o menos, sino el número exacto de los vestidos necesarios. El número también es instrumento para la memoria de una posición en una fila; en este sentido el número permite recordar el lugar ocupado por algún objeto, ya sea en una pista o en una lista (por ejemplo, en un tren con una docena de vagones, se pone un muñeco en el sexto vagón, el tren da la vuelta, pasa bajo un túnel, y cuando sale de ahí, el muñeco ya no está. El niño debe encontrar el lugar donde estaba ese objeto anteriormente). Este es el aspecto ordinal del número.

b) El número tiene una segunda función: permite prever resultados para situaciones evocadas, que no están presentes y para situaciones que se realizarán en el futuro.

IV. Los campos numéricos considerados

En relación con los intervalos (o rangos) numéricos que son utilizados por los niños —los cuales utilizará el maestro para proponer problemas— esos forman cuatro familias.

Los números visualizables. Este es el intervalo donde el *subitizing* (la visión general rápida) puede funcionar; en esta familia de números se utilizará el cálculo mental. Aquí el niño estará consciente de la aptitud de previsión de los números. Es también en este rango de números que rápidamente se pasará del conteo al cálculo.

Una segunda familia de números sería la de los números familiares. En este campo la serie numérica oral va a ser bien dominada por muchos niños. Son, por ejemplo, los números hasta el 30, como en el calendario o el número de alumnos de un grupo.

Los números que los niños ven con frecuencia, pero un poco menos seguido, constituyen la familia de los números frecuentados; aquí la serie numérica todavía es estable. Es precisamente en esta familia de números donde el niño se dará cuenta de las regularidades de la numeración oral y escrita.

La cuarta familia numérica es el campo de los números grandes, la cual a veces resulta un poco misteriosa para los niños. Aquí las actividades de agrupación dan significado a la numeración oral y a la numeración escrita, y es aquí también donde será necesario utilizar los algoritmos de cálculo.

V. Diversos tipos de situaciones

Las propuestas para la formación de los maestros de pre-escolar y primeros grados de primaria insisten en la construcción de situaciones para el aprendizaje de los números. Tres tipos de situaciones van a permitir al niño conformar el "caudal de experiencia" necesario para una construcción efectiva del concepto de número:

a) Situaciones rituales:

- utilización del calendario (lectura-observación de la sucesión de los números; conteo de "¿cómo dentro de cuántos días iremos a ver a los payasos?" previsión, por ejemplo, estamos a día 12, y tenemos 10 días de vacaciones, ¿qué día será cuando regresemos?);
- la lista, la enumeración de los alumnos presentes (comparación de la asistencia con el día anterior; búsqueda de complementos: por ejemplo, si somos 30 y hay 5 compañeros ausentes, ¿cuántos somos?; evocación del número de presentes el día anterior);
- distribución de todo tipo de materiales (para trabajar la correspondencia término a término; el recuento para distribuirse en grupos);
- juegos diversos con los dedos.

b) Situaciones funcionales. Este tipo de situaciones se desarrollan a partir de problemas; se plantean según la vida de la clase y de su entorno. Por ejemplo, la preparación de una excursión o del recreo, o la organización de un espectáculo.

c) Situaciones construidas, que son elaboradas por el maestro con fines de aprendizaje precisos; se articulan alrededor de problemas para utilizar los números.

El escenario previsto por el maestro demanda al alumno tres cosas:

— actuar en una situación que tiene sentido para él;
— explicar sus procedimientos de resolución; y
— verificar la validez de su acción, la pertinencia de su procedimiento de resolución.

Las situaciones construidas son muy diferentes de las situaciones rituales, pues permiten adaptar ciertos elementos a las posibilidades del alumno; permiten también fijar ciertas restricciones susceptibles de provocar un cambio en los procedimientos de los niños (nada garantiza que una situación funcional o ritual permitirá plantear cuestiones adecuadas en el momento indicado, para provocar el aprendizaje deseado).

Entre las situaciones que se sugieren están las que involucran conjuntos. ¿Qué tipo de problemas utilizar que pongan en juego dos conjuntos desde el punto de vista del número de sus elementos? Se pueden hacer muchos juegos de cartas, ya sean en forma de constelaciones de números escritos o en descomposiciones, juegos de bodas, de batallas y de memoria, o juegos de dominó; en este tipo de acciones se trata de trabajar con comparaciones.

Otra actividad sería hacer que un conjunto B tenga el mismo número de elementos que un conjunto A (por ejemplo, ir a buscar cucharitas para los niños, de una sola vez, sin que sobre ni falte nada); crear un conjunto que tenga el doble o el triple de la colección dada (ir a buscar los zapatos para las muñecas, el número justo de zapatos que hacen falta); completar un conjunto para que tenga el mismo número de elementos que otro.

Cabe señalar que, en el desarrollo de algunas investigaciones, se ha observado que los niños utilizan los siguientes procedimientos:

— procedimientos que evitan el número (estimación visual y correspondencia término a término)
— procedimientos que utilizan más o menos explícitamente el recurso del número (*subitizing*, conteo)
— procedimientos mixtos (correspondencia paquete a paquete, utilizando el *subitizing* y el conteo; utilización de descomposiciones seudoaditivas)

Otro tipo de problemas son los de referencia ordinal. En este tipo los números son utilizados para situarse. Se consideran casos como: localización en una pista, la construcción progresiva de una banda numérica (que por un lado tiene los números escritos en la forma normal y por el otro lado lleva las constelaciones o los nombres de los números); los niños van construyendo esta banda y la utilizan cada vez que la necesitan (Fig. 3).

Se trata de problemas que posteriormente serán utilizados para trabajar el cálculo.

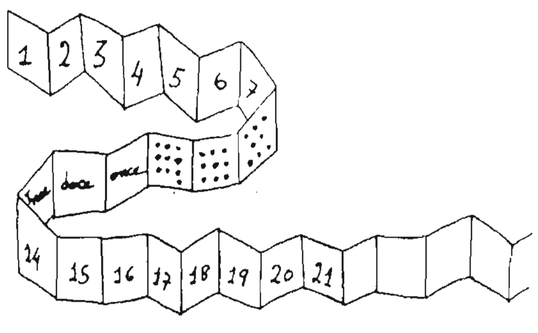


Figura 3

La segunda categoría de problemas es la de los de previsión (o anticipación). Son todos los problemas en los cuales, en el futuro el cálculo será utilizado; son diferentes tipos de problemas ligados a un desplazamiento sobre una pista graduada. Por ejemplo: el caballo está en el cinco (Fig. 4), cayó en el seis el dado, ¿hasta dónde hay que llegar?; si el caballo estaba en el dos y llegó al seis, ¿cuál fue el número que marcó el dado? En dos turnos, el caballo llegó del 36 al 46, ¿cuáles son los números que pudieron haber aparecido en los dados? (Fig. 4).

Estos problemas son muy interesantes, sobre todo para la previsión o anticipación porque, por

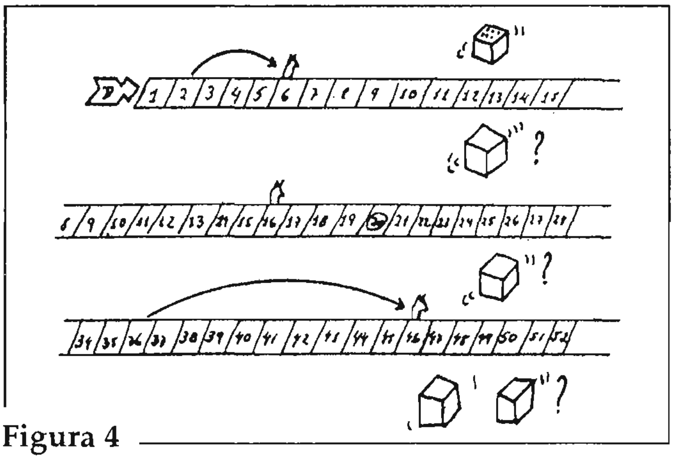


Figura 4

una parte, permiten utilizar el conteo y, al mismo tiempo, emplear progresivamente el cálculo. El maestro puede, poco a poco, modificar las reglas, por ejemplo, que las casillas de cierto color hagan avanzar tres espacios, y las de otro color hagan retroceder tres espacios.

Estos problemas implican tres aspectos: la lectura del dado, el reconocimiento de los números (progresivamente se le escriben los números a los dados para sustituir los puntos) y los desplazamiento dentro del juego.

Otros son aquellos donde interviene la reunión de dos colecciones diferentes con una anticipación necesaria del número de los objetos que se obtienen.

La obtención del tesoro es una actividad con la cual se experimentó. Este juego consiste en fraccionar en dos o más partes un conjunto; tiene diferencias con respecto a las actividades tradicionales; por ejemplo, en dichas actividades se tienen doce fichas y se pide al niño que haga dos montones y diga cuántas hay en cada uno. De ahí se deduce que 12 es igual a cinco más siete. Aquí proponemos para remplazar actividades de este tipo, otras como la siguiente: se tienen muchas fichas, por ejemplo 19, y sobres, unos 3, 4 ó 5; el niño tiene que escribir un mensaje a un compañero para que se puedan poner fichas en todos los sobres, que ninguno quede vacío y que todas las fichas sean utilizadas.

El niño tiene que prever (o anticipar) la repartición de las fichas en los sobres; la validación se hace mediante el desciframiento del código del mensaje.

Tenemos también los problemas de divisiones iguales, ya sea cierto número de partes que tienen que hacerse, o partes que ya tienen un número fijo de elementos, y lo que hay que averiguar es cuántas resultan.

Finalmente se plantean también problemas de intercambio según reglas fijadas previamente; por ejemplo, tres fichas amarillas contra una roja, siempre en situaciones de anticipación.

Esto lleva un último problema que voy a tratar brevemente: el de la numeración escrita. Existen dos aspectos para este problema de la numeración que son simultáneos y complementarios: uno algorítmico y otro constituido por un sistema de agrupamientos e intercambios. Las actividades en relación con el aspecto algorítmico se trabajan a partir de la observación de las series numéricas, de la manipulación de contadores para observar cómo se pasa del nueve a la decena, del 99 a la centena, etc.

Con frecuencia el niño sabe nombrar la sucesión de números antes de saberla decir de acuerdo con las reglas de los adultos; por ejemplo, puede decir cinco-cinco (55), cinco-seis (56), cinco-siete (57), cinco-diez (60) sin saber que se trata del sesenta. Es decir, el niño entendió que es una regla recurrente, pero esto no basta para comprender los números y el valor de cada una de las cifras. De ello surge la necesidad de un trabajo de intercambio. Inicialmente se realizan intercambios del tipo tres contra uno, o uno contra cinco, para comprender que este intercambio modifica el valor. Después se trabaja el intercambio diez por uno y es hasta aquí donde se escribe, pues se ha eliminado el trabajo en bases diferentes de diez.

Hay un trabajo de este tipo que es muy clásico, se llama "el secretario"; los jugadores tiran con los dados y ganan fichas, el secretario va anotando las jugadas y los jugadores no pueden quedarse con más de nueve fichas del mismo tipo.

Se trata de plantear numerosos problemas de este tipo, por ejemplo, existen 348 alumnos en la escuela, y debido a que hay una fiesta, el director tiene que escribir una carta a cada una de las familias, se tienen que comprar timbres que se venden en planillas de 10, ¿cuántas planillas se tiene que comprar? Para resolver este problema la numeración es la herramienta más útil; se trata de encontrar situaciones de este tipo, que sean progresivas para quien juega.

Paralelamente se realiza el trabajo con la numeración oral; se trata de irla desglozando porque tal numeración utiliza reglas de funcionamiento que son muy diferentes de las de la numeración escrita. La numeración oral funciona como la numeración china, en el cual la yuxtaposición de las palabras es, alternativamente, multiplicación y adición, mientras que en la numeración escrita es la posición de la cifra en el número la que indica el valor de agrupamiento.

Hasta hace poco se tomó en cuenta que la numeración oral tiene reglas. Por mucho tiempo se pensó que sólo se trataba de aprenderla de memoria, pero todos los niños fracasaban al resolver problemas que implicaban números más allá de 79 porque en francés, ochenta se dice "cuatro veces veinte" y los niños tenían problemas con esto; ahora hemos tratado de sensibilizar a los maestros sobre este problema de la numeración oral. También se efectúan ejercicios para que los niños descodifiquen numeraciones extranjeras, a fin de que vean que hay muchas maneras de designar a los números y que cada una tiene sus propias reglas. Las numeraciones que más utilizamos son sobre todo la numeración maya (que aquí se llama "azteca"), que es en base 20; la numeración egipcia que es simplemente una yuxtaposición de símbolos que designan las potencias de la base según la cual hay que adicionar los valores, y la numeración china porque se acerca a la numeración oral.

Este trabajo no tiene por objetivo que los niños desarrollen habilidades con otras numeraciones, es sólo para que se percaten de que una numeración se tiene que analizar, y para que se comprenda mejor el papel que juega el cero, porque este concepto no existe en la numeración oral. Jamás se pronuncia y cuando los niños escriben dictados de números, siempre olvidan los ceros.

Hoy se prefiere realizar juegos en base diez; por ejemplo, el "del banquero". Antes se utilizaban todas las bases: dos, tres, cuatro, cinco, etc. Era muy interesante en el plano experimental y funcionaba en las clases en que se intentó hacer esto, pero la difusión en todo el país (Francia), fue pésima. Los maestros no entendían muy bien porqué se hacia ese trabajo y había muchos que pedían a los niños hacer muchos cálculos en bases distintas de diez, lo que era poco provechoso. Ahora se ha pedido dejar de lado ese trabajo. Hay siempre una gran diferencia entre la experimentación y la difusión.

LECTURA: VALOR DE LA POSICIÓN Y ADICIÓN EN DOBLE COLUMNA*

VALOR DE LA POSICIÓN Y ADICIÓN EN DOBLE COLUMNA

Por valor de la posición entendemos que en el número 333, por ejemplo, el primer tres quiere decir trescientos (o tres centenas), el segundo 3 significa treinta (o tres decenas) y el tercer 3 quiere decir tres. Evidentemente, el valor de la posición es importante, porque los niños que no lo entiendan se verán seriamente incapacitados para sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades. El valor de la posición se enseña actualmente en primer grado y en todos los grados posteriores de la escuela elemental. Sin embargo, la investigación ha demostrado que la mayoría de los niños, hasta tercero o cuarto curso, piensan que el 1 de 16 quiere decir uno. Estos hallazgos fueron presentados por Mieko Kamii (1980, 1992) y confirmados por otros investigadores,... En este capítulo explicaré por qué la enseñanza tradicional obtiene tan poco éxito en esta área. Finalizaré resumiendo la investigación más reciente sobre la comprensión que el niño tiene del valor de la posición y después me centraré en cómo los niños piensan en «decenas y unidades» independientemente de su interpretación de nuestro sistema escrito de numeración. En la tercera parte, relacionaré la práctica educativa con estos hallazgos de la investigación.

La comprensión infantil del valor de la posición

El estudio de Ross

Ross (1986) partió del trabajo de Mieko Kamii (1980, 1982) y de Resnick (1982, 1983), para realizar un estudio acerca de la comprensión de los niños del valor de la posición. Los sujetos de su estudio eran 60 niños, en grupos de 15, de segundo a quinto grado. Su muestreo fue peculiar porque seleccionó al azar niños de 33 aulas, desde el nivel inicial de cinco escuelas primarias de Butte Country, California. «Se seleccionaron escuelas representativas de comunidades urbanas y rurales, públicas y privadas, y con diferentes programas y textos de matemáticas, tamaño de aulas y clase social» (Ross, 1986, pág. 3). En sesiones individuales, Ross mostraba a cada niño 25 palitos de madera (depresores de lengua), le pedía que los contara y que «escribiera el número». Después rodeada con un círculo el dígito de las unidades (5) y preguntaba, «¿Tiene esta parte algo que ver con los palos que tienes?» Tras la respuesta del niño y otras respuestas específicas, indicaba el dígito de las decenas (2) y planteaba la misma pregunta sobre el significado del numeral 2.

Los dos niveles de respuesta que encontró se distribuían del siguiente modo:

Nivel 1. Aunque los números de dos cifras representan la cantidad numérica total de una colección de objetos, el niño indica que cada una de las cifras de un número de dos cifras no tiene significado numérico.

Nivel 2. Aunque el número representa la cantidad total, el niño *inventa* significados numéricos para cada cifra individual; estos significados inventados no guardan relación con las nociones del valor de la posición de agrupamiento en decenas y/o unidades...

Ejemplo: En 25 palos, «5» significa grupos que contienen cinco palos, «2» significa grupos que contienen dos palos....

Nivel 3. Aunque todo el número represente la cantidad total, cada una de las cifras individuales tienen significados relacionados con grupos de decenas o unidades, pero el niño posee una idea parcial o confusa de cómo funciona todo ello. La suma de las partes no hace falta para que sea igual al todo.

— Tipo A. Los significados de valor de la posición asignados a cada una de las cifras individuales son inconsistentes o incompletos.

*Constance Kamii. "Valor de la posición y adición en doble columna", en: *Reinventando la aritmética II.* Aprendizaje-visor, Madrid, 1992. pp. 35-51.

— Tipo B. Cada una de las cifras representa a las unidades.

— Tipo C. El niño invierte el significado de las cifras: la cifra de la derecha representa decenas y la de la izquierda unidades.

Nivel 4. Todo número de dos cifras representa una cantidad completa de objetos. La cifra de la izquierda representa la partición de toda la cantidad en grupos de diez unidades (la cifra de la decena), y la de la derecha, la parte compuesta de unidades (la cifra de las unidades). (Ross, 1986, pág. 5). El todo deber ser igual a la suma de las partes.

En el cuadro 2.1 se recogen los hallazgos de Ross (1986). Como se desprende de sus conclusiones, encontró exactamente lo mismo que Mieko Kamii (1980, 1982): «Aunque todos los niños del estudio sabían determinar el número de palos y escribir el numeral correcto, no fue hasta llegar a cuarto grado que la mitad de los niños demostraron que sabían que el 5 representaba 5 palos y el 2 representaba 20 palos» (Ross, 1988, pág. 5).

TABLA 2.1
Actuación en la tarea de las varitas
(por número de niños)

	Nivel de actuación			
Curso	*1*	*2*	*3*	*4*
2	5	2	5	3
3	7	1	2	5
4	0	7	0	8
5	1	4	0	10
Total	13	14	7	26

n = 15 por curso
chi cuadrada = 30,1; df = 9
P <. 0004

Extraído de «The Development of Childrens Place value Numeration Concepts in Grades Two Trough Five» S. H. Ross, 1986, comunicación presentada en el congreso anual de la American Educational Research Association, San Francisco, pág. 6. Reproducido con autorización.

El estudio de Silvern

Silvern entrevistó a 98 niños de clase media baja que cursaban segundo, tercero y cuarto grado en tres pequeños núcleos rurales, al este de Alabama. Dos de las tareas trataban sobre el valor de la posición y adición con reagrupamiento.

La tarea sobre el valor de la posición de Silvern era semejante a la de Ross, pero él empleó 16 fichas. Mostraba a cada niño una tarjeta en la que había escrito el número 16 y un montón de 16 fichas. A continuación le decía, «He escrito el número 16 en esta tarjeta y me parece que aquí tengo 16 fichas. ¿Podrías contarlas para asegurarte?». Después de que el niño contara las fichas, Silvern rodeaba con un círculo el 1 de 16 y preguntaba, «¿Ves esta parte? ¿Qué significa?» Pedía al niño que demostrara su respuesta con las fichas. Si el niño señalaba sólo una ficha, Silvern apuntaba las 9 restantes y preguntaba, «¿y estas otras? ¿Esto debe ser así o pasa algo raro?». Las respuestas que los niños dieron a las preguntas sobre decenas se agruparon en tres categorías:

1. El niño respondía que el 1 de 16 significaba una y después señalaba una ficha.
2. El niño respondía que el 1 de 16 significaba diez y después señalaba una única ficha.
3. El niño respondía que el 1 en 16 significaba diez (un diez o decenas) y señalaba 10 fichas.

Se calcularon los porcentajes de las 3 categorías en cada curso escolar. Se detallan en la Tabla 2.2, en la que puede observarse que la proporción de niños de tercero que dijeron que 1 en 16 significaba 10 fue del 29%, la misma cantidad de estudios anteriores. Sin embargo la proporción de niños de cuarto que lo dijeron fue sólo del 35%, en comparación con el 50% encontrado en estudios anteriores.

TABLA 2.2
Actuación en la tarea del valor de la posición
(en porcentajes)

		Categoría		
Curso	*n*	*1*	*2*	*3*
2	26	85,0	7,5	7,5
3	24	67,0	4,0	29,0
4	48	59,0	6,0	35,0

Silvern examinó cómo realizaban los mismos niños la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 37 \\ +\ 48 \\ \hline \end{array}$$

Pidió a los niños que la resolvieran mentalmente y después agrupó sus repuestas en tres categorías:

1. El niño no intentó realizar la suma o dio una respuesta disparatada (por ejemplo, 715).
2. El niño escribió el número 75 (o 74 o 76).
3. El niño escribió el número 85 (u 84 u 86).

Como puede observarse en la Tabla 2.3, muchos niños de segundo grado tienen problemas para reagrupar el diez, pero casi todos los niños sabían resolver la suma en tercer grado, empleando el algoritmo que les habían enseñado en la escuela. A los de cuarto grado no se les pidió que la resolvieran porque habría sido demasiado fácil para ellos.

TABLA 2.3
Actuación en la tarea de adición
(Porcentaje)

	Categoría			
Curso	*n*	*1*	*2*	*3*
2	26	42,0	31,0	27,0
3	24	8,4	0	91,6

Este estudio deja claro que aunque los niños de tercero resuelvan correctamente algunas sumas de 2 cifras con llevadas, la mayoría de ellos cree que el 1 de 16 significa 1.

Continuaré con un estudio similar que llevé a cabo con sujetos procedentes de un nivel socio-económico distinto.

El estudio de Kamii

En la primera de 1987, entrevisté a 32 alumnos de segundo, de 2 aulas, y a 40 de tercero, de 2 aulas, de dos escuelas públicas de un barrio e Birmingham, Alabama. El sistema escolar basa su prestigio en las buenas puntuaciones que los alumnos consiguen en los test. El hecho de que sólo hubiera entre 16 y 20 alumnos por aula refleja el estatus de clase media o media alta de las zonas que abarcaban dichos centros.

Seguí el mismo procedimiento que Silver en la tarea del valor de la posición, pero utilicé dos tarjetas, en una había escrito 16 y en la otra 54. En la Tabla 2.4. se recoge la proporción de niños que respondió que el 1 de 16 significaba diez y que el 5 de 54 significaba 50. Como puede verse, el porcentaje de 5 en 54 es mayor que el de 1 de 16. Tal vez sea debido a que los niños pensaron en decenas y unidades mientras respondían al 16 y mejoraron su actuación en la siguiente tarea.

Las sumas que debieron realizar fueron:

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ +\ 28 \\ \hline \end{array}$$

En segundo grado, la proporción de niños que dio la respuesta correcta fue el 84% y en tercer grado, el 100%. Por consiguiente, puede afirmarse una vez más que, la habilidad para producir respuestas correctas en la adición de las cifras siguiendo el algoritmo tradicional, no implica que los niños hayan comprendido el valor de la posición.

TABLA 2.4
Actuación en la tarea de sobre el valor de la posición
(Porcentaje)

	Categoría		
Curso	*n*	*1 de 16*	*5 de 54*
2	32	16,0	28,0
3	40	30,0	57,5

El estudio de Janvier y Bednarz

El estudio comprensivo dirigido por Bednarz y Janvier (1982) en Montreal contenía una gran variedad de tareas ingeniosas de las que voy a describir solamente una de ellas. Los sujetos que tomaron parte en esta tarea fueron 75 de tercer grado y 45 de cuarto grado, de una escuela de clase media y media alta. (En el estudio completo tomaron parte muchos otros niños, algunos de primer grado, y otros que fueron evaluados en grupos).

En una entrevista individualizada, el investigador esparcía sobre la mesa 20 etiquetas, las 20 etiquetas que aparecen en la figura 2.1., y decía, «tengo este número (escribía 402 y lo leía), y este número (escribía 513 y lo leía). Estoy pensando en un número que es mayor que este (402) y menor que este (513), un número que se encuentra entre ambos» (pág. 45). (El número era 445).

FIGURA 2.1

Las tarjetas del estudio de Bednarz y Janvier

0 unidades	1 unidad	2 unidades	3 unidades	4 unidades	5 unidades
10 unidades	11 unidades	12 unidades			
3 decenas	4 decenas	5 decenas	40 decenas	41 decenas	42 decenas
43 decenas	45 decenas	51 decenas			
3 centenas	5 centenas				

Extraído de «The understanding of Numeration in Primary School» N. Bednarz y B. Janvier, 1982, Educational Studies in Mathematics, 13, pág. 45. Copyright 1982 de Reidel Publishing Company. Reproducido con autorización de Kluwer Academic Publishers.

A continuación, el investigador mostraba al niño una hoja donde aparecía lo siguiente (pág. 45).

402 ? 513

tu número

____

____

____

____

____

____

Las instrucciones eran las siguientes:

> Debes encontrar el número en el que estoy pensando, pero para hacerlo tienes que emplear las etiquetas. Puedes emplear todas las que necesites. Cuando escribas tu número en esta columna (mostrándole la hoja), debes enseñarme las etiquetas que has utilizado y yo te diré si mi número es mayor o menor que el tuyo (pág. 45).

Si el niño no adivinaba el número, el entrevistador se lo decía y le pedía que lo formara con las etiquetas. A fin de evaluar la capacidad del niño para comprender el valor de la posición, los investigadores también le pedían que escribiera otros números compuestos con diferentes etiquetas, por ejemplo, el número formado por una etiqueta de «42 decenas», dos etiquetas de «4 decenas» y una etiqueta de «12 unidades». Como puede observarse en la Tabla 2.5, sólo el 27%de los niños de tercero y el 44% de los cuarto dieron pruebas de comprender las centenas, las decenas y la unidades (categoría 3). Los niños de la categoría 1 emplearon todos los numerales sin prestar atención a las partes escritas en las etiquetas. Por ejemplo escribieron 4405 cuando se les mostraron las siguientes etiquetas: 4 unidades, 40 decenas y 5 centenas. Los niños de la categoría 2 buscaron primero las decenas y luego las unidades, como si las decenas y las unidades sirvieran sólo para el orden de los numerales escritos. Por ejemplo, para formar 445, seleccionaban 4 decenas y 5 unidades y después buscaban 4 centenas que no existían.

TABLA 2.5.
Actuación en la tarea con tarjetas
(Porcentaje)

	Curso	
	3	*4*
1. Trabaja exclusivamente con el número de la tarjeta sin prestar atención a las palabras unidades, decenas, centenas; no da significado a los símbolos unidades, decenas, centenas.	41	35
2. Unidades, decenas y centenas se relacionan principalmente con la idea de orden en la escritura (no con la idea de agrupamiento).	30	21
3. Da significado a las unidades, decenas y centenas como agrupamientos*.	27	44
4. Inclasificable.	2	0

*La tercera categoría representa una buena comprensión.

Extraído de «The Understanding of Numeration in Primary School», de N. Bednarz y B. Janvier 1982. Educational Studies in Mathematics, 13, pág. 46. Copyright de Reidel Publishing Company, 1982. Reproducido con autorización de Kluwer Academic Publishers.

En su artículo, Bednarz y Janvier (1982) mencionan repetidas veces áreas concretas del currículo escolar y apuntan sus deficiencias. Dado que evaluaron las ideas de los niños sobre centenas, decenas y unidades empleando una amplia gama de tareas con objetos e ilustraciones, sus conclusiones son especialmente convincentes. Incluso en tercero y cuarto grado, afirman, la mayor parte de los alumnos no entienden el valor de la posición. No obstante, señalan que las centenas son mucho más difíciles en todas la tareas que las decenas.

El estudio de Cauley

El estudio de Cauley (1989) se diferencia de los anteriores en que incluye la sustracción. También revela la incapacidad de los niños para entender el valor de la posición, aunque contesten correctamente la preguntas.

En una escuela estatal suburbana y una escuela católica urbana de Delaware, Cauley (1988) identificó a 34 niños entre 90 de segundo y tercer grado, que dominaban muy bien la resta. Cauley hizo entrevistas individuales a estos niños para indagar sobre su razonamiento y sobre lo que habían escrito. La figura 2.2 muestra dos ejemplos de lo que habían hecho. Una de las preguntas que formuló fue «Antes de tomar prestado tenías 56 y después tenías todo esto (rodeó con un círculo el minuendo y todos los «préstamos»); ¿Tenías más antes de tomar prestado, después de tomar prestado o tenías lo mismo?» (pág. 203). Sólo el 41% de los 34 niños que dominaban el empleo del algoritmo respondieron que el número era el mismo después del préstamo, mientras que el 32% dijo que tenía más antes de tomar prestado y el 24% dijo que tenía más después.

FIGURA 2.2

Trabajo escrito de los niños del estudio de Cauley sobre la sustracción con «préstamos».

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 1} \\ \cancel{5}6 \\ -\ 38 \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 16} \\ \cancel{5}\cancel{6} \\ -\ 38 \\ \hline 18 \end{array}$$

Un hallazgo común a todos estos estudios es que los niños de los cursos iniciales piensan que el 2 de 25 significa dos y que el 1 de 16 significa uno. ¿Por qué continúa leyendo cada cifra como si tuviera significado después de que en todos los cursos se les ha enseñado el valor de la posición?

Abordaremos esta cuestión en la sección siguiente.

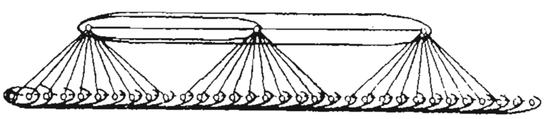
Construcción gradual de un sistema de decenas

Como hemos visto en el Capítulo 1, en la tarea de dejar caer canicas en dos vasos y posteriormente en la discusión sobre orden e inclusión jerárquica, los niños de primer curso se hallan en la fase de construir un sistema de unidades.

Cuando dicen el número 32, por ejemplo, están pensando en 32 unidades, no en 3 decenas y 2 unidades.

Para ser capaz de comprender que el número 32 se compone de 3 decenas y 2 unidades, el niño tiene que construir un segundo sistema —el de las decenas— sobre el primer sistema. Esto se ilustra en la Figura 2.3. Del mismo modo que el sistema de unidades no puede introducirse en la mente del niño desde el exterior, tampoco el sistema de decenas puede transmitirse a través de objetos y personas. Mientras que los numerales escritos son conocimiento social, y la decisión de emplear diez como base es también una convención, las relaciones jerárquicas todo-parte, mostradas en la Figura 2.3, pertenecen al conocimiento lógico-matemático.

FIGURA 2.3
El sistema de las decenas construido sobre el sistema de las unidades.



Al igual que el sistema de unidades, el sistema de decenas requiere que el niño sintetice las relaciones de orden y de inclusión jerárquica. También en el sistema de decenas el niño tiene que ordenar las unidades mentalmente e incluir «uno» en «dos», «dos» en«tres», etc.; pero las unidades del sistema son, en realidad, decenas. Para el niño ya es demasiado duro construir el sistema de las unidades. Hacer mentalmente un grupo con diez unidades es una labor hercúlea y los adultos no son capaces de apreciar su grado de dificultad.

Para que el niño llegue a ser capaz de comprender el sistema de decenas, es preciso que disponga de tiempo suficiente para articular el primer sistema (de unidades), de lo contrario éste no se consolida lo suficiente y no sirve de base al segundo (de decenas). Por esta razón resulta imposible al niño de primer grado comprender el valor de la posición, como ya expuse en mi primer libro, «Los niños reinventan la aritmética» (Kamii, 1985). También por esto hay tantos niños que continúan leyendo cada cifra como si fuera representativa, a pesar de todas las explicaciones y de todas las actividades sobre el valor de la posición que repiten año tras año.

Comentaré en esta sección dos estudios que demuestran que los niños piensan en unidades y que constituyen gradualmente el sistema de decenas entre los cursos segundo y quinto.

El estudio de Ross

Este estudio de Ross (1986) forma parte del estudio comprensivo aludido anteriormente. Ross trabajó haciendo entrevistas individuales (a 15 niños entre segundo y quinto grado). Presentó a los niños 48 alubias y 9 tazas de plástico y les pidió que metieran 10 en cada taza. Las 5 tazas no utilizadas se apartaron a un lado, de manera que sobre la mesa quedaban 8 alubias y 4 tazas, cada una de las cuales contenía 10 alubias.

A continuación, Ross preguntaba cuántas alubias había en total, y seguía, «¿Cómo lo sabes?». Observó estos tres niveles de respuestas:

1. Los niños eran sencillamente incapaces de cuantificar los objetos agrupados.
2. Los niños contaban principalmente por unidades en lugar de emplear alguno de los métodos más eficaces hallados en el nivel 3.
3. Los niños contaban por decenas y después añadían las ocho alubias sueltas. Algunos de ellos hicieron multiplicaciones explícitas o implícitas, diciendo «4 de diez son 40» ó «4 por 10 son 40».

En la Tabla 2.6 se observa que sólo nueve niños de segundo (60%) contaron las alubias de diez en diez, a pesar de que las habían puesto en las tazas en grupos de diez. También se observa que la proporción de niños que contaban de diez en diez aumentó progresivamente en función de su edad. Esto subraya el hecho de que los niños piensan en términos de unidades hasta que construyen el sistema de decenas.

A continuación, para evaluar la conservación de la cantidad, Ross (1986) vertió una de las cuatro tazas sobre la mesa, de forma que quedaban 10 alubias en cada una de las tres tazas y otras 18 alubias sueltas. Después preguntó, «¿Crees que ahora hay más o menos alubias que antes?» Tras la respuesta, preguntaba, «¿Cómo lo sabes?». En esta prueba, los niños del nivel 1, los no conservadores, estaban convencidos de que la cantidad no era ni mayor ni menor tras derramar las alubias de una taza. (Por conservación se entiende la habilidad de una persona para deducir que una cantidad ha permanecido invariable después de que haya cambiado su apariencia y para explicar por qué). Los niños del nivel 2, por contra, cambiaron de opinión, de no conservación o conservación, cuando el experimentador continuó haciendo preguntas, «¿Cuántas alubias hay ahora si antes había 48?». En el nivel 3 había conservadores sólidos que no necesitaban indicaciones para deducir que la cantidad era la misma.

TABLA 2.6
Actuación en la tarea de las alubias
(por número de niños)

	Nivel de actuación		
Curso	*1*	*2*	*3*
2	2	4	9
3	0	4	11
4	1	1	13
5	0	0	15
Total	3	9	48

n = 15 en cada curso
chi cuadrada = 11,1; df = 6
P < .0884

Extraído de «The Development of Children's Place Value Numeration Concepts in Grades Two trough Five» S.H. Ross, 1986, comunicación presentada en el congreso anual de la American Educational Research Association, San Francisco, pág. 17. Reproducido con autorización.

Como puede observarse en la Tabla 2.7, los niños de segundo grado demostraron estar en un nivel sorprendentemente bajo en esta tarea de conservación. Seis de ellos (40%) resultaron ser no conservadores sólidos y cuatro (27%) resultaron estar en el nivel 2, tras indicar que 4 decenas y 8 unidades no eran lo mismo que 3 decenas y 18 unidades. Asimismo se observa en el cuadro que la proporción de conservadores sólidos aumenta con la edad. También esto es una demostración de la construcción gradual del sistema de decenas sobre el sistema de unidades.

TABLA 2.7
Actuación en la tarea de conservación
(por número de niños)

	Nivel de actuación		
Curso	*1*	*2*	*3*
2	6	4	5
3	3	1	11
4	1	3	11
5	0	1	14
Total	10	9	41

n = 15 en cada curso
chi cuadrada = 16,6; df = 6
P < .0163

Extraído de «The Developement of Children's Place Numeration Concepts in Grades Two trough Five» S. H. Ross, 1986, comunicación presentada en el congreso anual de la American Educational Research Association. San Francisco, pág. 19. Reproducido con autorización.

El estudio de Kamii

Este otro estudio (Kamii, 1986) realizado en Ginebra, Suiza, también demuestra la construcción gradual del sistema de decenas entre el segundo y el quinto curso. Entrevisté a 100 niños de primero y quinto curso de una escuela pública de un barrio de clase media baja. Formé un grupo con unos 20 niños de cada curso, que era el número de alumnos por aula.

Empleando 200 fichas de plástico idénticas, dije a los niños en entrevistas individuales que había escondido algunas fichas en una carpeta y que se las mostraría un momento pero que no les daría tiempo a contarlas. Les hice una demostración de 3 segundos con la mano y les pedí que escribieran la cantidad aproximada antes de contar las fichas. A los de primero les mostré entre 70 y 80 fichas y a los mayores, entre 98 y

120 fichas. (Cambiaba el número de un niño a otro para evitar que se lo contaran entre ellos). Cuando habían escrito el número aproximado, les pedía que contaran las fichas, para ver lo acertados que habían estado en su cálculo. Después les pedía que cerraran los ojos para que yo pudiera esconder unas cuantas fichas en la mano, y les pedía que calcularan cuántas me había quedado en la mano contando las que había en la mesa, pero contándolas de diez en diez.

El primer objetivo era observar cómo contaban una gran cantidad de fichas espontáneamente. El segundo, observar como las contaban de diez en diez.

Todos los de primer grado y la mayoría de los otros cursos contaron las fichas espontáneamente de una en una. Contar espontáneamente de 10 en 10, haciendo montones separados de 10, apareció por primera vez en cuarto grado, sólo entre el 14% de la clase. (Me sorprendió tanto la cantidad de ellos que prefería contar por unidades que a veces pedía a los niños de cuarto y quinto que contaran las 200 fichas que yo tenía, para ver si entonces se decidían a contar de 10 en 10. Siguieron contando de una en una). La Tabla 2.8 muestra lo que ocurrió cuando les pedí que contaran por decenas. Esta tarea puso de manifiesto que contar por decenas revela problemas para hacer relaciones entre el todo y las partes. El nivel inferior de respuesta, recogido en la primera posición de la tabla, llamada «No saben», incluye una gran variedad de respuestas, que abarcan desde «No sé cómo» hasta contar cada ficha diciendo «10, 20, 30» etc.

La segunda categoría, llamada «Hacen montones de 10 sin conservación del todo» es significativa. Cuando pedí a los niños de primero que contaran las fichas de diez en diez, hicieron rápidamente montones de diez, como les habían enseñado en clase. Sin embargo, los niños no continuaron contando después de haber hecho grupos de diez. Tuve que preguntar cuántas había en total y después de contar los montones, respondieron «siete», yo exclamé, «¿Siete fichas en total, yo veo más de siete?», manifestando firmemente mi desacuerdo. Entonces los niños de primer grado contaron las fichas de un montón y respondieron «diez». Hasta más adelante no se me ocurrió que esos niños no podían pensar *simultáneamente* en los montones y en las fichas de los montones. Como no podían pensar *simultáneamente* sobre las decenas y las unidades, siguieron contestando que había 7 (montones) o 10 (fichas), pero nunca 70, cuando les preguntaba una y otra vez cuántas fichas había. Sólo contando de una en una, como los niños del nivel 1 del estudio de Ross (1986), llegaban estos niños de primero a encontrar las 70 fichas.

La tercera categoría, llamada «Sin dividir el todo entre las partes», también fue sorprendente. Los niños de esta categoría en realidad contaban de una en una. Contaban 10 fichas primero y las dejaban juntas. Después contaban otras 10 y hacían un montón diferente, pero decía «Veinte» cuando unían el primer y el segundo montón. Después, contaban otro montón de 10, especialmente separados del montón de 20. Al unir este montón de 10 al anterior de 20 decían, «Treinta». Continuaron con este proceso hasta que terminaron de contar todas la fichas.

La cuarta categoría «Hacen montones de 10 con conservación del todo» es idéntica al nivel más elevado del estudio de Ross (1986). Los niños de este grupo hicieron montones independientes de 10 y después los contaron para determinar el número total de fichas. A diferencia de los niños de la segunda categoría, los de la cuarta hicieron montones de 10 con la intención de volver atrás y contar las fichas de diez en diez. En otras palabras, los niños de la cuarta categoría podían pensar en decenas y unidades simultáneamente. Esta es una indicación de que habían construido un sistema de decenas sobre su sistema de unidades.

La tercera categoría llega a comprenderse una vez visto este proceso evolutivo. Los niños que sólo tienen el sistema de unidades en la mente, harán un montón de 10 fichas temporalmente para cumplir la petición del entrevistador. Sin embargo, no dividen la serie de unidades en segmentos de 10 porque aún no pueden pensar en términos de decenas. Puede observarse en la Tabla 2.8 que el sistema de decenas (nivel 4) aparece por primera vez en segundo grado y que la proporción de niños en esta categoría aumenta a partir de ahí. (El porcentaje disminuye en cuarto curso pero este problema ocurre cuando la muestra es pequeña).

TABLA 2.8
Cuatro formas de responder cuando se pide que cuenten de diez en diez
(Porcentaje)

	Curso				
	1 (n=21)	2 (n=18)	3 (n=21*)	4 (n=22)	5 (n=18)
1. No saben	33	6			
2. Hacen grupos de diez sin conservación del total	29	0			
3. No separan el todo en partes.	35	56	19	64	22
4. Hacen grupos de diez con conservación del total.	39	71	36	578	

*El comportamiento de dos niños (10%) no encajaba en ninguna de las categorías.

A pesar de que en este estudio tomaron parte sólo 100 niños, lo apoyan los 60 años de investigación de Piaget y sus colaboradores, que en repetidas ocasiones demostraron la aparición de las operaciones concretas a la edad de 7 a 8 años (en segundo grado), con una multitud de tareas cognitivas. A esta edad, la construcción de relaciones todo-partes se ha encontrado en clasificación (Inhelder & Piaget, 1959/1964), medición de (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948/1960), fracciones simples (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948/1960) y conmutatividad de la adición (Gréco, 1962).

Partiendo de estos datos ofrecidos por la investigación me gustaría pasar a explicar por qué enseñar tradicionalmente el valor de la posición no es acertado y por qué no es deseable enseñar a sumar en doble columna en los dos primeros cursos.

Implicaciones para la enseñanza

Enseñanza del valor de la posición

Actualmente, a muchos de los maestros de primer grado se les dice que comiencen en el nivel «concreto» de «contar objetos reales» y que pidan a los niños que hagan grupos de 10 palos o palillos y que los aten con gomas. Cuando han hecho suficientes, los maestros continúan con ejercicios sobre decenas y unidades formulando preguntas con esta «¿Cuántas decenas tienes?» y «¿Cuántas unidades tienes?».

En el siguiente nivel, el nivel «semiconcreto» de «contar objetos en dibujos», se realizan ejercicios similares. En lugar de utilizar bandas de goma alrededor de los objetos, los niños aprenden a dibujar círculos alrededor de cada grupo de 10 objetos que aparecen en el papel. Después, completan los espacios en blanco en ejercicios como el siguiente, que tienen por objeto hacerles avanzar hacia el nivel simbólico:

________decenas ________ unidades

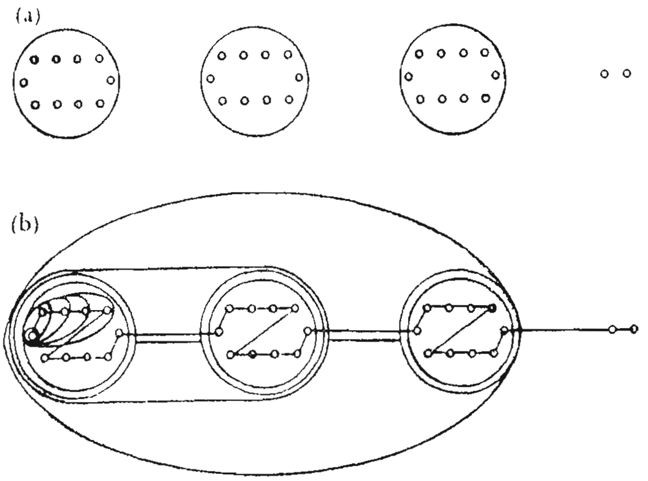
Estos ejercicios presentan muchas variaciones, sin embargo, son similares porque todos intentan enseñar nuestro sistema convencional de numeración escrita desde una perspectiva ajena al niño. Todos ellos ignoraron la necesidad que el niño tiene de construir el sistema de decenas sobre el sistema de unidades, mediante la abstracción constructiva.

El conocimiento empírico que el niño puede obtener de 3 conjuntos y 2 objetos sueltos se presenta esquemáticamente en la Figura 2.4a. Esta figura carece por completo de las relaciones mentales que el niño tiene que introducir entre los objetos para cuantificarlos numéricamente. En la figura 2.4b he dibujado círculos, óvalos y líneas para indicar el sistema de unidades y decenas que el niño tiene que imponer en los objetos. Cada uno de estos sistemas, como se recordará, consiste en la síntesis de la inclusión jerárquica y el orden. En la figura 2.4b, la inclusión jerárquica de las unidades se ha dibujado sólo hasta cinco, para que no resultara demasiado confusa.

El estudio de Ross (1986) sobre la conservación que los niños hacen de 4 decenas y 8 unidades, y mi estudio sobre su forma de contar de 70 a 120 fichas deberán convencer al lector de que todas estas cuentas empíricas y creaciones de grupos de 10 no son acertadas ni siquiera con bloques de base diez. El sistema de las decenas deben construirlo los niños, en su mente, sobre su sistema de unidades, mediante la abstracción constructivista.

FIGURA 2.4

Representación esquemática de (a) el conocimiento empírico del grupo de objetos y (b) de la estructura mental de las decenas y unidades impuesta a los objetos.



Adición en doble columna

Todos los textos de matemáticas introducen la regla o el algoritmo de la suma en doble columna que obliga al niño a sumar primero las unidades y luego las decenas. El encanto de esta regla es que nos permite tratar cada columna como si fueran unidades. Este procedimiento es eficaz para los adultos que entienden el valor de la posición. Sin embargo, este algoritmo tiene el efecto de confundir a los alumnos de primero y segundo grado, que aún no la entienden, además de «desenseñarles» lo poquito que comprenden del valor de la posición.

Tomemos, por ejemplo esta suma:

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 13 \\ \hline \end{array}$$

Los niños que han aprendido con el método tradicional dirán, «tres y tres son 6, así que escribo un 6 aquí abajo. Y 1 y 2 son 3 así que pongo un dos, la respuesta es 26». En otras palabras para ellos 3 + 3 y 1 + 1 sumados son 26, en lugar de 8. No es de extrañar que aprendan memorizando reglas. Memorizar es el único modo de abordar algo que no tiene sentido.

En el Capítulo 6 veremos que cuando se les permite inventar sus propios procedimientos, invariablemente comienzan a sumar por las decenas y siguen con las unidades. Por lo general, su procedimiento mental para hacer esa suma es como sigue:

«10 y 10 son 20 y 3 y 3 son 6, la respuesta es 26». Hablando y considerando el 1 de 13 como 10, se fomenta que el niño piense cómo «funciona» el valor de la posición.

Conclusión

En este capítulo he presentado los resultados de las investigaciones para explicar por qué debe modificarse la enseñanza tradicional del valor de la posición y de la suma en doble columna.

LA SUMA Y LA RESTA

LECTURA: PROBLEMAS FÁCILES Y PROBLEMAS DIFÍCILES*

PROBLEMAS FÁCILES Y PROBLEMAS DIFÍCILES

> Cuando a los niños les planteamos problemas de suma y resta, Laura dejó sin resolver el siguiente problema:
>
> En el recreo se vendieron 410 tacos y quedan 200 tacos, ¿cuántos tacos había al iniciar la venta?

Y este es el motivo por el cual Laura no resolvió el problema:

> "Es que en éste me confundí, porque sentía que era de resta, todo me decía que era de resta, pero también veía que era de suma, y no sabía porqué..."

LAURA, SEXTO GRADO, 11 AÑOS

Una idea muy arraigada es que los problemas de suma son más fáciles que los problemas de resta. También se piensa que los de multiplicación son más fáciles que los de división.

Si consideramos que tales ideas son correctas, podemos entonces hacer estas afirmaciones:

- son las operaciones (en el sentido tradicional del término: adición, sustracción...) las que diferencian los problemas;
- por lo tanto, dos problemas que implican la misma operación tienen el mismo nivel de dificultad, y
- si dos problemas implican dos operaciones diferentes son de nivel de dificultad diferente.

En las siguientes páginas discutiremos estas afirmaciones. Como se va haciendo costumbre, la discusión la haremos desde la perspectiva de los niños.

*Alicia Ávila, "Problemas fáciles y problemas difíciles", en: *Los niños también cuentan*. SEP, Col. Libros del Rincón, México, 1993, pp. 55-65.

Una suma fácil y una no tan fácil

Este es el problema que Laura no resolvió:

En el recreo se vendieron 410 tacos y quedan 200 tacos, ¿cuántos tacos había al iniciar la venta?

También les pedimos a los niños resolver este problema:

En la cooperativa había 300 tortas, después trajeron 250 tortas, ¿cuántas tortas hay ahora en la cooperativa?

Estos dos problemas se resuelven con sumas de dificultad muy similar:

Con ésta el problema **tortas:** 300+ 250 = X	Con ésta el problema **tacos:** 410 + 200 =X

Y aunque los cálculos son muy parecidos, los niños encontraron dificultades diferentes. Casi todos resolvieron adecuadamente el problema **tortas,** realizando la suma correspondiente.

En cambio, en el problema **tacos,** muchos no llegaron a la solución correcta.

En los siguientes párrafos veremos por qué una suma resultó fácil y otra resultó difícil.

Con un esquema podemos representar así el problema **tortas:**

$$\boxed{300} \xrightarrow{+250} \boxed{X}$$

Este esquema significa lo siguiente:

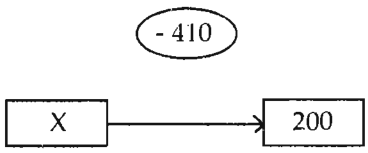
- se conoce la cantidad de tortas que había inicialmente (300);
- esta cantidad se modifica por las 250 tortas que trajeron, y

- se desconoce cuántas tortas hay después de que trajeron las 250.

En este problema, la suma es muy natural. Se trata de agregar, a la cantidad que se tiene inicialmente, otra cantidad; así, la cantidad inicial crece.

Y esa es la primera idea que los niños tienen sobre la suma: **una suma es una cantidad inicial que crece.** Y no se necesita ir a la escuela para construir esta idea, aún los niños de 3 a 5 años cuentan con ella. La manera en que está planteado el problema **tortas** coincide con esa idea. Podemos decir entonces, que: **la suma del problema tortas es una suma fácil.**

Una suma no tan fácil es la del problema tacos. Este problema exige un razonamiento más complejo. Con un esquema, veremos esto fácilmente:



En el problema de los **tacos:**

- se desconoce la cantidad inicial de tacos;
- se conoce la cantidad de tacos que se han vendido, y
- se conoce también la cantidad de tacos que hay al final de la venta.

Este problema no puede ser resuelto de manera tan natural como el problema **tortas,** porque no se trata de agregar a la cantidad inicial otra cantidad, se trata de encontrar la cantidad inicial. Y los niños tienen dos caminos para resolverlo.

El primer camino es el siguiente:

Invertir el planteamiento del problema, y el razonamiento que de él deriva. Esto se ve en el esquema siguiente:

Planteamiento inicial:	Inversión del planteamiento:
X - 410 = 200 — — — →	200 + 410 = X

A muchos niños se les dificulta realizar esta inversión y realizan una resta, por ejemplo Amelia (13 años, primero de secundaria):

$$\begin{array}{r} 410 \\ -\,200 \\ \hline 210 \end{array}$$ R: 210 tacos

Santiago, a quien ya hemos escuchado en otras ocasiones, da su opinión sobre esta respuesta:

SANTIAGO:	No sé qué tenían que restar, si es de suma.
ENTREVISTADORA:	¿Por qué dices que no debían restar?
SANTIAGO:	Es que...pues es un poco absurdo, ¿no?... que hayan restado.
ENTREVISTADORA:	¿Por qué es absurdo?
SANTIAGO:	Pues porque si te preguntan lo que había al principio, pues el resultado no te puede salir menos que lo que quedó al final y que lo que vendieron...

SANTIAGO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Santiago realizó este razonamiento: si se busca la cantidad inicial, entonces el resultado tiene que ser mayor que lo que queda y que lo que se vendió... aunque el problema diga se **vendieron y quedan** (palabras asociadas a la acción de quitar)... entonces ¡pues hay que sumar lo que en el problema aparece como resta!

Pero no todos los niños lograron realizar este razonamiento, por ejemplo, Laura. Ella nos decía:

"Es que en éste me confundí, porque sentía que era de resta, todo me decía que era de resta, pero también veía que era de suma, y no sabía porqué..."

Laura no logró resolver el conflicto entre su idea inicial de la resta (es un problema de resta porque dice vendieron, quedan) y la estructura del problema con la incógnita en la cantidad inicial. Y es que esto la obligaba a realizar una inversión del planteamiento, pero Laura no logró hacerlo.

En problemas como éste de los **tacos** —donde se desconoce la cantidad inicial— la suma no resulta tan natural. Entender que el problema se resuelve con una suma implica realizar una inversión en el planteamiento y, por lo tanto, en el razonamiento.

El segundo camino para resolver este problema, nos lo muestra Nuria:

"Lo que pasa es que en éste es fácil que te confundas...por la pregunta...es como si fuera capcioso...porque está un poco revuelto...pero si te fijas es fácil...yo lo resolví así: dice vendes 400 y te quedan 210...primero pensé que si tenían 500 menos 400 que vendían...eran 100 los que quedaban, no salió y le aumenté: a 600, y si vendes 400 te quedan 200...ya salió, nada más le aumentas los 10, son 610 los (tacos) que tenían."

NURIA 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Nuria supuso cuántos tacos había al principio y, a partir de esa suposición, restó los 400 tacos que se vendieron. El camino que siguió Nuria es un buen camino pero..., con números que impliquen cálculos más difíciles, lo más probable es que no funcione.

Ahora podemos decir que:

Los dos problemas que acabamos de analizar tienen diferentes dificultades para los niños porque la incógnita está ubicada en un lugar diferente.

En el problema **tortas** se busca la cantidad final y este es un razonamiento natural para los niños, por eso prácticamente todos pueden resolver este problema. En cambio, en el problema **tacos** la incógnita se ubica en la cantidad inicial; resolver este problema obliga a realizar una inversión en el planteamiento del problema y en el razonamiento que de él deriva, y no todos los niños logran hacerlo.

Los niños también pueden hipotetizar la cantidad inicial, como hizo **Nuria,** pero esto, como dijimos antes, con números que lleven a cálculos difíciles, lo más seguro es que no funcione.

Podemos decir entonces, que:

La suma puede ser fácil...y no tan fácil...y la dificultad depende no sólo de la complejidad del cálculo numérico sino, sobre todo, de la forma en que esté planteado el problema. Porque esto obliga a realizar operaciones de pensamiento diferentes.

Así, por ejemplo, es mucho más difícil sumar para encontrar la cantidad inicial que para encontrar la cantidad final. Probablemente hasta para los maestros resulte más difícil plantear problemas de este tipo.

Una resta fácil y una resta difícil

Entre los problemas de resta que propusimos a los niños, se encontraban los siguientes:

1. **En la cooperativa escolar había 19 518 pesos antes del recreo, ahora hay 87 625 pesos. ¿Cuánto se vendió en el recreo?**
2. **En la cooperativa escolar había 94 780 pesos y se dieron 35 945 pesos para el día del niño. ¿Cuánto dinero quedó en la cooperativa?**

Los dos problemas **de la cooperativa** se resolvían con una resta:

con la resta 87 625 - 19518 = X el primero.
con la resta 94 780 - 35 945 = X el segundo.

Desde el punto de vista del cálculo que implican, estas restas tienen una dificultad muy similar. A pesar de esto, la dificultad de los problemas resultó muy diferente: casi todos los niños, empezando por los tercero, pudieron resolver el problema **día del niño.** En cambio, menos de la mitad, incluyendo a los de secundaria, pudieron resolver el problema **recreo.**

Después de resolver el problema día del niño, muchos dijeron justificaciones parecidas a las siguientes:

Es muy fácil saber que este problema es de resta porque se trata de ver cuánto queda.

DIANA 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Es que, tú sabes cuánto tienes... te lo están diciendo... a eso le quitas la cantidad que dice y ya ves lo que queda.

SUSANA 11 AÑOS, SEXTO GRADO

Esta idea de resta (quitar cierta cantidad a otra que se tiene para calcular lo que queda) es muy natural, hasta sin ir a la escuela se construye. Según se sabe por distintas investigaciones —al igual que ocurre con la suma— cuentan con ella hasta los niños de 3 a 5 años.

Nosotros vimos que prácticamente todos los niños —de tercer grado a primero de secundaria— pueden resolver problemas como el del **día del niño.**

La resta de problemas como el del día del niño es una resta fácil.

Algo muy distinto sucedió cuando planteamos el problema del **recreo** Muchos niños nos decían: a éste no le entiendo. Y muchos de los más pequeños —y de los grandes —dieron respuestas como éstas:

• En la tienda de la escuela había $ 17 600 antes del recreo, ahora hay $ 54 850. ¿Cuánto se vendió en el recreo? 54850 17600 72450 R=$ 72450	• En la cooperativa escolar había $ 19 518 antes del recreo, ahora hay $ 87 625. ¿Cuánto se vendió en el recreo? 107143 19518 + 87625 107143
YASMIN, 8 AÑOS. TERCER GRADO	DAVID, 12 AÑOS. SEXTO GRADO

Y escuchar a los niños nos permitió entender la dificultad para escoger la operación correcta:

ENTREVISTADORA: (Dirigiéndose a Perla) En este problema... sumaste 19 518 más 87 625. ¡Tú crees que tu resultado está bien, o que está mal?
PERLA: Bien.
ENTREVISTADORA: ¿Y por qué crees que este problema es de suma?
PERLA: Porque la pregunta dice cuánto se vendió en el recreo.
ENTREVISTADORA: ¿esta pregunta te dice que es de suma?,...
PERLA: Sí, o sea... la segunda vez se tiene que poner, se tiene que poner la otra cantidad, o sea cuánto vendieron... 107 000 es lo que vendió.
ENTREVISTADORA: Oye, algunos niños restaron, ¿quién estará bien, ellos o tú?
PERLA: (Después de varios rodeos) Yo estoy bien.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué?
PERLA: Porque es de suma.
ENTREVISTADORA: ¿Y entonces por qué crees que los otros restarían?
PERLA: Porque no se fijaron...

PERLA, SEXTO GRADO, 12 AÑOS

Perla dice: "es de suma porque... la segunda vez se tiene que poner, se tiene que poner la otra cantidad, o sea cuánto vendieron...107 000 es lo que vendió".

En esta frase Perla explica la interpretación que hizo del problema: una cosa es la cantidad que tiene antes del recreo y otra, que tienes que agregar, es lo que se vendió...juntas serán el resultado del problema. Por eso decidió utilizar la suma para resolverlo.

Otros niños muestran, en sus explicaciones y sus respuestas, un progreso en relación con esta idea de que la suma lleva a la **buena respuesta.** Veamos, por ejemplo, el razonamiento de Emilia, una niña que duda entre la **buena** y la **mala respuesta**.

(Después de pensar un poco. Emilia resuelve el problema del recreo con una resta, luego se acerca y nos dice:)

EMILIA : Oye, no sé si ésta bien o está mal.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué no sabes?
EMILIA: Es que siento que está bien, con resta.
ENTREVISTADORA: A ver, explícame un poco más. ¿por qué crees que está bien con resta?
EMILIA: No sé, pero siento que está bien, pero también siento que estoy dando el dinero.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué sientes que das el dinero?
EMILIA: Porque es con resta.

EMILIA, TERCER GRADO, 8 AÑOS

En el diálogo con Emilia percibimos el conflicto entre sus concepciones iniciales y el nuevo significado de la resta que plantea el problema. Sin embargo, Emilia decide conservar la resta como solución. Y esto a pesar de que *siente que con resta da el dinero.*

Emilia ha comenzado a rebasar un obstáculo fundamental en la construcción del significado de la resta: la idea de que la resta es una cantidad inicial que disminuye porque se gasta, se vende o se regala...

Otros niños tienen ideas más firmes sobre el significado de la resta que plantea el problema **recreo** y que Emilia ha comenzado a construir. Estos niños resuelven correctamente los problemas de este tipo, pero no saben explicar el por qué seleccionaron esta operación. Y así nos lo dicen:

"O sea, sí sé que es de resta... pero como que no te sé explicar muy bien."

CARLA, 11 AÑOS, SEXTO GRADO

"No, no te puedo explicar por qué es de resta; sí estoy seguro que es de resta, de suma no es... pero no sé cómo decirte..."

GABRIEL, SEXTO GRADO, 12 AÑOS

Estos niños tienen la seguridad de que el problema es de resta y sin duda la utilizan para resolverlo, pero no son capaces de justificar el por qué. Esto es más difícil, es también una muestra de progresivo intelectual.

Otros niños muestran tal progreso al explicar su razonamiento y justificar sus respuestas, por ejemplo, Montserrat y Alejandro:

ENTREVISTADORA: (Refiriéndose al problema recreo) ¿Por qué restaste?

MONTSERRAT: Es que había antes 19 518, eso nadie lo ganó, esos ya estaba, ¿no?, luego se dice que ahora hay 87 625, entonces, para saber la diferencia entre 87 000 y 19 000 se necesita una resta.

ENTREVISTADORA: Algunos niños sumaron, 19 mil y 87 mil, sacaron como 107 mil, ellos dicen que está bien...

MONTSERRAT: ... Ellos están mal, lo que pasa es que ellos de seguro pensaron que si 19 518 era lo que había antes del recreo, y pensaron que 87 625 fue lo que ganaron en el recreo, que era aparte esa cantidad, entonces, yo creo que entendieron mal, yo creo que entendieron que preguntaban que cuánto es ahora, por eso sumaron...

MONTSERRAT, PRIMERO DE SECUNDARIA

Alejandro justifica su respuesta con argumentos similares a los de Montserrat:

ALEJANDRO: En este problema lo que hago es una resta... para saber cuál es la diferencia.

ENTREVISTADORA: Unos niños lo que hicieron fue sumar, ¿quién está bien, ellos o tú?

ALEJANDRO: Pues yo digo que yo... (porque lo que hicieron esos niños) podría ser si te dicen: esto había y esto se vendió en el recreo, ¿cuánto hay en total?, pero no si te dicen que ¿cuánto vendiste en recreo?

ENTREVISTADORA: Entonces ¿cómo está bien el problema, con suma o con resta?

ALEJANDRO: ¡Pues con resta! (enfático).

ENTREVISTADORA: Y tú, ¿en qué les dirías a los niños que se fijen para no cometer ese error?

ALEJANDRO: Pues en la pregunta, ¿no? porque por la operación que pusieron, la pregunta que estaría bien es ¿Cuánto tenemos en total en la cooperativa?...

ALEJANDRO, PRIMERO DE SECUNDARIA, 12 AÑOS

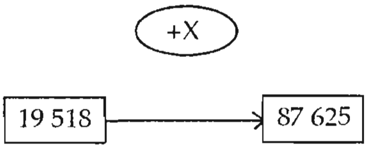
Alejandro, Montserrat y muchos otros de sus compañeros dicen: **los niños que sumaron resolvieron otro problema que llevaría la pregunta ¿Cuánto se vendió en total?**

Hagamos ahora un recuento de las respuestas de los niños:

Los niños que llegaron a la **buena respuesta** en este tipo de problemas percibieron que:

- se conoce la cantidad que se tiene al inicio, y la que se tiene al final;
- el dato desconocido es el dinero que se ganó en el recreo; es decir, hay que buscar una diferencia entre lo que se tenía al principio y lo que se tiene al final, y
- esa cantidad (la diferencia) no puede ser mayor que el total que ya se tiene.

La idea que estos niños se hicieron del problema, la podemos representar con el siguiente esquema:

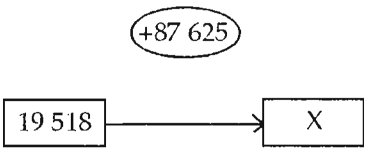


Estos niños se imaginaron el problema como una "adición con hueco".

Por supuesto, un segundo paso que tendrán que dar para llegar a la solución será convertir esta adición en sustracción.

En cambio, los niños que no llegaron a la **buena respuesta** porque realizaron una suma, entendieron que tenían dos cantidades y que había que sumarlas para buscar un total ¡no se percataron de que ya tenían el total!

La forma en que estos niños interpretaron el problema puede representarse de la siguiente manera:



Estos niños no vieron el problema como una "**adición con hueco**", sino como una adición común y corriente, donde se tienen los sumandos y hay que buscar el total.

Para ellos, uno es el dinero que había antes del recreo y otro es el que hay ahora, como si el de ahora no incluyera el anterior. De ahí que su respuesta haya sido sumar 19 518 + 87 625, pues teniendo las partes había que construir el todo, es decir, buscar el total.

- Vemos entonces, que no es la diferencia entre las operaciones (en el sentido de cálculo), sino el establecimiento de las relaciones entre los datos lo que permite explicar las diferencias de dificultad en los distintos problemas.
- Para que los niños puedan resolver problemas como el que aquí analizamos, necesitan construir otro significado para la resta: **la operación que permite encontrar una diferencia.**
- Podemos decir, entonces, que el significado **encontrar una diferencia** es menos simple que el significado quitar, disminuir, el cual, hemos dicho ya, los niños los construyen aun sin ir a la escuela.

... Gerard Vergnaud ha hecho una diferencia fundamental entre los tipos de cálculo que se realizan al resolver un problema:

- **cálculo numérico**, que se refiere a las operaciones aritméticas en el sentido tradicional del término, y
- **cálculo relacional**, que hace referencias a las operaciones de pensamiento necesarias para evidenciar las relaciones que hay entre los elementos de la situación-problema.

Y es precisamente el cálculo relacional el que permite explicar las diferencias de dificultad en los problemas que se resuelven con el mismo cálculo numérico. Podemos entonces decir que, no siempre que dos problemas lleven un mismo cálculo serán igualmente difíciles. Así según hemos visto, hay sumas fáciles y no tan fáciles y la misma resta puede ser fácil y también difícil.

LECTURA: PROBLEMAS ADITIVOS*

PROBLEMAS ADITIVOS

Introducción

La resolución de problemas aritméticos es un tema que en los últimos años ha cobrado gran interés en el ámbito de la educación matemática, ya que se le considera un medio valioso para introducir a los niños en la comprensión de las operaciones aritméticas básicas.

En este texto nos centraremos en la revisión y resolución de algunos Problemas Verbales Aditivos Simples (PVAS), es decir, en aquellos problemas que se plantean a través de enunciados verbales (es decir, formulados por medio de palabras) y cuya resolución requiere el empleo de una sola operación, ya sea de adición, o de sustracción. Por ejemplo:

Mario tenía 3 chocolates,
su tía le regaló dos más.
¿Cuántos chocolates tiene ahora Mario?

Para comenzar narraremos una pequeña historia elaborada a partir del diálogo de dos niñas:

Un día Susi visitó a Roberta, su vecina.

Susi: ¡Hola Roberta! ¿Quieres venir a jugar conmigo a mi casa?
Roberta: Me gustaría mucho, pero tengo que hacer mi tarea de matemáticas.
Susi: ¿Qué es lo que tienes que hacer?
Roberta: Tengo que resolver unos problemas de sumar y restar.
Susi: ¿Problemas de sumar y restar. Ésos yo los sé hacer. Si quieres te ayudo. Así terminas más rápido tu tarea, después nos vamos a jugar.
Roberta: ¡Bueno!

Roberta salío del cuarto y unos momentos después regresó con su cuaderno y algunos otros útiles escolares.
Susi: A ver, ¿cómo dice el problema?

Roberta comenzó a leer el primer problema pero Susi la interrumpió.

Susi: ¡Ah, mira!, pero si esto es muy fácil. Sólo ve las palabras del problema. Si dice "más", pues todo lo que tiene que hacer es fijarte en los números y hacer una suma, y si dice "quedaron", entonces haces una resta.
Roberta: ¿Sí?
Susi: Sí, mira, el problema dice: "Jorge tiene 4 corcholatas de refresco. Para poder conseguir un álbum de estampas debe juntar 10 corcholatas. ¿Cuántas corcholatas más necesita juntar Jorge?". Aquí tú puedes ver la palabra "más", entonces, cuatro más diez son catorce, ¡fácil!

Roberta no estaba muy convencida de que ésa era la respuesta correcta. ¿Cómo podía Jorge necesitar catorce corcholatas si con diez podía conseguir su álbum?

Roberta: ¿Estás segura de que así se pueden resolver todos los problemas?
Susi: ¡Claro! Mira este otro, aquí dice "quedaron", entonces la respuesta es... diez menos dos... ¡ocho!

El problema decía así: "A María se le perdieron 10 lápices de colores en la escuela. Después, sus hermanos se quedaron con dos. ¿Cuántos lápices perdió María?"
Aunque a Roberta le parecía que la respuesta correcta debía ser doce, no dijo nada y dejó que Susi continuara con los siguientes problemas.

Susi: La respuesta para este que dice "más" es siete porque cinco más dos son siete. Y este otro dice "quedaron", entonces, ocho menos tres... son cinco. ¿Ves qué fácil es?

Los dos últimos problemas decían así:
"Luis tiene cinco carritos y Daniel tiene dos

*Olimpia Figueras, Gonzalo López Rueda y Rosa Ma. Ríos. "Problemas aditivos", en: *Guía para el maestro. Segundo grado.* SEP, México, 1992. pp. 26-41.

carritos, ¿cuántos carritos más tiene Luis que Daniel?"

"A la hora del recreo 5 niños y 3 niñas tuvieron que permanecer en el salón para terminar su trabajo, ¿cuántos alumnos se quedaron en el salón?"

Roberta: Creo que después tendré que leer los problemas para estar segura de que ésas son las respuestas correctas.

Susi: Bueno, si tú quieres hacerlo de la manera más tardada. Pero a mí siempre me resulta como lo hago. Yo siempre saco buenas calificaciones en matemáticas.

Y era cierto, Susi siempre llegaba a la respuesta correcta mediante esta táctica porque los problemas que le aplicaba su maestra eran invariablemente como los siguientes:

Martín tenía 8 canicas,
su papá le regaló 3 canicas más.
¿Cuántas canicas tiene ahora Martín?

Perla tenía 9 dulces,
se comió 3,
¿cuántos dulces le quedaron?

Esta historia pretende ilustrar cómo piensan muchos niños sobre lo que significa resolver problemas de suma y resta.

Fijarse en los números, buscar la palabra "clave" en el problema —como por ejemplo, "más", "y", "en total" en el caso de la suma, o "quedaron", "se perdieron", "menos" en el de la resta— puede ser una técnica eficaz para resolverlos "correctamente", sobre todo si son como los que elige la maestra de Susi. Sin embargo, no todos los problemas cuya resolución se obtiene mediante una suma o una resta se ajustan a este patrón, especialmente los problemas "no escolares" con los cuales nos enfrentamos cotidianamente.

Resolver un problema no supone solamente poder aplicar la operación aritmética adecuada, sino entender el problema. Por lo tanto, el maestro al enseñar los problemas no debería centrarse solamente en el logro de una respuesta acertada a partir de la elección de la operación correcta, sino en la comprensión misma del problema.

Así los problemas podrían ser algo útil para entender el significado de las operaciones de suma y resta y hacer más fácil la comprensión para los niños.

Un problema es una historia breve en la que se narra alguna acción que debe realizar el protagonista a partir de determinados datos.

Para resolver el problema el niño debe ponerse en el papel del protagonista, entender qué tipo de relación existe entre la acción planteada y los datos, y efectuar la operación pertinente, ya sea una suma o una resta.

No nos referimos, en este caso, a una suma o una resta escrita como las que se enseñan formalmente en la escuela, sino a la acción mental que se necesita para realizar una adición o una sustracción.

Los niños, antes de ingresar a la escuela, se enfrentan con situaciones concretas o "problemas" que les exigen este tipo de acciones mentales. La mayoría de ellos son capaces de resolverlos utilizando recursos y procedimientos "espontáneos", aun cuando no saben todavía escribir una suma o una resta.

Por ejemplo:

Miguel y sus amigos organizaron un juego de futbol, llevaron el recuento de los goles anotados y al final pudieron saber por cuántos goles le ganó un equipo al otro.

Pati había juntado seis estampillas y sabía que le faltaban cuatro para llenar una planilla de diez.

Leticia y su hermano Daniel, desde muy pequeños, hacían los encargos de su mamá en la tienda y sabían cuánto dinero tenían que pagar y cuánto deberían recibir de cambio.

Enrique perdió tres canicas y se dio cuenta porque antes tenía siete y ahora sólo cuatro.

Miguel, Pati, Leticia, Daniel, Enrique y muchos niños más, pueden realizar acciones como éstas utilizando sus conocimientos informales sobre la adición y la sustracción.

Sin embargo cuando se inicia el aprendizaje aritmético formal en la escuela, estos conocimientos suelen desaprovecharse.

Generalmente se inicia introduciendo a los niños en el aprendizaje de los números en la forma convencional de representarlos para más tarde pasar al manejo de los algoritmos de la suma y de la resta.

Hasta que los niños parecen dominar estos contenidos se considera que ya están aptos para resolver los problemas.

A partir de este proceso los niños van teniendo ciertas ideas acerca de lo que significa resolver un problema: "un problema" algo que debe tener una respuesta y para encontrarla hay que hacer una operación utilizando los números del enunciado. Frente a esto, los niños se preocupan solamente por la operación que hay que hacer y dejan a un lado la reflexión del problema, Susi, la niña de la historia, es un claro ejemplo de esto.

Esto no quiere decir que no deba enseñarse a los niños las formas de representar convencionalmente los números y los algoritmos de la suma y la resta, porque sin duda éste es un aprendizaje necesario. Lo que aquí se plantea, es precisamente, la conveniencia de acceder a este aprendizaje en contexto de mayor significación para los niños; en la resolución de problemas verbales aditivos simples puede constituir un recurso útil.

¿Cómo puede el maestro orientar la enseñanza de los problemas aditivos y, por lo tanto, de la suma y de la resta de manera más significativa para los niños?

Una respuesta a este cuestionamiento tendría que partir de las siguientes consideraciones:

- Los problemas aritméticos son más comprensibles cuando se vinculan con situaciones concretas y vivenciales.
- Los problemas verbales aditivos simples ofrecen un contexto significativo para la comprensión de las operaciones de adición y sustracción.
- La resolución de un problema requiere de la comprensión y no sólo de la aplicación de una estrategia mecánica.
- No todos los problemas aditivos son iguales, por lo tanto el grado de complejidad que presentan para su resolución también varía.
- Los niños pueden resolver problemas verbales aditivos simples valiéndose de procedimientos de conteo informales, aun si no saben escribir y resolver formalmente las operaciones de suma y resta.
- Los procedimientos de conteo que emplean espontáneamente los niños para resolver los problemas, pueden ser un sustento útil para la enseñanza de estrategias en resoluciones más formales.

Enseguida abordaremos algunas cuestiones vinculadas con la resolución de los problemas aditivos.

Primeramente haremos una revisión de los diferentes problemas verbales aditivos simples, según algunas variables involucradas.

Después, referiremos los procedimientos de conteo que emplean espontáneamente los niños para resolver estos problemas.

Finalmente, presentaremos algunos criterios didácticos que pueden orientar al docente en la enseñanza de los problemas aditivos, así como algunas sugerencias de actividades útiles.

Tipos de problemas verbales aditivos simples

Cuando se trata de distinguir cuáles son los elementos que diferencian a los problemas aditivos, pensamos generalmente en el tipo de operación que se requiere para resolverlos (suma o resta).

Veamos los siguientes problemas:

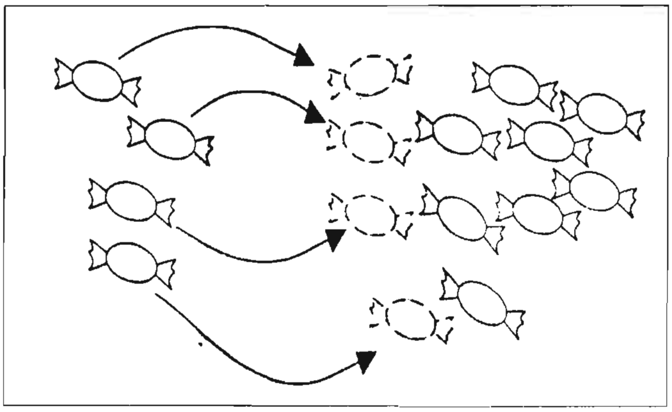
Problema 1:
Iván tenía 8 caramelos,
Tere le dio 4 caramelos más.
¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván?

Problema 2:
Iván tiene 8 caramelos y Tere tiene 4.
¿Cuántos caramelos tienen los dos juntos?

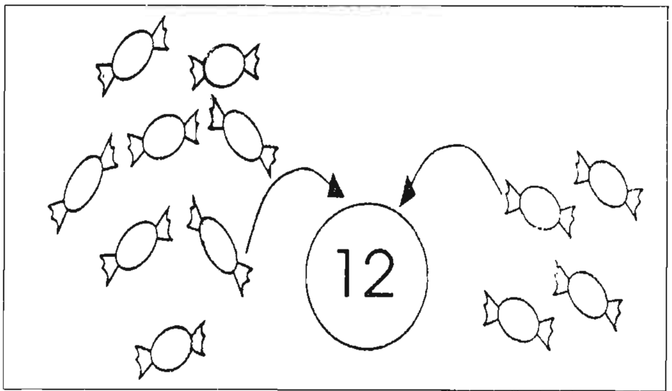
Ambos problemas podrían representarse de la siguiente manera: $a + b = ?$, y ambos podrían resolverse por medio de una operación directa de suma.

Sin embargo, si nos fijamos con mayor atención, podremos ver que cada uno de ellos plantea una relación diferente.

En el problema 1 hay un conjunto inicial (el de los caramelos de Iván) que se incrementa al añadir los cuatro caramelos que le regaló Tere. Es decir, en este problema hay una relación de cambio o transformación de un conjunto.



En el problema 2 hay dos conjuntos (el de los caramelos de Iván y el de los caramelos de Tere), los cuales no se alteran al resolver el problema, sino simplemente se combinan. En ese caso, por lo tanto, la relación es de *combinación.*



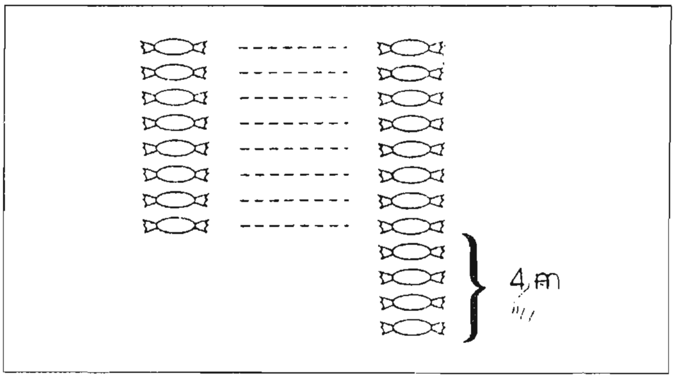
La operación de adición puede asumir estos dos significados: el de añadir y el de juntar o combinar. En los problemas planteados en los libros de texto, pueden identificarse ambos significados.

Sin embargo, la suma puede emplearse también para resolver problemas de otro tipo:

Problema 3:
Iván tiene 8 caramelos.
Tere tiene 4 caramelos más que Iván.
¿Cuántos caramelos tiene Tere?

Evidentemente la ecuación que representaría este problema sería igual a la de las dos anteriores: $a + b = ?$ No obstante la relación implicada es de distinta naturaleza.

En este caso, la resolución del problema supondría una relación de comparación entre el conjunto de caramelos de Tere y el de los caramelos de Iván.



Un cuarto tipo de relación también es posible:

Problema 4:
Iván tiene 8 caramelos pero
necesita 4 caramelos más
para tener los mismos que Tere.
¿Cuántos caramelos tiene Tere?

En este caso, se trata de una relación de igualación. Hay que añadir cuatro caramelos para igualar el conjunto de caramelos de Iván con el de Tere.

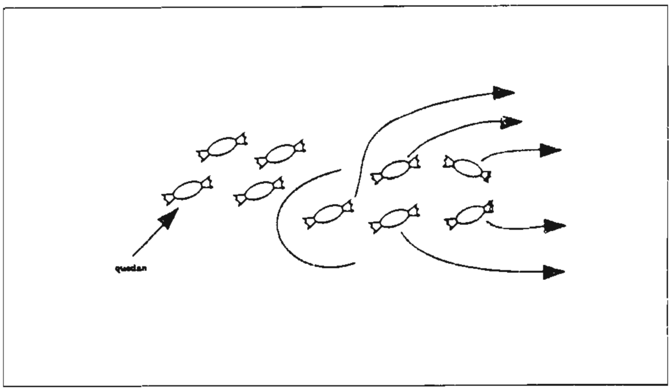
Cambio, combinación, comparación e *igualación* son básicamente las acciones o relaciones semánticas que caracterizan los cuatro tipos de problemas verbales aditivos simples.

En los problemas para cuya resolución se requiere de una sustracción, también se pueden identificar estas cuatro variables semánticas:

Cambio

Problema 5:
Iván tenía 9 caramelos
dio 5 a Tere.
¿Cuántos caramelos le queda a Iván?

En este caso, el conjunto de caramelos de Iván disminuyó con la acción de quitarle cinco elementos:

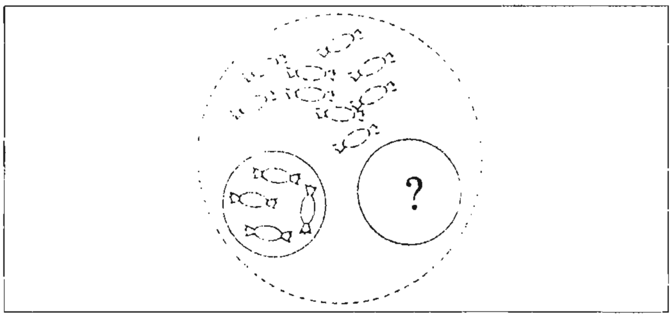


Esta disminución produce un cambio o transformación en el conjunto inicial.

Combinación

Problema 6:

Iván y Tere tienen, los dos juntos, 9 caramelos.
De éstos, 5 son de Iván y el resto de Tere.
¿Cuántos caramelos son de Tere?

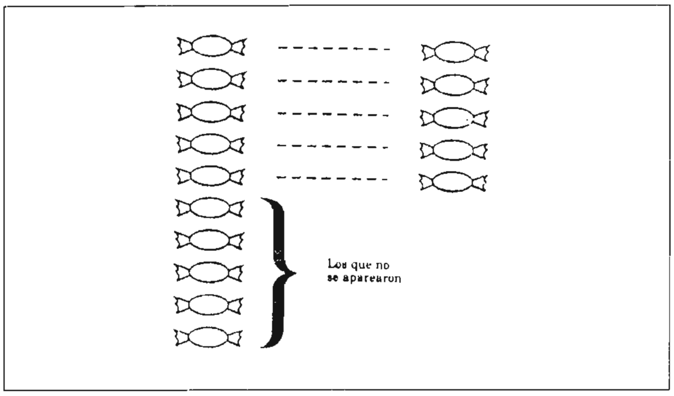


En este problema está implicada una relación entre un conjunto total (el de los caramelos de Iván y Tere juntos) y los subconjuntos (el de los caramelos de Iván y el de los de Tere separados). Aquí ninguno de los dos conjuntos se modifica.

Comparación

Problema 7:

Tere tiene 9 caramelos.
Iván tiene 5 caramelos menos que Tere.
¿Cuántos caramelos tiene Iván?

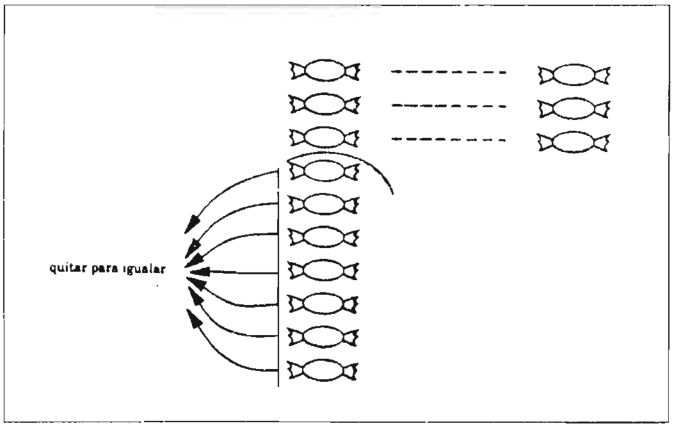


Aquí tampoco hay transformación de los conjuntos, sino simplemente una relación comparativa.

Igualación

Problema 8:

Iván tiene 9 caramelos.
Tere tiene 3 caramelos.
¿Cuántos caramelos necesita comerse Iván para tener los mismos que Tere?



En este caso, para igualar ambos conjuntos, es necesario quitar caramelos del conjunto de "los de Iván", hasta que queden en correspondencia cuantitativa con "los de Tere":

Cabe mencionar que se han esquematizado los problemas con el fin de clarificar sus relaciones.

Sin embargo, no necesariamente tienen que expresarse concretamente. Más bien se trata de las relaciones conceptuales implícitas en la estructura de los problemas.

Los problemas de *cambio* e *igualación* describen una relación dinámica, ya que para resolverlos hay que hacer transformaciones de incremento o decremento en los conjuntos.

Los problemas de *comparación* y *combinación* por el contrario, sólo plantean una relación estática entre sus entidades.

Además de las relaciones que hemos descrito (incremento, decremento, combinaciones y comparaciones) existe otra variable importante: la posición de la incógnita.

En cada problema hay tres posibles rubros de información:

[ ] + [ ] = [ ], o bien, [ ] - [ ] = [ ]

La incógnita puede localizarse en alguno de ellos.

En el problema 1 la incógnita se localiza en el resultado: $a + b = ?$

En otros problemas de *cambio* la incógnita se puede localizar en otro rubro. Por ejemplo:

Iván tenía algunos caramelos pero le dio a Tere.

Ahora Iván tiene 3 caramelos.

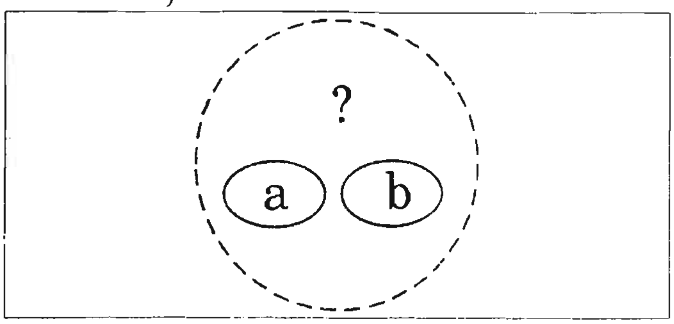
¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio?

La ecuación del problema quedaría planteada de la siguiente forma: $? + b = c$

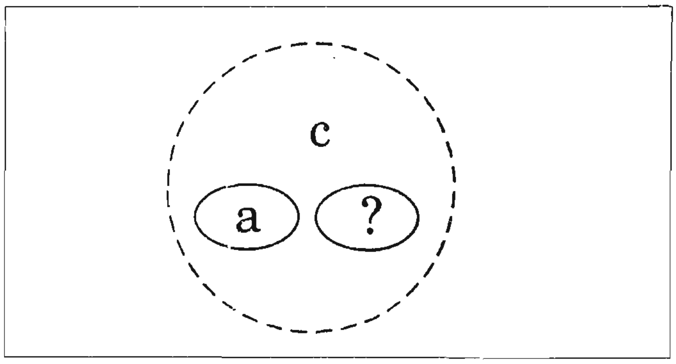
Combinando las tres posibilidades de posición de la incógnita y el tipo de la operación planteada en el problema (suma o resta), encontramos un total de seis combinaciones para cada una de las categorías de problemas de *cambio, comparación* e *igualación*:

$? + b = c$	$? - b = c$
$a + ? = c$	$a - ? = c$
$a + b = ?$	$a - b = ?$

Para los problemas de *combinación* sólo existen dos posibilidades: que la incógnita se localice en el conjunto total:



O en uno de los subconjuntos:



Nota: en la Tabla que aparece más adelante, pueden encontrarse ejemplos del patrón textual de cada uno de estos problemas verbales.

Las variables semánticas de los problemas verbales influyen de manera determinante en la complejidad que presentan a los niños para su resolución.

Por ejemplo, los problemas cuya incógnita se localiza en el resultado son más sencillos que aquéllos en los cuales se localiza en alguno de los otros rubros. Incluso se ha visto, particularmente en los problemas de *cambio*, que para los niños son más sencillos los problemas cuya incógnita se localiza en el segundo sumando ($a + ? = c$), o en el minuendo ($a - ? = c$) que en los que se ubica en el primer sumando ($? + b = c$) o en el sustraendo ($? - b = c$).

Parece ser también que los problemas que suponen relaciones dinámicas (*cambio* e *igualación*) resultan más fáciles de resolver para los niños que los que tienen relaciones estáticas (*combinación* e *igualación*).

Otros factores que condicionan la complejidad de los problemas son los siguientes:

- El contexto del problema. Un problema resulta más fácil de comprender para los niños si se redacta con elementos cotidianos y concretos, por ejemplo, niños que juegan, señores o señoras que compran, o los goles que se anotan en un juego de futbol; en lugar de horas que trabaja un obrero, distancias que se recorren entre dos poblados desconocidos, minutos, kilos, metros, etcétera.

Un problema es más comprensible si se vincula con experiencias cercanas o propias. Por ejemplo, un niño puede encontrar dificultades para comprender un problema como "Pepe tiene 8 años y Laura tiene 5 años. ¿Cuántos años más tiene Pepe que Laura?", y sin embargo, saber perfectamente cuántos años le lleva él a su hermano menor.

- El tamaño de los números empleados. Es más fácil resolver problemas con números de un solo dígito que con cantidades mayores de diez. Esto se observa, particularmente, cuando los niños emplean sus dedos para contar, ya que con cantidades menores de diez cada dedo puede representar un elemento de cada conjunto del problema, mientras que con números mayores el niño se ve forzado a buscar otros recursos.
- El orden en que se presentan los datos del problema. Por ejemplo, si el problema se plantea:

  Andrés tenía 7 canicas,
  le dio 4 a Tomás.
  ¿Cuántas canicas tiene ahora Andrés?

  El niño podrá trasladar directamente las cantidades a la operación de sustracción 7 - 4 = ?

En cambio, si se plantea:
Andrés le dio 4 canicas a Tomás,
pero antes de dárselas tenía 7.
¿Cuántas canicas tiene ahora Andrés?

TABLA: EJEMPLOS DEL PATRÓN TEXTUAL DE LOS DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

Problemas que implican una relación **dinámica**

cambio 1
Iván tiene 4 caramelos.
Luego, Tere le dio 5 caramelos más.
¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván? 4 + 5 = [ ]

cambio 2
Iván tenía 9 caramelos.
Luego, le dio 5 a Tere.
¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván? 9 - 5 = [ ]

cambio 3
Iván tenía 4 caramelos.
Luego, Tere le dio algunos más.
Ahora Iván tiene 9 caramelos.
¿Cuántos caramelos le dio Tere? 4 + [ ] = 9

cambio 4
Iván tenía 9 caramelos.
Luego, le dio algunos a Tere.
Ahora Iván tiene 4 caramelos.
¿Cuántos caramelos le dio a Tere? 9 - [ ] = 4

igualación 1
Iván tiene 4 caramelos.
Tere tiene 9 caramelos.
¿Cuántos caramelos necesita Iván
para tener los mismos que Tere? 4 + [ ] = 9

igualación 2
Iván tiene 9 caramelos.
Tere tiene 4 caramelos.
¿Cuántos caramelos necesita perder (o comerse) Iván para tener los mismos que Tere?
9 - [ ] = 4

igualación 3
Iván tiene 4 caramelos,
él necesita 5 caramelos más para tener
los mismos que Tere.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? 4 + 5 = [ ]

igualación 4
Iván tiene 9 caramelos,
él necesita perder (o comerse) 5 para
tener los mismos que Tere.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? 9 - 5 = [ ]

cambio 5
Iván tenía algunos caramelos.
Luego, Tere le dio 5 caramelos más.
Ahora Iván tiene 9 caramelos.
¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio?
[ ] + 5 = 9

igualación 5
Iván tiene 9 caramelos.
Tere necesita 5 caramelos más para
tener los mismos que Iván.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? [ ] + 5 = 9

cambio 6
Iván tenía algunos caramelos.
Luego, le dio 5 a Tere.
Ahora Iván tiene 4 caramelos.
¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio?
[ ] - 5 = 4

igualación 6
Iván tiene 4 caramelos.
Tere necesita perder (o comerse) 5
para tener los mismos que Iván.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? [ ] - 5 = 4

TABLA: EJEMPLOS DEL PATRÓN TEXTUAL DE LOS DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

Problemas que implican una relación **dinámica**

cambio 1
Iván tiene 4 caramelos.
Luego, Tere le dio 5 caramelos más.
¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván? 4 + 5 = [ ]

igualación 1
Iván tiene 4 caramelos.
Tere tiene 9 caramelos.
¿Cuántos caramelos necesita Iván
para tener los mismos que Tere? 4 + [ ] = 9

cambio 2
Iván tenía 9 caramelos.
Luego, le dio 5 a Tere.
¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván? 9 - 5 = [ ]

igualación 2
Iván tiene 9 caramelos.
Tere tiene 4 caramelos.
¿Cuántos caramelos necesita perder
(o comerse) Iván para tener los mismos que Tere?
9 - [ ] = 4

cambio 3
Iván tenía 4 caramelos.
Luego, Tere le dio algunos más.
Ahora Iván tiene 9 caramelos.
¿Cuántos caramelos le dio Tere? 4 + [ ] = 9

igualación 3
Iván tiene 4 caramelos,
él necesita 5 caramelos más para tener
los mismos que Tere.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? 4 + 5 = [ ]

cambio 4
Iván tenía 9 caramelos.
Luego, le dio algunos a Tere.
Ahora Iván tiene 4 caramelos.
¿Cuántos caramelos le dio a Tere? 9 - [ ] = 4

igualación 4
Iván tiene 9 caramelos,
él necesita perder (o comerse) 5 para
tener los mismos que Tere.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? 9 - 5 = [ ]

cambio 5
Iván tenía algunos caramelos.
Luego, Tere le dio 5 caramelos más.

igualación 5
Iván tiene 9 caramelos.
Tere necesita 5 caramelos más para

Ahora Iván tiene 9 caramelos.
¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio?
[ ] + 5 = 9

cambio 6
Iván tenía algunos caramelos.
Luego, le dio 5 a Tere.
Ahora Iván tiene 4 caramelos.
¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio?
[ ] - 5 = 4

tener los mismos que Iván.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? [ ] + 5 = 9

igualación 6
Iván tiene 4 caramelos.
Tere necesita perder (o comerse) 5
para tener los mismos que Iván.
¿Cuántos caramelos tiene Tere? [ ] - 5 = 4

El niño deberá invertir los números para plantear la operación de sustracción.

- La forma como se plantea el problema también influye, especialmente en los problemas cuyas relaciones semánticas son más complejas, como los de comparación. El texto puede reflejar con mayor o menos claridad estas relaciones.
  Por ejemplo, la relación "seis es dos más que cuatro" sería más difícil de comprender que un problema formulado así:
  Hay 6 niños y 4 lápices. ¿Cuántos niños más que lápices hay?

  Que así:

  Hay 6 niños y 4 lápices. Si se reparten los lápices, ¿cuántos niños se quedarán sin lápiz?

El apoyo de elementos concretos (objetos o los dedos), contribuye a facilitar la comprensión y resolución de los problemas. La presencia de apoyos visibles o palpables facilita el proceso de representación mental de las relaciones semánticas involucradas en los diferentes problemas, y por lo tanto, su comprensión.

CUARTA UNIDAD

LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

LECTURA:
UN SIGNIFICADO QUE SE CONSTRUYE EN LA ESCUELA*

UN SIGNIFICADO QUE SE CONSTRUYE EN LA ESCUELA

Las siguientes páginas las dedicamos a describir la evolución de un significado particular de la multiplicación: la multiplicación como la operación que permite calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos. Para hacerlo, nos basaremos en las respuestas que dieron los niños problemas de combinaciones.

El problema planteado fué el siguiente:

•Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas.
¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?

4 días

Un día se pone una falda negra y blusa roja el otro falda amarilla y blusa blanca y el otro falda verde y blusa azúl y al otro día como no tenía blusa lavó la roja y se la puso con una falda blanca

JACQUELINE, ZAYDA, IRMA JAZMÍN

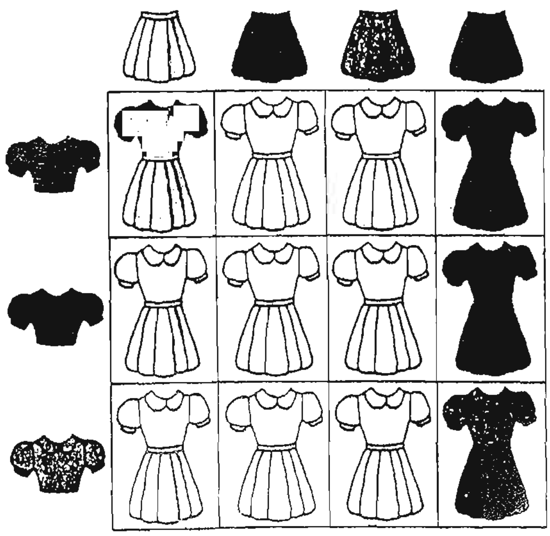
Irma, Zayda y Jacqueline tenían 10 años cuando dieron esta respuesta, era su primer acercamiento a los **problemas de combinaciones.** Buena distancia habrán aún de recorrer para responder a este tipo de problemas de la manera como la escuela lo espera.

* Alicia Ávila. "Un significado que se construye en la escuela", en: *Los niños también cuentan.* SEP, Col. Libros del Rincón, México, 1993. pp. 17-29.

De las correspondencias a las combinaciones posibles

En los libros que editó la Secretaría de Educación en los años setenta aparecieron problemas como el que respondieron Irma y sus compañeras, acompañados de cuadros de doble entrada:

•Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas.
¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?
Completa la tabla donde aparecen las distintas maneras como puede vestirse Gloria:



Nosotros planteamos ese problema a los niños de tercero a sexto grado, lo que observamos se relata en las siguientes páginas.

Prácticamente, ninguno de los niños había estudiado en la escuela este tipo de problemas. Sin embargo, enfrentados a la tarea, casi todos produjeron soluciones; las más elementales son como la siguiente:

•Lupe tiene 4 faldas y 3 blusas, ¿de cuántas maneras se puede Lupe vestir?

unas la deja sucias y otras las guarda

SANDRA, TERCER GRADO, 8 AÑOS

Adrián, quien tiene 8 años y cursa tercer grado, resolvía algunos problemas de multiplicación y división cuando de pronto se nos acerca y dice:

— La más difícil se me hace la de las blusas y las faldas.
— ¿Por qué?
— Porque no me sale con números, me sale con palabras.

Le pedimos a Adrián intentar de nuevo la resolución. Lorena, una compañerita que escucha el diálogo, interviene:

— A ese de las faldas yo tampoco le entiendo.
— ¿Por qué?
— Por la pregunta.

E interviene entonces Sandra, una tercera compañera de 8 años:

— ¡Ay, cómo no, se trata de que unas las deje sucias y otras las guarde!

Y esta es precisamente la respuesta que da Sandra al problema.

Sandra y Lorena, como la mayoría de los niños pequeños, dieron respuesta **con palabras** que no muestran el establecimiento de relaciones numéricas, ni aún las más elementales.

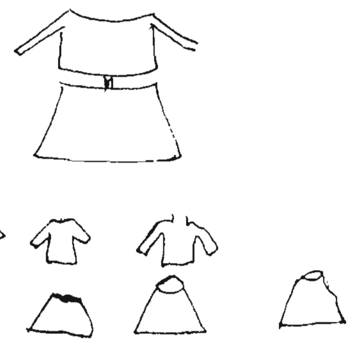
En las palabras de Adrián nos parece observar un esfuerzo intelectual por encontrar relaciones entre los datos del problema y por hacerse una **representación calculable** del mismo,esfuerzo que seguramente muchos niños realizaron. Y Adrián logra dar una respuesta en la cual establece relaciones numéricas, aunque éstas sean elementales:

2 veces una blusa

Pero muchos otros niños (como Sandra y Lorena) no cuentan con los saberes y conceptualizaciones previas que les permitan hacerlo. El **de las blusas** es, para esos niños, un problema *demasiado difícil.*

Otras soluciones un poco más evolucionadas, y que nos ayudarán a entender la respuesta de Adrián, fueron las siguientes:

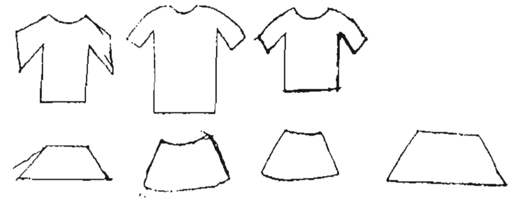
•Lupe tiene 4 faldas y 3 blusas, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir Lupe?



de tres formas nomas se puede vestir porque nomas hay 3 blusas y 4faldas y en la otra falda notiene blusa

JORGE VÁZQUEZ, JORGE GAUCÍN

•Lupe tiene 4 faldas y 3 blusas, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir Lupe?



Se puede vestir en tres maneras.
Lo hicimos en forma de dibujos
y se puede vestir 3 maneras.

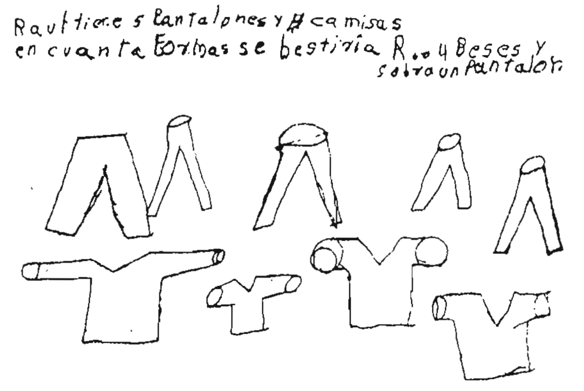
YAIR, FEDERICO, EDGAR

En este par de respuestas podemos destacar al menos lo siguiente:

- Los niños no utilizan multiplicación para resolver el problema.
- Interpretan el problema de una manera estática, no se lo representan mentalmente con la idea de temporalidad, de movimiento, de ahí que las combinaciones no sean sino las que **ven** en el momento inicial.
- Con base en esta representación estática, los niños construyen una estrategia de resolución que consiste en el establecimiento de correspondencias uno a uno entre las blusas y las faldas y en el conteo de las parejas obtenidas. Por eso *sobra una blusa,* pues ya no tiene falda.
- Para los niños que se encuentran en tal nivel de conceptualización en relación con este significado de la multiplicación, el problema **de las blusas y las faldas**, no es un problema de cálculo propiamente dicho, es un problema de conteo basado en la relación biunívoca establecida.

Y esto es precisamente lo que hizo Adrián; si bien no hizo explícito su procedimiento, sí nos muestra su conclusión: *una blusa* se la pone dos veces. Esta conclusión derivó de haberse representado, mentalmente, la correspondencia uno a uno entre las faldas y las blusas.

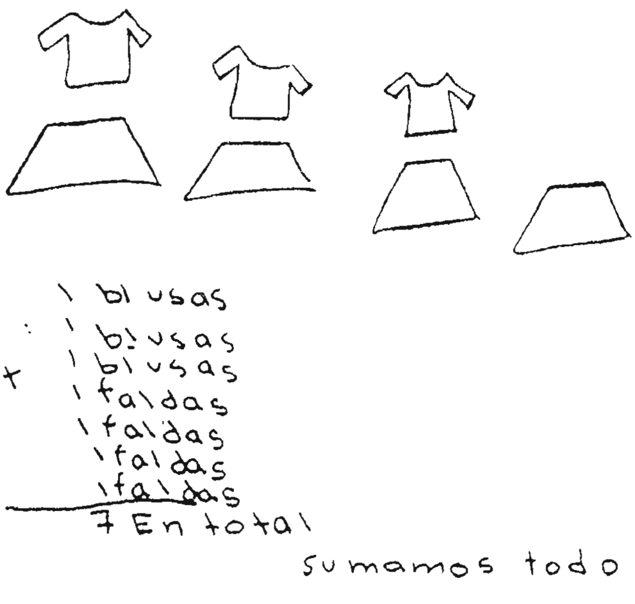
Los niños repiten la anterior representación del problema, cuando se les pide escribir *otros problemas que se parezcan al de las blusas:*



Las soluciones como las que acabamos de analizar, las produjeron en su mayoría niños de tercero, cuarto y quinto grado y sólo algunos de sexto año. Esta es probablemente la solución numérica más elemental a los problemas donde **la multiplicación no es una suma repetida sino el número de las combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos.**

Otros niños produjeron soluciones diferentes a este mismo problema, como la siguiente:

•Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas, ¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?



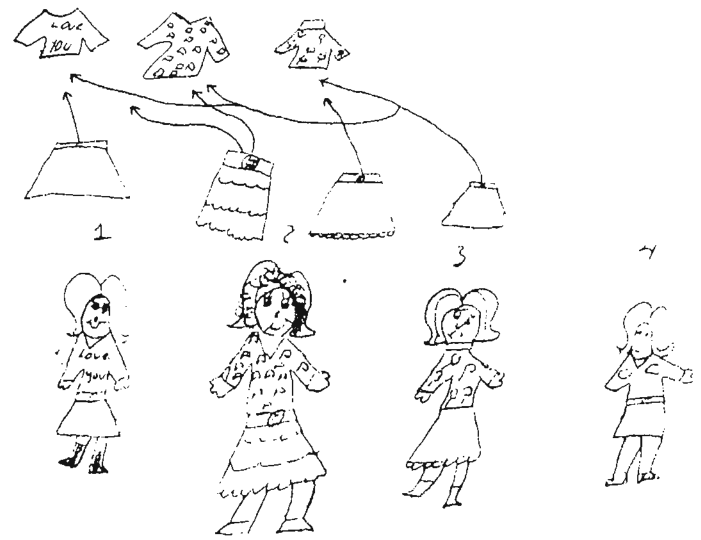
JESÚS, ALEJANDRO, JOSÉ LUIS

¿En qué difieren y en qué son similares estas soluciones y las que analizamos antes? Nosotros encontramos las siguientes diferencias y similitudes:

- Los niños se han hecho una **representación calculable** del problema, es decir, lo interpretan de manera que consideran necesario seleccionar y utilizar una operación para resolverlo.
- Esta **representación** es nuevamente una **representación estática, atemporal** del problema; de ahí que los niños seleccionen la suma o la resta como operación que los lleva a la solución pues no es necesario calcular sino las combinaciones que se ven en el momento.

A algunos niños no les satisfizo la anterior **representación** del problema, entonces buscaron otras formas de interpretarlo y resolverlo, como Salvador, Manuel y Carlos, que cursaban quinto grado:

•Gloria tiene
tres blusas y
cuatro faldas,
¿De cuántas maneras
se puede vestir?



Resultado: De barias
formas lavando
las blusas y faldas
cuando se cambia

SALVADOR, LUIS MANUEL, CARLOS HORACIO

O como Jéssica y Xóchitl, que iban en sexto año y contestan:

"de 6 maneras"

Estas niñas explican así su respuesta:

Prímero hicimos 3 blusas 4 faldas
Luego al prímer día se puso la
primer blusa con la primer falda
al síguiente día se puso la otrablusa
y la otra falda, al 3er día se
puso la otra blusa con la otra
falda y sobro una falda
esa falda se la puso con la prímer
blusa al cuarto día, al quinto día
se puso la otra blusa con la ~~...~~
falda, al 6 sexto día se puso la ultima
blusa con la 4ª falda
En total se puso 6 maneras de ropa

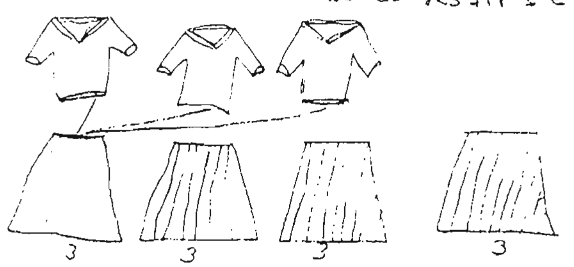
Las estrategias de solución que construyeron Salvador, Jéssica y sus compañeros han incorporado un elemento novedoso: la idea de movimiento, de temporalidad. Los niños no se conforman ya con contar las prendas que ven en el momento, sino que construyen una representación del problema que los lleva a **imaginar** y buscar más allá de ese momento inicial de **cuántas maneras distintas se puede Gloria vestir.**

Estas estrategias significan un avance en relación con las que analizamos previamente. Sin embargo, tienen aún una limitación pues los niños no logran llegar a la solución correcta.

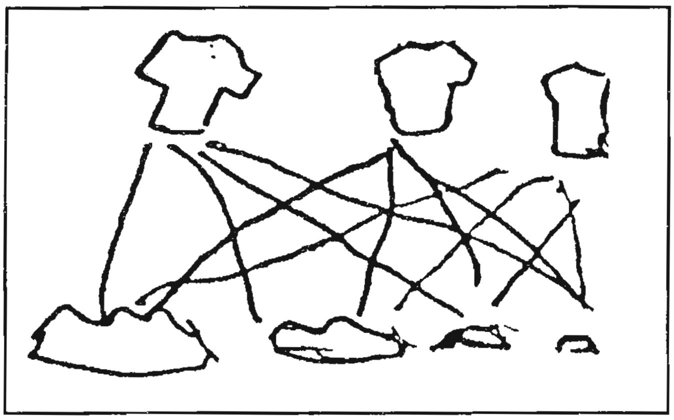
El progreso que permitirá arribar a la solución esperada lo veremos en los niños que construyeron sus soluciones de la siguiente manera:

•Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas
¿De cuántas maneras se puede vestir?

dose formas de vestirse



ALMA ROSA Y ARGELIA, SEXTO GRADO



SANTIAGO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Si miramos con cuidado las soluciones construídas por Alma Rosa, Argelia y Santiago, veremos que ellos han obtenido 12 como respuesta. **Estos niños que han arribado a la solución correcta de los problemas donde la multiplicación es entendida como la operación que permite calcular las combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos:**

- Se ha hecho una representación dinámica del problema en donde está incorporada la idea de tiempo, de movimiento.
- Esta representación les permite imaginar y buscar en el tiempo las diferentes combinaciones posibles.
- **Han incorporado un progreso fundamental: su procedimiento de búsqueda se ha vuelto sistemático y exhaustivo.**

Así tenemos que, por ejemplo, Alma Rosa y Argelia nos explican:

Primero dibujamos 3 blusas y
luego dibujamos 4 faldas y luego
con una de todas las faldas se
puede poner las 3 blusas y
con los demas seria igual

Santiago, que respondió correctamente hasta los problemas más difíciles, a nuestra petición de explicar responde:

"Este problema se puede hacer gráficamente, ¿no?... si tiene tres blusas, ahí están las blusas y las faldas, tiene 5 faldas (señala en un dibujo cada prenda; luego, continúa su explicación, con movimiento de dedos que unen la primera blusa con todas las faldas; la segunda blusa con todas las faldas; la tercera blusa con todas las faldas; va acompañando el movimiento con el conteo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)."

ENTREVISTADORA: ¿Y cómo explicarías a los niños que tuvieron mal este problema?

SANTIAGO: Les explicaría con la gráfica.

ENTREVISTADORA: ¿Y los niños que dijeron, por ejemplo, que eran 9 combinaciones, como éste (se le muestra una solución no sistemática), por qué crees que se equivocarían?

SANTIAGO: Lo que pasa es que se tienen que fijar bien, que no empiecen por acá (señala la blusa que está al centro del dibujo), que empiecen por la orilla, hasta terminar... así ya están seguros de que salen todas las combinaciones.

Hemos visto hasta aquí que:

Los niños han construído estrategias para revolver problemas donde la multiplicación reviste el significado de operación que permite calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos. Tales estrategias muestran una evolución que expresa el nivel de conceptualización de los niños en relación con este tipo de problemas. Dicha evolución puede sintetizarse así:

① Representación estática del problema

Este primer nivel puede dividirse a su vez en dos estratos:

- Interpretación de la combinatoria como el establecimiento de una correspondencia biunívoca y el conteo de las parejas obtenidas.

- Interpretación de la combinatoria como un problema calculable mediante la suma o resta de los datos.

② Representación dinámica del problema

Este nivel puede a su vez subdividirse en los estratos siguientes:
- Búsqueda no sistemática, y no exitosa, de las combinaciones posibles.
- Búsqueda sistemática, y exitosa, de las combinaciones posibles.

Haremos unos cuantos comentarios más sobre la construcción de este **significado de la multiplicación.**

Un significado que se construye en la escuela

Pocos niños, dijimos antes, habían estudiado en la escuela este significado de la multiplicación. Las estrategias que construyeron surgieron en los grados escolares que analizamos, con base en la solicitud de realizar una tarea específica: calcular el número de combinaciones posibles con 4 faldas y 3 blusas. Encontramos, sin embargo, algunos niños que utilizaron la multiplicación 3 X 4 para resolver el problema. Esos niños nos dijeron:

ALEJANDRO: O sea que esto (se refiere al problema)... yo también en tercero hice uno, ¿no? que si tuviera 3 camisetas y 4 pantalones... (imitando la voz de un maestro que dicta)... es lo mismo... y en tercero yo ya había sumado, bueno, yo hice un relajo, pero a mi hermano se lo enseñaron, luego él me lo explicó, luego ya lo supe hacer.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué él te explicó?
ALEJANDRO: Sí, y porque yo ya le entendí... el maestro también lo explicó.
ENTREVISTADORA: ¿Y cómo te lo explicaron, con muñequitos o cómo?
ALEJANDRO: ¡Sí, con muñequitos, y luego ya nos dijeron que la forma más rápida es multiplicar 3 X 4!

ALEJANDRO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

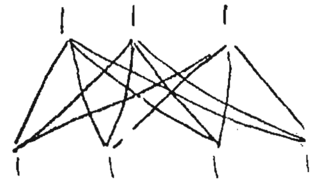
ADRIÁN: Son 12, 3 por 4, 12.
ENTREVISTADORA: ¿Cómo sabías que este problema era de multiplicación?
ADRIÁN: (pensativo) Porque son tres blusas, si se tuviera una falda, tres blusas por una falda... porque de tres blusas se pueden hacer tres combinaciones, y con 4, 3 por 4, serían 12.
ENTREVISTADORA: (pregunta la respuesta de otros problemas parecidos).
ADRIÁN: Son como el de combinaciones, tendría que multiplicar otra vez, 4 por 4, 3 por 5.
ENTREVISTADORA: ¿Dónde aprendiste los problemas de combinaciones?, ¿cómo sabes que los de combinaciones son de multiplicación?
ADRIÁN: En cuarto grado... la maestra Carmen los explicó... venían en el libro...

ADRIÁN, 12 AÑOS, SEXTO GRADO

Queremos destacar tres cosas de los diálogos con Alejandro y Adrián:

- Estos niños, al igual que aquellos que utilizaron algoritmo de la multiplicación para resolver los problemas **de combinaciones,** expresan que su fuente de aprendizaje fue la escuela. Todos hacen referencia a exigencias o explicaciones de los profesores y a las lecciones en los textos.
- Parece que la experiencia cotidiana no ofrece con frecuencia situaciones que permitan construir este significado de la multiplicación.
- A pesar que la escuela se reconoce como fuente de este aprendizaje, los niños no utilizan las estrategias que ésta les propone; por ejemplo los **cuadros de doble entrada**, para resolver tales problemas.

A excepción de una niña que iniciaba secundaria y que elaboró un **cuadro** para justificar su respuesta, los niños más adelantados prefieren utilizar **diagramas** como el que aparece...

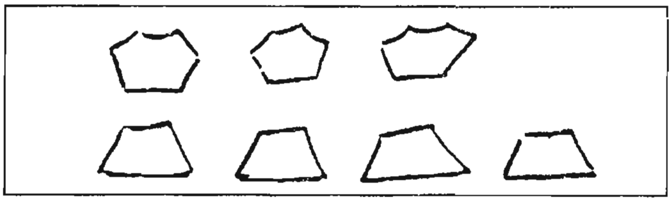


ALEJANDRO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

A lo largo de este capítulo hemos mostrado la evolución de uno de los significados de la multiplicación. Poniendo esto como ejemplo, podemos afirmar que:

Los conceptos y los significados se construyen paulatinamente, y esta construcción toma mucho tiempo. Tal vez más tiempo del que los maestros y los planeadores quisiéramos.

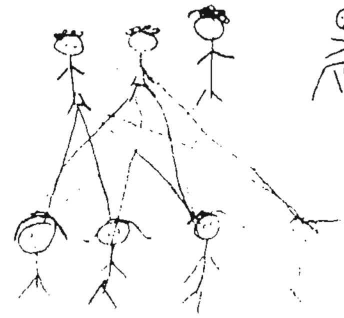
Sin embargo, podemos afirmar también que: **la interacción con los conceptos colabora en su progresiva construcción**. Esto lo pudimos observar en muchos niños, y con muchos temas, pero ejemplificaremos con los trabajo de Oscar. En un primer acercamiento a la combinatoria, por medio del problema **de las blusas**, Oscar realizó este dibujo para apoyar su solución, la cual resultó ser: *Gloria se viste de 7 maneras distintas:*



OSCAR SEXTO GRADO, 11 AÑOS

La segunda vez que Oscar entabló contacto con la combinatoria, elaboró una gráfica distinta para calcular las parejas posibles entre 3 niños y 4 niñas, como se ve en la ilustración.
Es decir, de una interpretación estática del problema, Oscar pasó no sólo a una interpretación dinámica sino también a un método sistemático y exhaustivo de búsqueda de la solución. Evoluciones similares observamos en muchos otros niños.

Vale la pena mencionar, por otra parte, que ni Oscar ni los otros niños recibieron explicaciones sobre este concepto u otros conceptos matemáticos. Simplemente se les dejó trabajar en grupo con sus compañeros y, después, confrontar sus resultados.



LECTURA
LOS NIÑOS CONSTRUYEN ESTRATEGIAS PARA DIVIDIR*

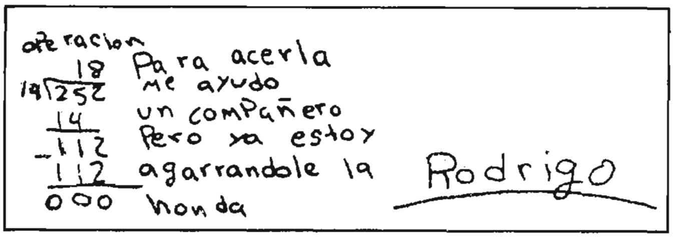
LOS NIÑOS CONSTRUYEN ESTRATEGIAS PARA DIVIDIR

Una mañana le planteamos a unos niños de tercer grado algunos problemas de división. Rodrigo no sabía utilizar el algoritmo y se valió de otras estrategias para resolverlos.

Al día siguiente trabajamos nuevamente con los mismos niños. Les pedimos resolver este problema.

Si se reparten 252 canicas entre 14 niños, de manera que a cada niño le toque la misma cantidad de canicas, ¿cuántas canicas le tocarán a cada niño?

En esta ocasión Rodrigo utilizó el algortimo de la división y dejó además este mensaje:



En este capítulo analizaremos la forma en que los niños resuelven problemas de división. Haremos hincapié en los niños que, como Rodrigo, no sabían utilizar el algoritmo de esta operación.

Hasta hace poco tiempo se creía imposible que los niños resolvieran problemas que no hubieran aprendido a solucionar en la escuela. Hoy sabemos que:

Los niños pueden resolver problemas que los maestros no les hemos enseñado porque han construído, en su experiencia cotidiana, estrategias y conocimientos matemáticos que les permiten resolver muchas de las situaciones que enfrentan.

*Alicia Ávila. "Los niños construyen estragias para dividir", en: *Los niños también cuentan*. SEP, Col. Libros del Rincón, México, 1993. pp. 31-39.

Por ejemplo, muchos niños de tercero y cuarto no sabían utilizar el algoritmo de la división, sin embargo, resolvieron los problemas que les presentamos. En las siguientes páginas relatamos cómo lo hicieron.

Repartimos de uno en uno

Abraham dio esta solución al problema de los **gises:**

• El maestro va a guardar 48 gises en 3 cajas, de manera que cada caja tenga el mismo número de gises, ¿cuántos gises debe guardar el maestro en cada caja?

ABRAHAM, 9 AÑOS, CUARTO GRADO

Muchos niños hicieron lo que Abraham: repartieron de uno e uno, en las cajas, los 48 gises ...algunos utilizaron frijoles, otros utilizaron dibujos.

Esta es la solución de Juan José para el problema de **las canicas:**

• Si se reparten 252 canicas entre 14 niños, de manera que cada niño le toque la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas le tocarán a cada niño?

JUAN JOSÉ, 8 AÑOS, TERCER GRADO

Varios niños utilizaron la estrategia de que se valío Juan José: repartieron de una en una, las

252 canicas ...nuevamente, unos los hicieron con frijoles, otros con dibujos.

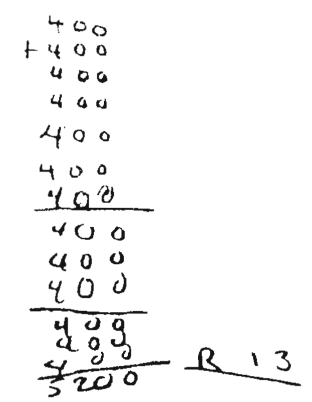
Como es fácil referirnos a las cosas si tiene un nombre, a todas las estrategias les hemos puesto el suyo. Así, a las estrategias como las que acabamos de ver las hemos llamado **estrategias descriptivas**. En ellas, los niños utilizan representaciones gráficas o repartos *objetivos* para resolver los problemas.

Pero las **estrategias descriptivas** no sólo pueden realizarse con dibujos o con objetos, también pueden realizarse mediante cálculos escritos, como hizo Hilda al resolver el problema de **los lápices** que aparece en la primera ilustración de la derecha; el problema se planteó así:

Si se tienen 5 200 pesos para comprar lápices que valen 400, ¿cuántos lápices se pueden comprar?

Este problema, aunque es de división, no es un problema de reparto, es un problema de saber *cuántas veces cabe el 400 en el 5 200.*

Hilda lo resolvió sumando repetidas veces el divisor hasta llegar al resultado.



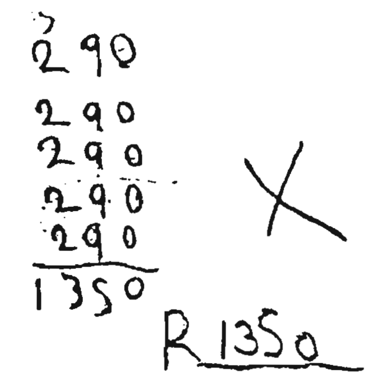
HILDA, TERCER GRADO 8 AÑOS

En otras palabras, Hilda iteró (repitió) el 400 tantas veces como fue necesario para llegar al 5 200.

Podrá pensarse que si los niños saben cuántas veces tienen que sumar el divisor, pues ya saben desde el principio el resultado. Pero esto no sucede. Los niños suman periódicamente para saber el resultado de su iteración. Hilda, igual que muchos otros, cada vez que sumaba borrada el resultado, agregaba algunos 400 más y sumaba nuevamente desde el principio. Así hizo hasta llegar al 5 200.

Y no sólo los niños de tercero y cuarto grado usan este tipo de estrategias, también algunos de sexto y de secundaria. Estos niños, sin embargo, ya no utilizan objetos o dibujos para hacer la división, utilizan solamente sumas. Así, algunos intentaron resolver mediante una suma escrita el problema que aparece en la ilustración.

•Un lápiz cuesta $290. Si tengo $13050 para comprar lápices ¿cuántos lápices puedo comprar?



JUAN MANUEL, SEXTO GRADO

Sin embargo, cuando los niños intentaron resolver el problema de **los lápices** con este procedimiento, no llegaron a la solución correcta. Y es que hicieron una mala lectura de los datos: leyeron 1 350 en vez de 13 050. Se toparon con el problema del cero.

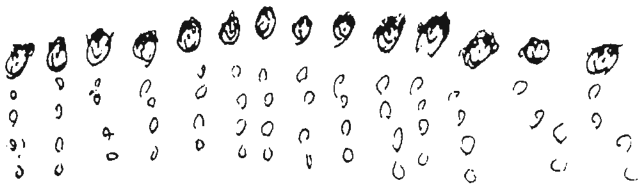
Si miramos con cuidado los ejemplos que hemos presentado, veremos que:

Las estrategias descriptivas permanecen muy ligadas a la situación planteada. Los niños simulan la acción de repartir o de iterar. Cuando reparten, realizan acciones como poner primero un gis en cada caja, luego otro gis... repartir una canica a cada niño, hacer un balance, luego repartir otra canica y hacer un nuevo balance... cuando iteran cantidades, realizan acciones como sumar varias veces el 290 y hacer un primer balance; sumarlo algunas veces más y hacer un nuevo balance...

Esta es la forma más elemental de resolver los problemas de división.

Pero **las estrategias descriptivas** no siempre resultan exitosas pues, sobre todo los niños más pequeños, a veces se fatigan. Por ejemplo, Luis Miguel:

•Si se reparten 252 canicas entre 14 niños, de manera que a cada niño le toque la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas le tocarán a cada niño?



LUIS MIGUEL, TERCER GRADO, 8 AÑOS

Luis Miguel no terminó de resolver el problema porque para él eran demasiadas las canicas que había que repartir. A muchos niños les sucedió algo parecido, inclusive a los más grandes. Estos niños **no llegaron** a la solución porque no encontraron otra estrategia para hacerlo.

Ante esta dificultad, otros niños sí logran construir nuevas estrategias. Veamos por ejemplo la que construyó Adrián.

De uno en uno es muy tardado

Adrián —a quien ya hemos mencionado— cursa tercer grado y tiene 8 años, intenta resolver el problema siguente: ¿cuántas cajas se necesitan si se colocan 252 huevos en cajas de 12 huevos?

Adrián busca la solución haciendo grupos de 12 frijoles. Con ellos representa las cajas con 12 huevos. Cuando lleva 9 grupos —tarea que lo ocupó varios minutos realizar— percibe la dificultad para repartir 252 huevos, pues le quedan muchos frijoles por repartir, y entonces dice:

"¡Oye, yo no voy a hacer chorros de éstos!" (su tono denota fatiga por la tarea que le esperaría de continuar con la estrategia).

Invitamos a Adrián a no desanimarse, y entonces encuentra otra estrategia.

Ésta es la solución de Adrián; no la construyó de golpe, la construyó paulatinamente:

•Si se tienen 252 huevos para acomodarlos en cajas de 12 huevos, ¿cuántas cajas necesito para todos ellos?

12 + 12
12 + 12 = 48

12 + 12 = 48
12 + 12

48 + 48 = 96

48 + 48 = 96 8 cajas

48 + 48 = 96

8 cajas

48 + 48 = 96
8 cajas

8 cajas

ADRIÁN, TERCER GRADO, 8 AÑOS

Adrián formó grupos de 12, los sumó y obtuvo 48, después sumó los grupos de 48 y sacó 96 ... Ahí, Adrián se detiene y dice:

ADRIÁN: Oye, pero no sé cuántos huevos llevo.
ENTREVISTADORA: ¿Y por qué no buscas una manera de saber?
ADRIÁN: ¿Cómo?... (se queda pensativo) ¡Ah, ya sé, le apunto aquí!

(Y entonces Adrián anota en cada agrupación el número de cajas que ha llenado: 8 cajas; sin embargo, esto no es útil para el fin que él busca que es saber cuántos huevos lleva repartidos y no logra concluir satisfactoriamente.)

Adrián inicia su resolución haciendo grupos de 12 frijoles. Sin embargo, su estrategia evoluciona y se convierte en una **estrategia constructiva**, pues Adrián deja de simular el acto de repartir. Explicamos esto un poco más:

En **las estrategias** que llamaremos **constructivas**, los niños ya no hacen dibujos donde simulan el acto de repartir uno a uno los objetos que indica el problema, ni efectúan sumas donde cada uno de los sumandos es el divisor. La longitud de los cálculos motiva a los niños a buscar formas de facilitarlos. Y algunos logran hacerlo, por ejemplo utilizando múltiplos o duplicando.

Y es precisamente de la necesidad de facilitar los cálculos, de donde surge la construcción de estrategias que orientan a los niños hacia la multiplicación y luego, hacia la división.

Por ejemplo, para Adrián, lo abrumador de la tarea, **¡hacer cachorros de grupos de 12!**, lo llevó a resolver el problema con duplicaciones sucesivas (12, 24, 48, 96). Pero Adrián no llegó a la solución porque encontró una dificultad que no pudo superar: le hizo falta un sistema de registro que le permitiera saber *cuántos huevos llevaba repartidos*. Este progreso, seguramente lo lograría con la práctica. Pero... quién sabe si en la escuela Adrián vuelva a utilizar esta estrategia.

Si imaginásemos que Adrián no perdió la cuenta y que siguió hasta obtener el resultado correcto, podríamos expresar así su solución:

12	+	12	=	24 huevos	(2 cajas)
24	+	24	=	48 huevos	(4 cajas)
48	+	48	=	96 huevos	(8 cajas)
96	+	96	=	192 huevos	(16 cajas)
192	+	48	=	240 huevos	(20 cajas)
240	+	12	=	252 huevos	(21 cajas)

De esta manera, Adrián hubiera llegado a la solución.

Adrián, con su **estrategia constructiva**, se ha acercado a una forma peculiar de multiplicar. El acercamiento a la multiplicación es un progreso importante en la construcción de la división.

La división también es una multiplicación

Todos sabemos que la división es la operación inversa de la multiplicación. Cuando los niños llegan a cierto nivel de conceptualización de estas operaciones, perciben dicha relación, aún cuando no la hayan aprendido explícitamente en la escuela.

Así, muchos niños resuelven problemas de división utilizando la multiplicación, por ejemplo, Luciano:

•Si se tiene 5 200 pesos para comprar lápices que valen 400 ¿cuántos lápices se pueden comprar?

400 × 4 = 2800 400 × 6 = 2400 400 × 5 = 2000 400 × 4 = 1600 400 × 3 = 1200

400 × 8 = 3200 400 × 9 = 3600 400 × 10 = 4000 400 × 11 = 4400 400 × 12 = 4800

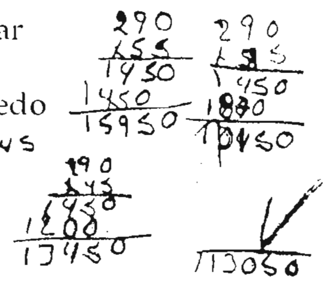
400 × 13 = 5200

LUCIANO, TERCER GRADO, 8 AÑOS

Luciano tenía $5200 para comprar lápices de $400. Como Luciano no sabía utilizar el algoritmo de la división, formuló una hipótesis: **puedo comprar 3 lápices** y pone a prueba su hipótesis multiplicando 400 x 3. Como su hipótesis no fue correcta, Luciano hace una nueva suposición: **puedo comprar 4 lápices**, y la pone nuevamente a prueba multiplicando 400 x 4... así continúa hasta llegar a 13 lápices.

Otros niños de tercero y cuarto hicieron lo que Luciano para resolver el problema de **los lápices**. Pero también muchos niños de quinto, sexto y secundaria utilizaron este procedimiento para resolver el siguiente problema:

•Un lápiz cuesta $290.
Si tengo
$13 050 para comprar
lápices,
¿cuántos lápices puedo
comprar? lapises R=45



FELIPE, PRIMERO DE SECUNDARIA

Luciano, Felipe y los niños que utilizaron esta estrategia, centran la atención en encontrar el factor que los lleve a obtener en la multiplicación un resultado igual al dividendo en el caso de la división exacta. Este factor será el cociente buscado.

Podemos decir esto en un lenguaje un poco más formal:

> **Los niños hipotetizan un cociente y lo ponen a prueba utilizando la multiplicación. En el caso de la división exacta, el cociente hipotético válido será el que, haciendo el papel de factor, los lleve a obtener como resultado de la multiplicación un número igual al dividendo.**

Como esta estrategia está basada en el planteamiento hipotético y prueba de cocientes, la hemos llamado **prueba del cociente hipotético.**

Pero, al igual que ocurre con los niños más pequeños, la estrategia no siempre resulta exitosa. También los niños grandes en ocasiones abandonan el proceso de resolución. Como por ejemplo Ivonne:

> • Un lápiz cuesta $290. Si tengo $13 959 para comprar lápices, ¿cuántos lápices puedo comprar?
>
> 290 × 5 = 1450
> 290 × 4 = 1160
> 290 × 8 = 2320
> 290 × 11: 290 + 2900 = 3190

IVONNE, PRIMERO DE SECUNDARIA

Y es que, para que los niños puedan llegar a los resultados con esta estrategia, tienen que poner también en marcha mecanismos auxiliares para realizar el cálculo, tales como la **estimación.**

La estimación permitirá a los niños saber *por dónde* estará el resultado y empezar a multiplicar con un factor no demasiado alejado del correcto, sobre todo cuando el cociente es un número grande.

Pero... ¿por qué los niños escogen la **prueba del cociente hipotético** como estrategia de resolución?

Los niños pequeños escogen esta manera de resolución porque en la escuela no han aprendido el algoritmo de la división.

En el caso de los niños mayores, la **prueba del cociente hipotético** la utilizan quienes tienen dificultades para resolver las divisiones utilizando el algoritmo.

Pero tanto los niños que no han aprendido el algoritmo, como los que tienen dificultades para usarlo, tienen claro que la división es la operación inversa de la multiplicación. Y estos niños muchas veces resuelven los problemas buscando el factor faltante.

> **La prueba del cociente hipotético** la utilizan algunos niños de tercero de primaria y a medida que se avanza en la escuela, su uso se hace más frecuente.
>
> **El uso de esta estrategia muestra un amplio conocimiento de las relaciones entre la división y la multiplicación. Los niños que la utilizan han convertido la división en una "multiplicación con hueco" para resolver problemas que de otra forma les serían inaccesibles.**

Para dividir, utilizamos la división

Por supuesto que muchos niños utilizan el algoritmo de la división para resolver los problemas que implican el uso de esta operación. Y, al igual que ocurre con la prueba del cociente hipotético, a medida que avanzan en la escuela lo utilizan con más frecuencia.

Pero, hemos de decir, los niños no manejan el algoritmo de la división tan bien como esperáramos. En general, a los niños les lleva mucho tiempo resolver las divisiones; muchos cometen errores de cálculo y otros necesitan utilizar apoyos adicionales para realizarlas.

> Hemos observado que los niños utilizan diversas estrategias para resolver problemas de división. Tales estrategias muestran un avance progresivo que podemos ordenar así:
>
> - simulación de la acción de repartir o de iterar, que incluye la suma repetida del divisor.
> - búsqueda de estrategias que se orientan a la multiplicación, por ejemplo el uso de múltiplos del divisor o duplicaciones;

- prueba del cociente hipotético, mediante el establecimiento de la relación inversa con la multiplicación, y
- manejo del algoritmo convencional; con la ayuda de la escuela.

Estas estrategias evidencian que el significado de la división, así como las habilidades con que los niños se acercan a los problemas que la implican, se construyen y se desarrollan poco a poco. Y esta construcción se realiza en relación con otros conceptos y habilidades, como por ejemplo la multiplicación y la estimación.

Quizás ahora algún maestro piense que es importante conocer lo que los alumnos hacen, más alla del esquema **datos-operaciones-resultado**, que con tanta frecuencia se utiliza y que obliga a los niños a ocultar sus procedimientos.

Y ya para terminar este apartado, recordemos el mensaje que escribió Rodrigo y que anotamos al inicio del capítulo:

Para acerla
me ayudo
un compañero

Pero ya estoy
agarrandole la
honda

Nos parece que Rodrigo avanza y lo hace al menos por dos razones: porque ha estado en interacción con los problemas de división y porque un compañero intercambió y aportó ideas y le aclaró dificultades. ¿Es esto algo que permitimos en nuestra clase?

QUINTA UNIDAD

VARIACIÓN PROPORCIONAL

LECTURA: RAZÓN Y PROPORCIÓN*

RAZÓN Y PROPORCIÓN

Consideraciones Generales

En esta propuesta de trabajo el tema de razón y proporción está dividido en dos partes. Una corresponde al quinto grado y la otra a sexto.

Si bien es cierto que en cuarto grado se introduce el tema con ideas geométricas de modelos a escala, es hasta quinto grado donde el enfoque es numérico y abarca la presentación de las nociones de razón, su forma fraccionaria y porcentaje, además de las interrelaciones entre estos conceptos. En el sexto grado se aplican y se amplían estas ideas con el fin de desarrollar en el niño el razonamiento proporcional. Lo anterior está enfocado, en todos los casos, a mostrar las relaciones entre estos temas y la vida real. En el cuarto grado no se sugieren actividades nuevas, excepto por las contenidas en el Libro de Texto de la SEP.

El material de quinto grado consta de una explicación breve para el maestro de los temas que se tratarán. Ésta se encuentra en la sección llamada "Reflexión" y comprende sólo la primera parte de "Ideas importantes" que se refiere a la idea de comparación y a las nociones de razón y porcentaje. Las actividades que corresponden a este grado son las siete primeras actividades sugeridas: de la 1A a la 7A. Al final de esta guía, se hacen algunos comentarios sobre los problemas relacionados con razón y proporción, que están propuestos en el Libro de Texto de la SEP de este nivel.

Se aconseja al profesor de quinto grado que revise la presentación sobre proporcionalidad incluida en esta guía y que corresponde al sexto grado, para que tenga una visión más completa de este tema y pueda preparar mejor a sus alumnos para el siguiente nivel.

El material de sexto grado consta de una explicación para el profesor sobre el enfoque que se le quiere dar al tema de proporcionalidad en la primaria. Ésta comienza en la sección de "Ideas importantes" con el concepto de variación y comprende el resto de la sección de "Reflexión". Las actividades que corresponden a este grado son las últimas ocho actividades sugeridas: de la 8A a la 15A. También se incluyen en la sección "Referencias al Libro de Texto, SEP", algunos comentarios sobre las actividades relacionadas con razón y proporción que se incluyen en dicho texto y se dan sugerencias de cómo integrar estos materiales.

Al final de este escrito se dan algunos consejos muy breves sobre la evaluación de este tema.

Es sumamente importante que el profesor de sexto grado se familiarice con el material presentado sobre los temas que corresponden al quinto grado. Existen diversas razones para ello. Primero, este material es el complemento básico de lo que está expuesto para el último año de la escuela primaria. Segundo, es una buena idea que el profesor de sexto, antes de entrar propiamente al tema de proporcionalidad, retome las nociones de razón, su forma fraccionaria y porcentaje, en forma similar a como se sugiere que se haga en el quinto grado. Tercero, en el primer año de implementación de este programa, los niños que entran a sexto, no habrán todavía cubierto este material en quinto, así que el profesor de ese grado escolar necesitará comenzar desde la actividad 1A.

Reflexión

Introducción

En el Libro de Texto de la SEP correspondiente al sexto grado, se puede observar que el tema de la proporcionalidad es uno de los más frecuentes, lo cual refleja su importancia.

La proporcionalidad puede considerarse como la piedra angular de la matemática y de la

*Olimpia Figueras, Gonzalo López Rueda y Simón Mochón. "Razón y proporción", en: *Guía del maestro quinto grado.* SEP, México, 1992. pp. 13-21.

física. Muchas otras ciencias también necesitan de la proporción para explicarse mejor. En física este concepto juega un papel primordial. Un coche que se mueve a velocidad constante duplica su distancia recorrida cuando se duplica el tiempo. En general, todas las fórmulas de la física están basadas en una suposición de proporcionalidad. Por ejemplo, "el alargamiento de una barra de metal es proporcional al cambio de su temperatura".

La mayor parte de las aplicaciones de la matemática en la vida cotidiana están basadas en este concepto. Sólo basta con pensar en algunos ejemplos como el precio de productos, el cambio de moneda, porcentajes, las cantidades de los ingredientes en recetas de cocina, o situaciones semejantes. Sin embargo, a pesar de la frecuencia con que las empleamos, las ideas de proporcionalidad son en general, mal entendidas. Esto se debe a que, además de ser un tema relativamente complicado, está enfocando, en el nivel escolar, de una manera mecánica, al algoritmo de la regla de tres.

Los argumentos anteriores nos indican que debemos dedicar un tiempo suficientemente amplio de nuestro programa al tema de la proporcionalidad para poder desarrollar sus ideas paulatinamente. Esto no quiere decir que tenemos que descuidar los otros temas. Al contrario, las situaciones de proporcionalidad son un ambiente que ayuda al niño a ampliar y aplicar conceptualmente sus ideas sobre la fracción. Además, es una buena oportunidad para practicar las operaciones de multiplicación y división, mediante la resolución de problemas con contextos reales.

Los objetivos que se persiguen dentro de este tema son:

- Que el niño vaya construyendo las nociones más importantes relacionadas con el concepto de proporcionalidad, tales como las nociones de razón y de variación y algunas otras que se indican en las secciones siguientes.
- Que el niño aplique las ideas de proporcionalidad a problemas reales, dándole los suficientes elementos para decidir cuándo esta aplicación es la indicada y cuándo no lo es.
- No se pretende que el niño resuelva problemas de proporcionalidad con datos muy complicados ni mucho menos que aplique a ciegas el algoritmo de la regla de tres, para lo cual se necesitan nociones de álgebra más avanzados. El objetivo principal es desarrollar en el niño una primera base conceptual sobre este tema para que pueda aplicarlo a su vida cotidiana y pueda entender los planteamientos más formales que se le presentarán en la secundaria.

Para lograr con éxito este objetivo debemos conocer, en nuestro papel de maestros, los enfoques que se pueden seguir, las ideas fundamentales que debemos desarrollar en el niño y algunos resultados importantes dentro de la investigación sobre este tema que son relevantes en la actividad docente. Todo esto se tratará de exponer en las siguientes secciones.

Ideas importantes

Posiblemente la idea básica sobre la cual se van construyendo los demás conceptos que integran la proporcionalidad es la de *comparación*. Podemos hacer una comparación cuantitativa de cantidades, de dos maneras distintas. Una aditiva, por medio de su diferencia, y otra multiplicativa, por medio de su cociente (a la cual llamamos razón). Las primeras actividades, que sirven de apoyo para construir la noción de razón, deben estar encaminadas a distinguir entre estos dos tipos de comparación. Por ejemplo, si Juan tiene 4 años y su hermano tiene 12, podemos decir que Juan es 8 años menor que su hermano (comparación aditiva) o que su hermano tiene el triple de la edad de Juan (comparación multiplicativa).

Hay que aclarar que ambas comparaciones son correctas y que se usa una u otra dependiendo de cuál es más apropiada en el contexto real y para el propósito del problema que queremos resolver, aunque es importante insistir en que la comparación aditiva no implica el establecimiento de una razón.

La comparación es una idea fundamental que debe iniciarse desde muy temprano, dentro de los temas de suma y resta, con la noción de diferencia. Posteriormente, en la multiplicación y la división, aparece la comparación del tipo: "¿Cuántas veces cabe?".

Más adelante este mismo tipo de comparación (sin residuo) nos lleva al concepto de fracción como comparación entre dos cantidades. Ejemplos de estas tres maneras de comparar son:

1.- Simón mide 1.43 metros y Rogelio 1.56 metros, ¿cuántos más mide Rogelio que Simón? (Diferencia).

2.- La maestra tiene 100 hojas y quiere repartir 3 a cada uno de sus alumnos, ¿para cuántos alumnos le alcanzarán? (¿Cuántas veces cabe el 3 en el 100?).

3.- Un niño camina 2 kilómetros para ir a su escuela, otro niño camina 5 kilómetros, ¿cuántas veces es más largo el segundo camino que el primero? (Fracción).

4.- El terreno del Sr. Domínguez tiene un área de 400 metros cuadrados y el del Sr. Pérez tiene sólo 160 metros cuadrados. ¿Cuántas veces es más grande el primero que el segundo? (Fracción).

El concepto de perímetro de un círculo cae dentro de esta idea de comparación pero con una razón que no es una fracción y por lo cual resulta mucho más complicado. ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la circunferencia de un círculo?: "Π veces". Ésta es, realmente, la definición del número Π. Por la dificultad que presenta este concepto, se recomienda trabajarlo hasta el sexto grado, cuando las ideas de razón hayan sido desarrolladas más firmemente.

Las actividades que propondremos en una sección posterior están encaminadas a desarrollar en el niño en concepto de razón como "una comparación multiplicativa entre dos cantidades". Esta definición no debe darse a los niños desde el principio sino hasta que hayan descubierto por ellos mismos las ideas que dicha definición encierra.

Un punto muy importante acerca de la razón es que contiene la relación de los tamaños entre las dos cantidades pero que pierde la información sobre las magnitudes originales de las cantidades. Por ejemplo, si decimos que la razón de niñas a niños en un salón de clase es de 3 a 5, lo único que sabemos es que por cada 3 niñas habrá 5 niños, pero no podemos decir cuántos niños o cuántas niñas hay en el salón.

Lo mismo sucede cuando usamos la forma fraccionaria de la razón; por ejemplo, cuando decimos que las 3/8 partes de la clase son niñas.

Lo anterior está intimamente relacionado con la equivalencia de razones. Si un salón tiene 18 niñas y 30 niños, la razón de estas dos cantidades es de 18:30, pero esta razón puede reducirse a 9:15 ó a 3:5. Así, un primer acercamiento a la razón debe tener ideas sobre su carácter relativo junto con el significado de razones equivalentes.

La simbología que se usa para denotar una razón es variada. Cualquiera de las formas siguientes son equivalentes: 9 de 15, 9 a 15 y 9:15. La elección de alguna de ellas dependerá del contexto en el que se está trabajando (es recomendable que se utilice siempre la más clara). También se puede representar una razón como una fracción. Por ejemplo, las razones anteriores pueden escribirse como: 9/15. Hay que aclarar que esto va más allá de ser una simple escritura. Aquí estamos asociando a la razón un número fraccionario que debemos saber interpretar. Cuando la razón relaciona una parte y su todo, esa interpretación es más o menos sencilla. Por ejemplo, si decimos que una de cada 5 personas es china, podemos decir también que la quinta parte de la población del mundo es china. Esta interpretación es mucho más difícil en aquellos casos en los que la razón relacione parte con parte o relacione dos cantidades de diferente medida. Por ejemplo, la razón de 9 a 15 entre niños y niñas también puede expresarse como 9/15, pero aquí la interpretación de este número es más complicada, ya que la fracción se usa como una comparación entre dos cantidades diferentes.

Se debe tratar de presentar a los alumnos actividades en las que la razón representada por medio de una fracción tenga un significado lo más concreto posible. Por ejemplo, la comparación de la distancia recorrida por un coche (100 km) y su consumo de gasolina (8 litros) tiene una razón en forma de fracción de 100/8= 12.5, la cual representa los kilómetros que puede recorrer el coche con un litro de gasolina.

Otro punto importante es el orden de las cantidades de una razón. Al especificar una razón debe quedar muy claro qué cantidades intervienen en ella y en qué orden. Por ejemplo, no tiene sentido decir que la razón de niños en un salón de clase es de 3 a 5. Aquí cabría la pregunta: ¿la razón de niños relativa a qué? Se puede decir, en cambio, cualquiera de las formas equivalentes: la razón de niños a niñas es de 3 a 5 o que de niñas a niños es de 5 a 3, o que de niños al total es de 3 a 8, y así sucesivamente. En situaciones de escala, sin embargo, hay una convención especial en el orden de las cantidades. Éste es: de escala a referencia. Convendría aun en estas situaciones especificar de dónde a dónde se está dando la razón.

Las aplicaciones cotidianas del uso de la razón son la escala y los porcentajes. Las escalas tienen la ventaja de que pueden visualizarse geométricamente, por lo cual pueden servir como una buena introducción al concepto de razón. Los porcentajes, por otro lado, tienen la ventaja de que pueden utilizarse en contextos reales conocidos por el niño. Una idea para introducir porcentajes es que son razones equivalentes que están referidas a 100 unidades. El 30% (30 por ciento) significa 30 de cada 200. Si de 200 personas invitadas a una fiesta 160 son niños, habrá 80 niños por cada 100, o sea el 80%.

Esta noción del tanto por ciento se puede desarrollar conceptualmente haciendo ejercicios contextualizados en donde se vean las conexiones entre la razón, su forma fraccionaria y su paso a porcentajes. Las actividades 5A y 6A tienen este propósito.

Por último, debemos explicar la utilidad de trabajar con una comparación entre dos cantidades y no con sus valores originales. El porcentaje muestra esto muy bien. Por ejemplo, el anuncio: "Toda la tienda tiene el 20% de descuento", está indicando algo muy general, independientemente de los precios de cada cosa. Cifras sin referencias, no dan a veces una idea clara de la situación: por ejemplo, cuando decimos que 200 trabajadores de una fábrica fueron despedidos. En cambio, una cantidad relativa da mayor información: el 50% de los trabajadores fueron despedidos. De igual manera, el uso de razones o fracciones para relacionar cantidades es muy conveniente en muchas circunstancias, ya que sintetiza una información valiosa.

Una segunda idea importante es la de *variación* de una cantidad relativa a otra. ¿Cuáles son los tipos de variación más comunes que podemos observar en la realidad? Aquí necesitamos enseñar al estudiante que hay muchas maneras en las que una cantidad puede depender de otra. Afortunadamente, la variación proporcional que es de las más simples, es también la que aparece más frecuentemente en nuestra vida cotidiana y por lo cual conviene estudiar sus propiedades más a fondo. No sólo es importante saber aplicar la proporcionalidad a problemas reales sino que además, debemos saber diferenciarla de otro tipo de variaciones, para que no se use a ciegas en circunstancias que no sean adecuadas. En una sección posterior daremos algunas actividades para mostrar al profesor cómo puede investigar en el salón de clase diferentes tipos de variaciones con sus alumnos. Por lo pronto, daremos aquí algunos ejemplos de variación para aclarar las ideas descritas arriba.

Una variación muy conocida es la que se utiliza en situaciones de compra y venta, entre el precio y la cantidad comprada. Supongamos que una pluma cuesta $1,500. Sabemos entonces que 2 costarán $3,000 y que 3 costarán $4,500. ¿Qué es lo que observamos? Si duplicamos una de las cantidades la otra también se duplica. Si triplicamos una cantidad, la otra también se triplica. Podemos ayudarnos a describir esta variación (y otras) con una tabla de valores:

Cantidad	Precio
1	1,500
2	3,000
3	4,500
.	.
.	.
.	.
10	15,000

Veamos otro ejemplo: En 30 días una fábrica produce 600 coches. ¿Cuántos producirá en 60 días, 15 días, 10 días? La tabla siguiente da los resultados:

Días	# de coches
30	600
60	1,200
15	300
10	200

¿Por qué? Al igual que dobles y triples, la proporcionalidad transfiere también a la otra cantidad, mitades, terceras partes, o cualquier otro submúltiplo.

Veamos ahora otro tipo de variaciones. Vimos ya que Juan tiene 4 años y su hermanito tiene 12. ¿Cómo cambiarán estas edades con el tiempo? La siguiente tabla ilustra esta variación:

Edad de Juan	Edad del hermano
4	12
mitad 5 tercera parte	mitad 13 tercera parte
6	14
7	15
8	16

¿Es ésta una variación proporcional? ¿Al duplicar la edad de Juan, se duplicó la de su hermano? No. Ésta es una variación aditiva. Ambas cantidades se incrementan, pero si una aumenta digamos en tres unidades (de 4 a 7), la otra también aumentará en tres unidades (de 12 a 15).

Observemos ahora el siguiente ejemplo: Se van a repartir 72 kg de carne entre algunas personas. ¿Cómo depende la cantidad que le toca a cada una del número de personas que se van a repartir? Por ejemplo, si eran 2 personas solamente, les tocaría 36 kg a cada una. La siguiente tabla proporciona este valor y otros posibles:

Número de personas	Cantidad a cada una
2	36
3	24
4	18
6	12
8	9
9	8

Ésta tampoco es una variación proporcional. Mientras una catidad crece la otra decrece (posteriormente regresaremos a comentar sobre este tipo de variación).

Por último, veamos la tabla siguiente que nos da la variación de las estatura (en centímetros) de un niño con su edad (en años):

Edad	Estatura
0	40
5	100
10	140
15	165
20	180
25	180

Nuevamente podemos concluir fácilmente que no es una situación de crecimiento proporcional.

¿Qué caracteriza entonces a la variación proporcional? Ya vimos que una propiedad importante de esta variación es que transfiere de una cantidad a la otra cambios multiplicativos como el doble, el triple, la mitad, la cuarta parte, o bien, cualquier otro múltiplico o submúltiplo.

Volviendo a las primeras dos tablas de: cantidad-precio y días-coches, hay, en cada una, una cantidad adicional que se mantiene a lo largo de la tabla. Ésta es el cociente de las dos cantidades. En la primera, si dividimos precio entre cantidad siempre nos dará 1,500 (el precio unitario). En la segunda, si dividimos el número de coches entre los días, siempre no dará 20 (la producción de coches diaria). Estos cocientes representan en forma de fracción, las razones de cada par de valores en la tabla. Por lo tanto, las razones de cada hilera son equivalentes. En ninguna de las otras 3 tablas sucede esto.

Así, la culminación del estudio de la proporcionalidad debe llegar a concluir que es una variación en la que se mantiene constante el cociente entre las dos cantidades. O lo que es lo mismo, que las razones entre cada pareja de valores de las dos cantidades son equivalentes. Esta característica, junto con la propiedad mencionada anteriormente del doble, el triple, o cualquier otro múltiplo, serán nuestras herramientas para resolver problemas de proporcionalidad con sentido y no aplicando mecánicamente una regla. Para terminar con proporcionalidad daremos la definición siguiente: "Una proporción es una suposición sobre la equivalencia entre dos razones o la igualdad entre las fracciones que las representan".

Un comentario final. La tercera tabla que se dio de número de personas-cantidad a cada una ejemplifica una variación llamada "proporcionalidad inversa". En este tipo de variación, las dos cantidades no varían proporcionalmente. Se utilizan el término "proporcionalidad inversa" porque una cantidad varía proporcionalmente con el inverso multiplicativo (uno entre la cantidad) de la otra cantidad. Así, en una variación inversa, si una cantidad se duplica, la otra se reduce a la mitad. En este tipo de variación es el producto de las cantidades y no su razón el que se mantiene constante, como es fácil constatar en la tabla. No sabemos cómo se empezaron a usar razones para resolver problemas de proporcionalidad inversa, pero el hecho es que es un enfoque totalmente erróneo. Aun cuando este tipo de variación debe tocarse muy someramente en la primaria, para compararla con la directa, el profesor interesado en tratarla con más profundidad debe tener presente que su característica es la de productos constantes y no razones constantes. Su desarrollo debe ser muy parecido al que daremos en las actividades para la proporcionalidad directa.

Enfoques de la proporcionalidad

Se pueden usar varios enfoques para resolver problemas de proporcionalidad. Aquí describiremos cuatro de ellos, mencionando sus ventajas y desventajas y cuál es el más apropiado para la enseñanza de la proporción en la primaria. Para ilustrar estos enfoques, resolveremos en cada un de ellos el siguiente problema: una docena de lápices cuesta $3,000, ¿cuántos costarán 30 lápices?

Enfoque Núm. 1: Uso de tablas y razonamiento pre-proporcional

En este enfoque se utiliza una tabla como las que se presentaron en la sección anterior, la cual se va extendiendo con la ayuda de ir efectuando dobles, triples, mitades, cuartos, décimos, etc., y sumas de estas cantidades. Ésta es posiblemente la estrategia más natural, ya que se apoya en las propiedades más intuitivas de la proporcionalidad. Este enfoque, además de ser el más fácil, desarrolla en el niño la noción de proporcionalidad.

Se sugiere emplear este enfoque durante la primera fase de la enseñanza de la proporcionalidad. El problema planteado al principio se resolvería con este método de la siguiente manera:

Número de lápices	Costo
12	3,000
doble de 12- 24	6,000
mitad de 12- 6	1,500
suma de 24 y 6- 30	7,500

30 lápices deben costar 7,500 pesos.

Enfoque Núm. 2: Razonamiento proporcional

Aquí se hace uso de la constancia de la razón en forma de cociente que se tiene para cada pareja de datos de una variación proporcional.

En el caso del problema dado, la igualdad de las razones de costo a lápices es:

$$\frac{3000}{12} = \frac{????}{30}$$

Esta "ecuación" puede resolverse de manera razonada, por medio de varias técnicas, de las cuales mencionaremos dos (en la actividad 13a. se ilustra mejor este proceso):

a) Equivalencia de fracciones:

$$\frac{3000}{12} \overset{\text{mitad}}{=} \frac{1500}{30} \overset{\textbf{mitad}}{=} \frac{750}{3} \overset{\text{x10}}{=} \frac{7500}{30}$$

b) Obteniendo el factor de proporcionalidad de dos de los datos por medio del cociente entre ellos (que sabemos debe mantenerse constante) y aplicándolo al otro dato (multiplicando):

$$\text{factor de proporcionalidad} = \frac{3000}{12} = 250$$

por lo tanto: ???? = 30x250=7,500

Enfoque Núm. 3: Unitario

En este enfoque se pasa a la razón unitaria por medio de una división y después se multiplica por la cantidad deseada.

Refiriéndonos al ejemplo dado, la división de 3,000 - 12= 250, nos daría el costo unitario de un lápiz y la multiplicación de 30 x 250= 7,500 nos daría el costo de 30 lápices. El inconveniente que tiene este enfoque es el que paso a la razón unitaria puede ser innecesariamente pesado. Por ejemplo, si se conoce el costo de 1,000 hojas y se desea el de 2,000 sería absurdo calcular primero el costo de una sola hoja. Además, no siempre la razón unitaria en un contexto real puede interpretarse fácilmente.

Enfoque Núm. 4: Algorítmico

Éste implica el uso de la llamada regla de tres y de los productos cruzados para resolver la incógnita. No es un enfoque apropiado en primaria ya que, por lo general, presupone el conocimiento y manejo de algunas nociones de álgebra, además de que se trabaja de manera muy mecánica, cosa que quiere evitarse en este nivel elemental.

Este enfoque puede presentarse en clase, después de los tres anteriores, como una alternativa cuando los datos del problema son lo suficientemente complicados.

En realidad, el procedimiento que se sigue en la regla de tres (dividir entre un número y multiplicar por el otro, o viceversa), puede ser descubierto por los niños, se les guía con ejercicios apropiados, siguiendo un razonamiento proporcional o el enfoque unitario.

Algunos resultados de la investigación

Existen varios resultados de la investigación sobre razonamiento proporcional llevada a cabo con niños que sería conveniente que un profesor de primaria (y de Secundaria) conociera. Éstos pueden servirle como guía para diseñar actividades apropiadas para los niños y para diagnosticar mejor sus errores. Citaremos aquí brevemente los tres más importantes.

Un niño pasa por etapas de desarrollo en relación con el razonamiento de tipo proporcional; este proceso es lento. Las etapas puede caracterizarse de la siguiente manera:

1. Incompleta: Ignora parte de los datos o de una respuesta ilógica.
2. Cualitativa: Ya toma en cuenta todos los datos, pero sólo puede hacer consideraciones cualitativas (por ejemplo, "necesita más" o "necesita menos").
3. Aditiva: Usa diferencias en vez de proporcionalidad.
4. Pre-porporcionalidad: Razonamiento correcto que no se basa en la razón de dos de las cantidades sino en una combinación de duplicar, triplicar, tomar medios, o procesos de ese tipo y sumar estas contribuciones.
5. Razonamiento proporcional: Uso directo de la razón entre dos cantidades para llegar al resultado.

Hay que aclarar que no todos los niños pasan por todas estas etapas, ni necesariamente llegan a la última, y que un niño puede estar, por ejemplo, en una etapa pre-proporcional pero que al presentarle un problema más complicado de proporcionalidad puede mostrar un razonamiento aditivo.

La estrategia aditiva incorrecta (No.3) es muy común, por lo cual conviene ejemplificarla:

Problema: Una jarra de agua de naranja se hace con 4 naranjas y 7 vasos de agua. ¿Cuántos vasos de agua hay que mezclar con 6 naranjas para que el agua tenga el mismo sabor?

Respuesta aditiva usando diferencias: Como 6 naranjas son 2 más que 4 naranjas, necesitaremos 2 vasos más de agua, o sea 9.

Es por esto que conviene que se hagan actividades en las que se observe explícitamente la propiedad de la constancia de la razón y que la diferencia no es un indicador de proporcionalidad.

La estrategia aditiva incorrecta no debe confundirse con modos aditivos correctos de solución (3 manzanas por $500: 9 manzanas por $500 + $500 + $500 = $1,500), los cuales generalmente son preferidos por los niños a los modos multiplicativos.

Hay que aclarar que esta lista de cinco etapas no debe usarse para clasificar a los niños, lo cual es una tarea muy complicada y de poca utilidad para el profesor. La finalidad de esta información es que el profesor esté preparado y vea de manera natural que algunos de sus alumnos usen estrategias aditivas o den respuestas cualitativas. El objetivo de este estudio del tema como está planteado en las actividades es que poco a poco los niños abandonen estas formas inadecuadas de razonamiento.

El segundo bloque de información que se tiene es que la dificultad de los problemas de propocionalidad depende en gran medida de los datos usados. Aun cuando no daremos todos los niveles, podemos decir que debemos empezar la enseñanza usando razones enteras, o sea aquéllas en las cuales una cantidad es un múltiplo de la otra como 3 a 6, o 5 a 15 y trabajar con dobles, triples, mitades, mitades de mitades. Sólo posteriormente se pueden introducir razones no enteras como 2 a 3, 3 a 4, o cualquier otra. (Nótese que en estas parejas una cantidad no es un múltiplo de la otra y por lo cual, el cociente de ellas no será entero). Aún cuando estas últimas son mucho más complicadas que las primeras, no deben evadirse completamente ya que son las que realmente sacan a la luz la importancia de un razonamiento proporcional.

Por último, se ha demostrado que los niños usan razonamientos proporcionales en problemas de variación inversa. Esto obviamente está indicando un entendimiento pobre de las situaciones donde se puede aplicar la proporcionalidad. Es por esto que debemos hacer énfasis en analizar primero si la situación satisface la propiedad más elemental de la proporcionalidad, que es la de transferir de una cantidad a la otra cambios multiplicativos.

Creemos que es importante trabajar un poco en primaria con la variación inversa, y dejar para secundaria un desarrollo más profundo y formal. La actividad 15A, muestra los primeros pasos para introducir en clase este tipo de variación (no usando razones).

LECTURA: UN CONCEPTO Y MUCHAS POSIBILIDADES*

UN CONCEPTO Y MUCHAS POSIBILIDADES

Unas cosas dependen de otras, es el título de la lección con que se inicia la variación proporcional directa en el texto gratuito de sexto grado. En esta lección se pide a los niños llenar tablas como las siguientes:

• En algunos casos una cosa depende de otra. Una cantidad está en función de otra.

El kilo de tortilla vale $ 3.60
Si la mamá de Simón compra 3 kilos paga $ 10.80
Si compra 4 kilos paga $________
Si compra 6 kilos paga $________
Si compra________kilos paga $ 7.20
Si compra________kilos paga $ 36.00
Si compra 7 kilos paga $________
Estos datos pueden resumirse así:

Kilos de tortilla	Precio en $ 3.60
3	10.80
4	
6	
	7.20
	36.00
7	

• Pon los datos en una tabla ordenada así, y completa.

Kilos de tortilla	Precio en $ 3.60
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

A una variación de 1 kilo de tortilla le corresponde una variación de $3.60 en el precio. El precio de las tortillas está en función del peso de las tortillas.

La forma en que se aborda el tema en la lección es uno de los acercamientos posibles a la variación proporcional directa. Pero este tema puede abordarse de diferentes maneras. Los maestros recordarán, por ejemplo, que en los libros de los años sesenta se privilegiaba el uso de la regla de tres, los actualmente vigentes ponen de manifiesto las propiedades de la función lineal... Y es que este concepto por ser bastante complejo, puede ser abordado de distintas formas.

Piaget señaló en diferentes obras que el manejo de la variación proporcional es propio del estadio de las operaciones formales; que los niños logran comprender los problemas que la implican hacia los 12 o 13 años. Sin embargo, la variación proporcional directa ha estado siempre en la escuela primaria. Y los maestros siempre la han enseñado.

La presencia de este tema ha merecido y merece diversas opiniones, unas favorables y otras no. Muchos profesores e investigadores piensan que es mejor esperar a que los niños estén maduros para iniciar el tema. Hay otros que dicen, a la inversa, que poner a los niños en contacto con los conceptos los ayuda a evolucionar intelectualmente.

En las siguientes páginas hablaremos de todo esto, sólo que desde la perspectiva de los niños. Veremos que, de acuerdo con su nivel de conceptualización y las características de los problemas que se les plantean, ellos hacen distintas interpretaciones y abordan de manera distinta

*Alicia Avila. "Un concepto y muchas posibilidades", en: *Los niños también cuentan*. SEP, Col. Libros del Rincón, México, 1993, pp. 41-53.

la variación proporcional directa. Probablemente conocer estas formas de abordar los problemas nos ayude a aclarar si es conveniente incorporar el tema en la primaria. Tal vez algunos reafirmen sus puntos de vista, tal vez otros los modifiquen; ojalá muchos los pongan a discusión.

Sacamos mitad o duplicamos

Los que han estudiado el origen y la historia de los algoritmos aritméticos, dicen que sacar mitades sucesivas o duplicar, también sucesivamente, es una estrategia muy natural para resolver muchos problemas.

Nosotros les planteamos a los niños unos problemas en los que tenían que **elaborar recetas**; casi todos los resolvieron y explicaron de la manera en que lo hicieron Luis Manuel y Horacio:

• Lee con atención la siguiente receta y después contesta

Sopa de cebolla
(Receta para 8 personas)
- 8 cebollas
- 2 tazas de agua
- 4 cubos de caldo de pollo
- 2 cucharadas de mantequilla
- 1/2 taza de crema
- sal al gusto

1. Si se quiere hacer sopa de cebolla para 4 personas:
a) ¿cuánta agua se necesita? 1 tasa de agua
b) ¿cuántos cubos de caldo de pollo se necesitan? 2 cubos de caldo de pollo

• Escribe aquí cómo hiciste para resolver el problema 1 Porque si para 8 personas son 2 tasas de agua. Para 4 personas es 1 tasa. Porque la mitad de 8 son 4 entonses la mitad de 2 es 1 y asi para 8 personas son 4 cubos de pollo entonses para 4 personas son 2 cubos de pollo porque la mitad de 4 son 2.

También vimos a los niños construir soluciones como las de Cristina y Leticia en el problema del **pastel para 4 y para 12 personas:**

• Esta es la receta de un pastel para 8 personas:

Pastel de vainilla
(receta para 8 personas)
- harina 800 gramos
- mantequilla 400 gramos
- azúcar 1 taza
- 2 huevos
- 2 cucharadas de vainilla
- una pizca de sal

• Con base en la receta para 8 personas, completa la receta para 4 y para 12 personas:

Pastel de vainilla
Receta para 4 personas

harina 400 gramos
azúcar la mitad de una tasa
huevos 1 huevo
vainilla 1 cucharada
sal la mitad de la pizca

Pastel de vainilla
Receta para 12 personas

harina 1200 gramos
azúcar 1 1/2 taza
huevos 3 huevos
vainilla 3 cucharadas
sal 3 cuartos de pizca

Ellas nos dan estas explicaciones:

• Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 4 personas:
leimos lo de las 8 personas despues pensamos que era la mitad de las 8 personas por que eran cuatro personas osea que era la mitad.

> • Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 12 personas:
> le aumentamos cuatro personas 8+4=12 entonces lo de 8 personas lo sumamos con las otras 4 personas y eso fue lo que pusimos entonces eran las 12 personas.

Horacio y Luis Manuel, también calcularon correctamente las cantidades. Ellos dicen lo siguiente sobre la receta para 12:

> • Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 12 personas
> Le aumente la mitad de la receta para 8 personas y se la sumé otra ves a la de 8 personas le sume a 800 Grs. 400 gramos y así lo fui sacando la mitad y sumandosela.

Como se habrá observado, para construir sus respuestas, los niños sacan mitad a las cantidades iniciales y:

- en la receta para 4 personas, ese es el resultado.
- en la receta para 12, suma a cada una de las cantidades iniciales la mitad correspondiente.

La mayor parte de los niños hizo lo que Luis Manuel, Cristina y sus compañeros de equipo. Y la forma en que los niños explican sus respuestas es muy clara. En la receta para 4 nos dicen:

"Si para 8 personas son 2 tazas... para 4 personas es 1 taza, porque la mitad de 8 son 4... o ...leímos todo lo de las 8 personas, después pensamos que era la mitad ... porque eran 4 personas..."

Y en la receta para 12 nos explican:

"Le aumentamos la mitad de la receta para 8 personas... o le sumamos las cantidades para 4 (que es la mitad de 8)..."

El razonamiento está centrado en la obtención de mitades.

Cuando solicitamos elaborar la receta para 16 personas conociendo las cantidades para 8, los niños duplicaron las cantidades iniciales de ingredientes.

Como este razonamiento está basado en obtener mitades o duplicar, a esta estrategia la hemos llamado **mitades o duplicaciones sucesivas.**

Pero, ¿qué tienen de particular los problemas **de las recetas** que prácticamente todos los niños utilizan esta forma de resolución? Nosotros creemos que es por lo siguiente:

Los niños obtienen mitades o duplican cuando la razón entre los datos es 2:1, 3:2 o 3:4... y para ellos es fácil descubrirla. Y la mayoría llega a la solución correcta utilizándola.

Pero todas las cosas tienen un principio, así...

El aumento proporcional es inicialmente un simple aumento

La estrategia de **obtención de duplicaciones o mitades,** al igual que otros conocimientos aritméticos, no se construye de una sola vez, se construye poco a poco. Así, la estrategia tiene inicios más elementales que podemos ver en algunas respuestas de Susana y Violeta cuando calcularon la **receta para 12 personas:**

> Esta es la receta de un pastel para 8 personas:
>
> **Pastel de vanilla**
> Receta para 8 personas
>
> - harina 800 gramos
> - mantequilla 400 gramos
> - azúcar 1 taza
> - 2 huevos
> - 2 cucharadas de vainilla
> - una pizca de sal

• Con base en la receta para 8 personas, completa la receta para 4 y para 12 personas:

Pastel de vainilla
Receta para 4 personas

harina 400 gramos
azúcar ½ taza
huevos 1 huevo
vainilla 1 cucharada
sal ¼ de sal

Pastel de vainilla
Receta para 12 personas

harina 1200 gramos
azúcar 5 de azucar
huevos 6 huevos
vainilla 6 cucharadas
sal 5 piscas de sal

•Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 12 personas

Otros niños hicieron lo mismo que Violeta y Susana: sumaron una cantidad fija (4) a todos los ingredientes.

La idea en la cual estos niños basaron sus respuestas es que era necesario sumar 4 a cada uno de los ingredientes porque el primer cálculo que hicieron resultó a 4 ("8 personas más 4 personas son 12 personas"). De ahí que hayan pensado poner **6 huevos, 6 cucharadas de vainilla y 5 pizcas de sal** al pastel.

Podemos interpretar estas respuestas de la manera siguiente:

- en un nivel incipiente de conceptualización, lo único que los niños comprenden de la variación proporcional directa entre dos conjuntos de datos, es que si en los valores de un conjunto hay aumento, entonces hay aumento en los valores del otro conjunto. A la inversa también: si hay disminución en los valores de un conjunto, habrá una disminución en los valores del otro. En el caso de las recetas: si hay aumento en el número de personas, hay aumento en los ingredientes.
- estos niños no tienen aún la idea de que las cantidades deben aumentar o disminuir proporcionalmente (en una proporción definida por la razón entre los datos). Por eso los niños como Susana y Violeta, se conforman con sumar la misma cantidad a todos los ingredientes. Es por eso que decimos: **en sus inicios, el aumento proporcional es un simple aumento.**

Pero volvamos a las respuestas de Luis Manuel, Horacio y Cristina. En un problema de variación proporcional que se trata, como dicen con frecuencia los maestros, de **establecer la igualdad entre dos razones**, los niños han encontrado soluciones "sacando" mitades, y sumando o restando esas mitades; han mezclado lo aditivo con lo multiplicativo.

Y muchas veces, este procedimiento los lleva a soluciones correctas. Pero... y aquí vienen los peros...esta estrategia, al igual que otras que vimos en el capítulo anterior, es eficaz sólo en ciertas circunstancias, en otras, ya no funciona.

Por ejemplo, en los problemas de las recetas, esta estrategia no sería útil si se tratara de calcular los ingredientes para 7 o para 13 personas conociendo los ingredientes necesarios para 12. En este caso, ¿qué estrategia utilizarían los niños? ¿Harían una tabla como la de la lección **Unas cosas dependen de otras**, o buscarían la razón entre los datos? ...no sabemos con certeza, es cuestión de investigarlo.

Buscamos el valor de uno

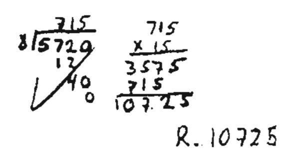
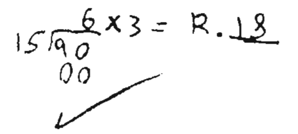
La **búsqueda del valor unitario** es un procedimiento que ya no se trabaja explícitamente en los textos de matemáticas vigentes; sin embargo, muchos maestros lo enseñan y utilizan. Como su nombre lo indica, consiste en buscar el valor de una unidad mediante una división y, posteriormente, calcular mediante una multiplicación el valor del número de unidades (objetos, metros, kilos) indicadas en el problema. En muchas situaciones este procedimiento es sumamente útil, por ejemplo cuando se trata de calcular precios.

Y los niños también creen en tal utilidad, pues este fue el procedimiento más utilizado por el que resolvieron correctamente los problemas siguientes:

Por 7 paquetes de galletas se pagaron 5720 pesos. ¿Cuánto se pagará por 15 paquetes de galletas?

15 suéteres se hicieron con 90 madejas de estambre. ¿Cuántas madejas se necesitarán para hacer otros 3 suéteres?

Así, los niños realizaron los siguientes cálculos:

Para el problema galletas:	Para el problema madejas:
	

NÉSTOR, PRIMERO DE SECUNDARIA

Según observamos en los problemas **galletas y madejas**, la **búsqueda del valor unitario** es una estrategia muy natural para resolver problemas de proporcionalidad directa.

Además, es una estrategia más potente que la de **duplicar o sacar mitades**, pues puede utilizarse para resolver un mayor número de situaciones.

Sin embargo, para los niños, dicho procedimiento tiene limitaciones que observamos en el siguiente problema:

En un juego de feria, por cada tres veces que se dé en el blanco, se ganan 5 puntos. Si yo gané 30 puntos, ¿cuántas veces le dí al blanco?

En seguida veremos el porqué de las limitaciones.

Limitaciones en la búsqueda del valor unitario

La mayor parte de los niños no logró comprender este problema, algunos nos dejaron un mensaje:

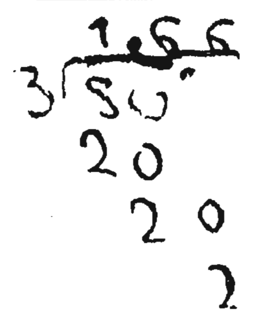
"El más difícil es el de los puntos" o *"al de los puntos no le entendí".*

Otros siguieron estrategias erróneas que aquí no vamos a analizar, no porque no tengan interés —los errores son tan importantes como los aciertos— sino porque ya se va haciendo largo este capítulo.

Algunos niños pensaron que, si obtener el **valor unitario** había funcionado en los dos problemas anteriores entonces el problema **puntos** se podía resolver con ese procedimiento, pues percibían en él una estructura parecida.

Con esta correcta idea en mente, algunos niños echaron a andar nuevamente el procedimiento. Por ejemplo Pedro, quien resolvió correctamente los problemas que hemos analizado; al llegar al problema **puntos** hizo lo siguiente:

•En un juego, por cada 3 veces que se dé en el blanco, se obtienen 5 puntos. Si obtuve 30 puntos, ¿cuántas veces le dí al blanco?



PEDRO, PRIMERO DE SECUNDARIA

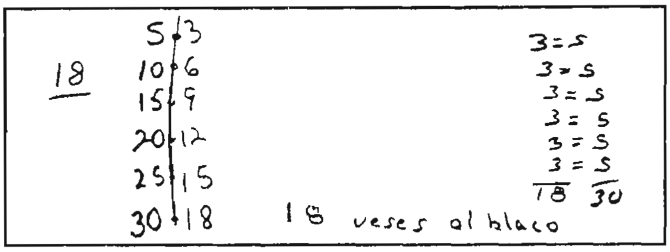
Sin embargo, en esta ocasión, Pedro se encontró con una dificultad: que el 3 no era divisor del 5 y perdió el sentido de la estrategia al obtener un residuo distinto de cero y abandonó la resolución.

Y es que, seguramente para los niños, el cociente inexacto tiene sentido si es dinero, o kilos, o metros lo que se está manejando, pero si el problema habla de puntos... ya no parece tan lógico. Esto le ocurrió a otros niños que habían resuelto los problemas **galletas** y **madejas** buscando el **valor unitario**. Al no funcionarles esta estrategia, y no contar con otra, no llegaron a la solución.

Las estrategias que permitieron a los niños arribar a la solución en este problema fueron dos: **la regla de tres** y la que analizamos a continuación.

Hacemos tablas para anotar los valores

Estas son las soluciones de dos niños que resolvieron correctamente el problema **puntos:**



CARLOS FRANCISCO, SEXTO GRADO • RAFAEL, SEXTO GRADO

Carlos Francisco y Rafael elaboraron tablas con dos columnas de números; una representa las veces que se da al blanco y la otra representa el número de puntos que se ganan.

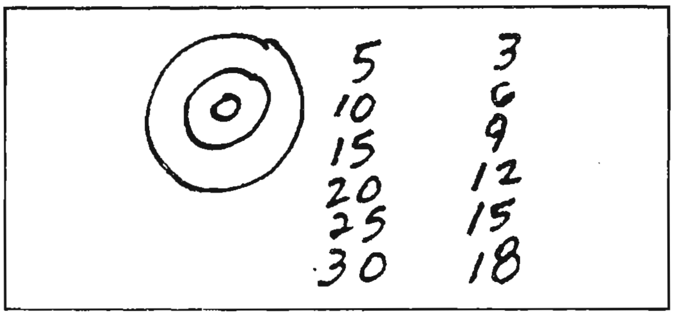
A continuación, Alejandro nos explica la estrategia:

ENTREVISTADORA: ¿Y este problema cómo lo hiciste, también con regla de tres?
ALEJANDRO: No, con rayitas
ENTREVISTADORA: ¿Cómo? Explícanos porque ya borraste las rayitas.
ALEJANDRO: (Hace el dibujo del tiro al blanco que aparece en la figura de la izquierda; luego, a la vez que va anotando las dos columnas de números dice:) Tres, son 5 puntos; 6 son 10 puntos y así... serían 2 tablas, ahorita voy en 9, sería hasta llegar al 18 (y termina la tabla).

La elaboración de tablas sirvió a los niños en problemas como el de los **puntos.**

¿Por qué este problema promueve la elaboración de tablas por parte de los pocos niños que lo resuelven y no usan la regla de tres? Nosotros creemos que es por las siguientes razones: por que el cálculo 3/5 no los mantiene en el ámbito de los números naturales; porque a pesar de utilizar 2 cifras decimales el cociente no es exacto, y porque no se trata de dinero, metros o kilos, donde tendría sentido para ellos un cociente con decimales.

Esta forma de interpretar y resolver los problemas de variación proporcional directa es la que aparece en los libros de texto vigentes en sexto grado, las lecciones que tratan este tema de manera explícita comienzan precisamente con tablas como la que vimos al inicio del capítulo.



ALEJANDRO, PRIMERO DE SECUNDARIA

Establecer las relaciones implicadas en las dos columnas que los niños elaboraron y que son similares a las que aparecen en el libro de texto, es una tarea bastante compleja. La realización espontánea de dicha tarea evidencia que los niños han comprendido las ideas básicas de la variación proporcional directa. Los niños que utilizaron esta estrategia, interpretaron acertadamente que resolver un problema de variación proporcional directa es encontrar los valores correspondientes a dos de las parejas establecidas, y que estos valores pueden encontrarlos si antes encuentran otros intermedios como se ve en la ilustración...

5 ------------------------------------

10 ------------------------------------
15 ------------------------------------
20 ------------------------------------
25 ------------------------------------

30 ------------------------------------

Quedan varias interrogantes ligadas a la elaboración de tablas como estrategia de resolución de problemas:

¿En qué otras situaciones estarán los niños interesados en utilizar esta estrategia, cúal ha de ser el contenido de los problemas para que la pongan en marcha?

¿Esta estrategia, les será útil cuando los problemas impliquen números grandes, y con cualquier **razón** entre los datos? ¿Todos los niños serán capaces de utilizar esta estrategia *espontáneamente*?

En los problemas que podían resolverse utilizando las tablas, únicamente unos cuantos las escogieron como medio de resolución.

Podríamos pensar, entonces, que es más fácil para los niños, y más espontáneo, resolver los problemas de variación proporcional que permiten utilizar la obtención de mitades o duplicaciones y la búsqueda del valor unitario. Los problemas que por sus características llevan a los niños a elaborar tablas que parecen ser más difíciles, de ahí que unos cuantos hayan resuelto el problema **puntos**.

Utilizamos la regla de tres

Una de las maneras que se enseñan para resolver problemas de variación proporcional directa es la **regla de tres.** Sin embargo, ningún niño de primaria y casi ninguno de secundaria utilizó dicho procedimiento para resolver los problemas mencionados. Por ejemplo, sólo unos cuantos niños realizaron cálculos como los que efectúo Santiago:

<table>
<tr>
<td>Para el problema
galletas:
8 — 5720
15 — x
5720
×15
28600
5720
85800
10725
8)85800
058
20
45</td>
<td>Para el problema
suéteres:
15 — 90
3 — x
90
×3
270
18
15)270
120</td>
</tr>
</table>

SANTIAGO, PRIMERO DE SECUNDARIA

Si hacemos un recuento del uso de la regla de tres en los diferentes problemas, tenemos lo siguiente: ningún niño la utilizó para resolver los problemas de **las recetas** (que no planteamos a los de secundaria) y en el problema de los **puntos** lo hicieron unos cuantos de primero de secundaria.

Nos sorprende el "desinterés" de los niños por la regla de tres. Nos sorprende también la diversidad de estrategias de resolución que ellos han construido. Ante 4 problemas utilizan 4 estrategias de resolución diferentes:

- **la duplicación u obtención de mitades**
- **la búsqueda del valor unitario**
- **la elaboración de tablas**
- **la regla de tres**

Esta diversidad, a nuestro entender, se debe a que el concepto de **variación proporcional directa** es muy complejo. Tal diversidad indica también, que los niños no *ven* problemas similares en todas las situaciones donde este concepto está implicado. Así, de acuerdo con el contenido del problema y la razón entre los datos, los niños conceptualizan de manera distinta cada situación, sin encontrar muchas veces parentesco entre ellas. Podemos decir esto con otras palabras: los niños interpretan los problemas como los que aquí hemos visto de distintas formas:

- **como problemas de duplicar o sacar mitades**
- **como problemas de buscar el valor unitario**
- **como problemas de hacer tablas**
- **como problemas de regla de tres**

Si pidiésemos a los niños agrupar los problemas que son *iguales*, los que se resuelven con las mismas operaciones, lo más probable es que no *pusieran en un mismo costal* los que aquí hemos analizado y que abrieran una *bolsa* para cada uno. Por supuesto, siempre hay excepciones, aquí la excepción serían los niños que utilizaron la regla de tres para resolver todos los problemas.

Para terminar, insistiremos en tres cosas:

- ante los problemas de variación proporcional directa, hay una escasa utilización de la regla de tres. Aún los niños de secundaria, y algunos de sexto grado que ya la habían estudiado formalmente, prefirieron utilizar otras estrategias.
- muchos niños que no han aprendido en la escuela problemas de variación proporcional directa, son capaces de resolver muchos de ellos con estrategias alternativas.
- paradójicamente, sólo los niños que pudieron referirse a los problemas como *problemas de regla de tres* fueron los que solucionaron correctamente todos los que les planteamos.

A lo mejor el lector piense: ¿Y entonces para qué enseñar la variación proporcional en la escuela, de qué sirven las horas y el esfuerzo que se dedican a este tema, si los niños no utilizan los procedimientos que ahí aprenden?

En otro capítulo nos ocuparemos de dar respuesta a esta pregunta. Por el momento nos conformamos con decir que esto no sólo sucede en México, sino que algo parecido se ha observado en otros países. Por ejemplo, distintas investigaciones realizadas en Inglaterra dicen que los niños utilizan muy poco los procedimientos escolares para resolver los problemas de variación proporcional.

Ardua tarea entonces la que queda al maestro: llevar a los niños a descubrir que, bajo apariencias distintas, existen problemas de estructura similar y que para estos problemas —independientemente de las estrategias que en cada caso particular puedan utilizarse para resolverlos— existe un algoritmo convencional y general que puede servir para llegar a la solución.

Más difícil se plantea el asunto si asumimos que los algoritmos y modelos formales de resolución sólo tienen sentido en la enseñanza si tienen significado para los alumnos.

FRACCIONES

LECTURA: LAS FRACCIONES EN SITUACIONES DE REPARTO Y MEDICIÓN*

LAS FRACCIONES EN SITUACIONES DE REPARTO Y MEDICIÓN

Tercer grado: consideraciones generales

En la primera parte de esta sección, el docente encontrará una breve introducción en la que se hace referencia al uso de las fracciones en diversos ámbitos de la vida cotidiana. Además, desde un punto de vista matemático, didáctico y psicológico, se comentan algunas de las dificultades de la enseñanza y del aprendizaje del concepto en cuestión. Este marco de referencia sirve para justificar la introducción del estudio de las fracciones en situaciones de reparto y medición, a partir del tercer grado de la escuela primaria.

Sin embargo, vale la pena esclarecer que en los grados anteriores, a través del estudio de la medición (en esta fase de transición), se incluyen aspectos premensurables relacionados con los primeros conocimientos de este concepto y que constituyen antecedentes importantes de una construcción posterior.

A continuación aparece una discusión sobre la necesidad de utilizar familias de problemas de reparto y medición para introducir el concepto de fracción, en contraste con la enseñanza tradicional que toma como punto de partida solamente el fraccionamiento de la unidad. Asimismo, se mencionan los objetivos generales que se persiguen con esta forma de iniciar el estudio de este tema.

El maestro encontrará también ejemplos de actividades secuenciadas que sirven como un modelo didáctico para diseñar y llevar a cabo experiencias que favorezcan la construcción de los conocimientos vinculados con el concepto de fracción. Paralelamente, se plantean algunas recomendaciones metodológicas generales para el desarrollo de las situaciones de reparto y medición.

Introducción

Presencia de las fracciones en diversos ámbitos

Las fracciones son una herramienta que permite resolver diversas situaciones en el ámbito científico, técnico, artístico y en la vida cotidiana. Por ejemplo, los científicos utilizan las fracciones como herramienta de la matemática formal para realizar cálculos precisos en sus investigaciones; los músicos, al componer melodías y leer las partituras hacen uso de medidas fraccionarias de la unidad de tiempo; un técnico en control de calidad utiliza las fracciones para controlar la precisión de las herramientas que produce la fábrica en la que trabaja; los albañiles necesitan muchas veces echar mano de las medidas fraccionarias para calcular exactamente, por ejemplo, la medida de la superficie que cubrirán con mosaico y el costo de la mano de obra; el ama de casa utiliza en la realización de sus actividades medidas fraccionarias como medio litro de leche, un cuarto de kilo de mantequilla, "medio cuarto" de azúcar, un cuarto de metro de tela, tres cuartos de metro de listón, o cosas similares.

Sin embargo, a pesar de que las fracciones están relacionadas con diversas situaciones se utilizan menos en la vida cotidiana que los números enteros y, además de un uso poco frecuente, la variedad de fracciones a las que se suele recurrir es reducida: medios, cuartos, tres cuartos, octavos y dieciseisavos. Por ello el uso que se da a las fracciones en las situaciones de la vida cotidiana es insuficiente para propiciar avances significativos en el dominio de esta noción.

Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones

Puede decirse que para este contenido, la escuela cuenta menos con la "enseñanza" de la vida

*Martha Dávila, Olimpia Figueroa y Gonzalo López Rueda. "Las fracciones en situaciones de reparto y medición", en: *Guía para el maestro.* Tercer grado. SEP, México, 1992. pp. 13-21.

extraescolar. Quizás éste sea uno de los motivos que explican que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones presente tantas dificultades en todos los niveles educativos.

Otras causas importantes por las cuales a los alumnos se les dificulta comprender la noción de fracción, manejarla y aplicarla en las situaciones escolares que se les plantean son: a) La pobreza de los significados de la fracción que se manejan en la escuela, b) la tendencia de los niños de atribuir a los números fraccionarios las propiedades y reglas aplicables a los números enteros y c) la introducción prematura de la noción de fracción, del lenguaje simbólico y sus algoritmos.

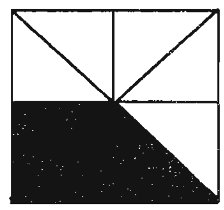
a*) Pobreza de los significados de la fracción que se manejan en la escuela.* Dependiendo de las situaciones en las que se usan las fracciones, éstas adquieren distintos significados.

Por ejemplo:

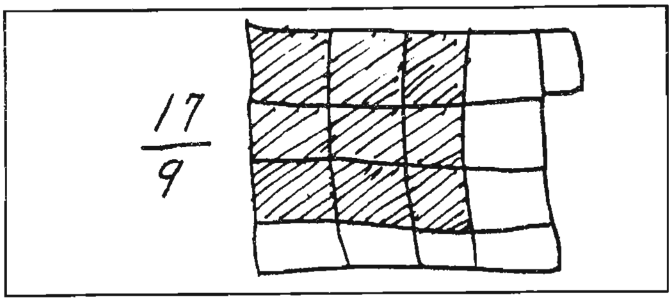
- En la expresión: "Compré 3/4 de kilo de frijol", la fracción indica el resultado de un proceso de medición —pesar una cantidad de frijol— así como una partición de la unidad de medida correspondiente, el kilogramo.
- En la expresión: "1/5 de los mexicanos se ha enfermado de tifoidea", la fracción se usa para destacar la relación de un todo —el total de la población de nuestro país— con una de sus partes —todos aquellos que han contraído la enfermedad.
- En la expresión: "La escala de este mapa es 1/10,000", la fracción indica una razón en la que se están comparando dos magnitudes: la longitud de una recta en el mapa y la distancia que esta representa; por ejemplo, una recta de un centímetro de largo representa 10,000 metros o bien 10 kilómetros.
- En la expresión: "Para calcular el impuesto que usted va a pagar multiplique su ingreso por 0.15", la fracción aparece como un decimal, y en este caso, se usa como operador multiplicativo. Además, indica una proporción, 15/100, es decir, por cada cien pesos de ingreso, 15 de ellos corresponden al impuesto.

Por lo general, estos significados se trabajan muy poco en la escuela y aparecen desvinculados unos de otros. La noción de fracción se suele introducir a través del fraccionamiento de una unidad y se centran los esfuerzos en que los alumnos "aprendan" a representar la simbología con la que se expresan las fracciones (1/2, 1/4...), identifiquen y manejen la denominación de sus partes (medios, cuartos, etc.), y mecanicen los algoritmos de su operatoria (suma, resta, multiplicación y división). De esta manera, muchas veces se limita involuntariamente la capacidad del alumno y se propicia una concepción de la fracción reducida y con escaso significado.

El manejo de una variedad limitada de situaciones provoca numerosos errores conceptuales. Por ejemplo, se ha comprobado que la mayoría de los alumnos ven al par a/b como dos números aislados sin ninguna relación entre sí y que tienen mucha dificultad para concebir a a/b como un sólo número que permite cuantificar las partes de la unidad (ver Figueras, 1988).



Se ha visto también que muchos alumnos de secundaria manifiestan que es imposible representar de manera gráfica una fracción en la que el numerador es mayor que el denominador, como 17/9. Consideran que eso "No se puede contestar, porque el 17 no cabe en el 9" o porque "el numerador es menor que el denominador" o "...porque es muy chica la cantidad del denominador". Otros alumnos resuelven el problema haciendo lo siguiente (ver Ávila y Mancera, 1989).



A través de los argumentos de algunos de los niños y de las representaciones gráficas de la fracción 17/9 que otros realizaron, puede notarse una idea errónea producida por la tendencia a enseñar las fracciones siempre partiendo una sola unidad. La dificultad que presentan en este caso es comprender que el todo repartido puede estar conformado por más de una unidad, por lo que para representar gráficamente la fracción 17/9 la invierten a 9/17, es decir, un entero que se divide en 17 partes de las cuales se toman 9.

b) Tendencia de los niños a atribuir a los números fraccionarios las propiedades y reglas de los números enteros. Una tendencia natural en los niños es aplicar a las fracciones los conocimientos adquiridos para el manejo de los números enteros. Un ejemplo claro, en el que se puede ver esta aplicación, es cuando los niños esperan que los resultados de las operaciones con fracciones se comporten de la misma manera que con los números enteros. Por ejemplo, al multiplicar dos números enteros como 8 x 9, el producto (72), siempre es mayor que los factores; esto en cambio no sucede en todos los casos con las fracciones. El producto en la multiplicación de fracciones es a veces menor que los factores, por ejemplo:

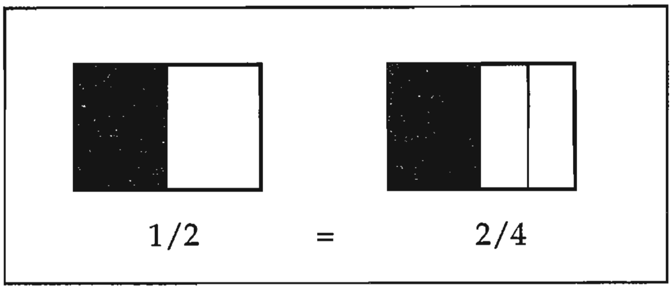
$$3/4 \times 1/2 = 3/8$$

De manera análoga, cuando se pide a los alumnos que comparen fracciones, por ejemplo, 3/8 y 3/5, ellos tienden a pensar que 3/8 es mayor porque se centran en los denominadores. El trabajo enfocado en la manipulación exclusivamente numérica y el consecuente empobrecimiento de los significados de las fracciones refuerzan esta tendencia de los niños.

c) Introducción prematura de la noción de fracción y del lenguaje simbólico. Estudios realizados sobre las fracciones desde el punto de vista matemático (ver Kieren, 1983), didáctico (ver Brousseau, 1976) y psicológico (ver Piaget, Inhelder y Szmeninska, 1966) muestran que los alumnos de los dos primeros grados de la primaria no están aún en condiciones de iniciar exitosamente el aprendizaje de esta noción, debido a su complejidad y al hecho de que el desarrollo cognitivo de la mayoría de los niños en esta edad no es aún suficiente.

Por ejemplo, la conservación del área es una de las condiciones necesarias para que los alumnos comprendan la equivalencia de las fracciones, noción fundamental para avanzar en los aspectos de la fracción (ver Dávila, 1991).

Es común esperar que los niños de primer año sean capaces de comparar la equivalencia entre 1/2 y 2/4 después de haber coloreado figuras en las que tal equivalencia "se hace evidente":

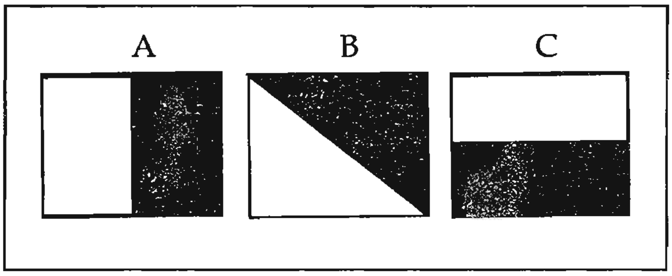


Aparentemente, darse cuenta de esta equivalencia es fácil. Sin embargo, los niños no piensan lo mismo. Veamos un ejemplo que muestra la forma de pensar de los niños sobre la equivalencia entre 1/2 y 2/4 utilizando material concreto, es decir, sin hacer uso de la representación simbólica de las fracciones, basándose simplemente en la comparación de pedazos de "pastel" (hojas de papel tamaño carta) obtenidos al repartir un pastel entre dos niños.

Cuando alumnos de primero y segundo grados comparan lo que le tocó a un niño que tiene dos pedazos (2/4) con lo que le correspondió a otro que tiene un pedazo (1/2), la gran mayoría de los alumnos opina que al niño que le tocaron dos pedazos de pastel tiene más cantidad que al que le tocó un pedazo, *porque dos pedazos es más que un pedazo, porque el dos es más grande que el uno.* Entonces, dos pedazos es más que un pedazo. Otros alumnos opinan que *si cortan el pedazo grande a la mitad entonces ya tienen lo mismo, pero que si no lo cortan tiene más el que tiene dos pedazos.*

Como puede verse a través de las explicaciones manifestadas por los niños, ellos no ven tal equivalencia. Para ellos hay más cantidad de pastel en donde hay más pedazos. No ser *conservadores* de área es un primer obstáculo que no les permite darse cuenta de dicha equivalencia.

Un ejemplo más complejo en el que también se manifiesta que los niños en esta etapa aún no son *conservadores* de área, se da cuando se comparan dos mitades generadas de unidades iguales pero cortadas de diferente manera.



La mayoría de los alumnos de primero y de segundo piensan que la mitad A "tiene más pastel porque está más gordita" y que la mitad B "tiene menos pastel porque está más flaquita".

Así, para los niños hay más cantidad de pastel en donde hay más pedazos y con lo cual niegan la equivalencia si las formas de los pedazos son diferentes.

También se ha puesto de manifiesto que para lograr hacer particiones por mitades los niños recorren un largo proceso en el que se desarrollan operaciones mentales complejas. En este proceso (como se verá más adelante), están en juego tanto el proceso mental de maduración como las experiencias de particiones a las que se enfrentan los niños.

El conocer ahora con mayor profundidad el proceso por el que pasan los niños para lograr hacer particiones y para reconocer fracciones equivalentes usando material concreto, nos indica lo prematuro e infructuoso que resultara introducir la noción de fracción y su representación simbólica en los primeros grados de la primaria.

Dada la complejidad del tema y los obstáculos a los que se enfrentan los alumnos en esta etapa, se considera pertinente iniciar el trabajo con la noción de fracción a partir del tercer grado, en donde el énfasis de las actividades se centrará en problemas que impliquen en fraccionamiento de superficies y de unidades de longitud. Es recomendable introducir la representación simbólica de las fracciones hasta el cuarto grado, dedicando el tiempo disponible en tercero para trabajar sobre aspectos previos a la simbolización y fundamentación de la noción de fracción.

Ejemplos de actividades para la enseñanza de las fracciones en tercer grado

Las actividades fundamentales que se sugieren para introducir la noción de fracciones son situaciones de reparto y situaciones de medición. Ambas familias de problemas son fuentes generadoras de situaciones problemáticas que por un lado involucran y dan sentido a esta noción, y por el otro son accesibles para los niños de tercero.

En el reparto, la necesidad de fraccionar se produce por la condición de repartirlo todo, sin que sobre nada; y en la medición se produce cuando la unidad con la que se va a medir no "cabe" un número exacto de veces en lo que se va a medir. Es la necesidad de cuantificar de manera más precisa lo que da lugar al fraccionamiento de la unidad. Aunque las situaciones de reparto y medición se presentan a continuación por separado, se recomienda que se trabajen simultáneamente.

Objetivos generales

Los objetivos que se persiguen al realizar las actividades que más adelante se sugieren, son que el alumno:

- Aprenda a hacer particiones equitativas y exhaustivas al resolver problemas de reparto y medición.
- Utilice la partición como herramienta en la resolución de problemas de reparto y medición.
- Compare fracciones sencillas, en el contexto del reparto y la medición, para afirmar la comprensión de las mismas.
- Exprese de manera verbal el resultado de los repartos y de las medidas obtenidas, para cuantificar el tamaño de las fracciones de la unidad.
- Descubra que los números enteros son insuficientes para decir ¿cuánto es el resultado exacto de los repartos o mediciones?

Situaciones de reparto

El reparto es una actividad a la que todos accedemos desde temprana edad. Los niños desde muy pequeños se reparten juguetes, dulces, galletas, refrescos u objetos semejantes, de manera natural y espontánea. El reparto además de ser una actividad significativa para ellos, es un medio a través del cual empiezan a emplear ciertos términos fraccionarios para cuantificar las partes que le tocaron a cada uno: "Te tocó la mitad del chocolate".

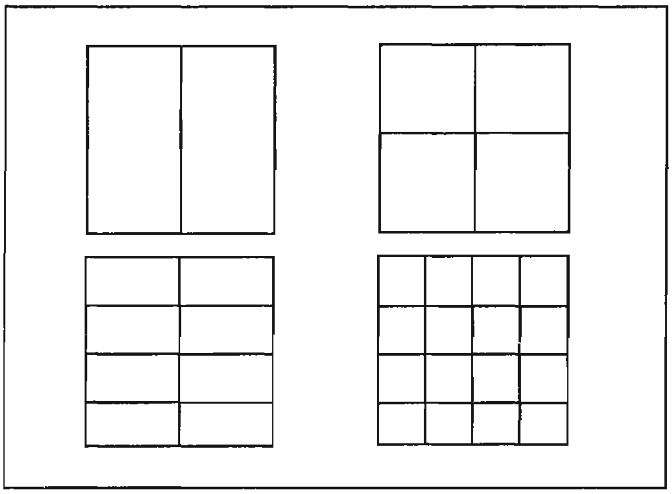
A través de los problemas de reparto se establecen las bases para abordar algunos aspectos importantes de la noción de fracción. Uno de ellos es el desarrollo de las operaciones mentales que permiten coordinar la equitatividad y exhaustividad en los repartos. Sin embargo, las particiones iniciales que realizan los niños no reúnen estas propiedades.

El proceso que los niños siguen hasta llegar a realizar repartos equitativos y exhaustivos es largo. Entre los 4 y 5 años los niños tienen mucha dificultad para partir en mitades. Al principio no conciben que los objetos enteros se puedan dividir, después logran repartir el todo cortando poco a poco pedacitos pequeños que reparten y continúan cortando indefinidamente. Más adelante, dividen el entero en dos pedazos que reparten y se olvidan del sobrante.

Un paso importante en este proceso es cuando el niño ya tiene la intención de agotar el todo para repartirlo (exhaustividad). Sin embargo, al principio considera necesario que para poder obtener dos pedazos necesita hacer dos cortes. Para su sorpresa, al realizar los dos cortes obtiene tres partes en vez de dos. Reparte a cada niño un pedazo y deja el residuo sin tomar en cuenta la posibilidad de repartirlo.

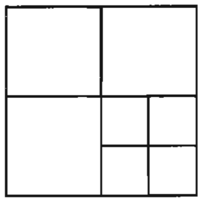
Es aproximadamente hasta los 5 ó 6 años cuando logran repartir el todo en mitades iguales sin que les sobre nada, cumpliendo con las propiedades de equitatividad y exhaustividad. Una vez que logran repartir entre 2, pueden hacer repartos exitosos entre 4 o entre 8 y otras potencias de 2, es decir, entre números que se obtienen al volver a cortar siempre en dos los pedazos que se obtienen.

Por ejemplo:



El hecho de que los niños hayan aprendido a repartir en mitades, no implica que puedan repartir en 3, en 5 o en 7 partes. Un proceso similar al que presentan los niños en la partición por mitades, se repite cuando intentan partir en números que no son potencias de 2.

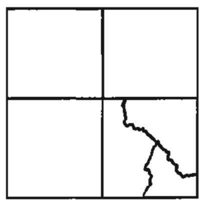
Cuando se enfrentan a los repartos entre tres, los niños utilizan, al principio y durante un buen tiempo, la estrategia de partir por mitades para realizar dichos repartos. Esta estrategia los enfrenta al problema del pedazo sobrante.



Reparto de 1 pastel entre tres niños

Para resolver este problema a veces deciden volver a cortar por mitades varias veces; otras determinan que el pedazo sobrante ya no se puede repartir; o bien, piensan que este pedazo, por lo pequeño que es, no es importante que se continúe repartiendo.

Cualquiera de estas acciones los lleva a perder una de las dos propiedades del reparto. Si deciden que el pedazo sobrante ya no se puede o debe repartir pierden la exhaustividad, pero si consideran que ese pedazo puede dársele a uno de sus compañeros o repartirse en el número de pedazos necesarios sin importar que estos no sean iguales, pierden la equitatividad del reparto.



Reparto de 1 pastel entre tres niños
Pérdida de la equitividad

Aproximadamente a los 8 años los niños ya están en condiciones de enfrentar problemas de reparto como los anteriores, con buenas posibilidades de lograr, hacia fines del año escolar, particiones equitativas y exhaustivas.

Dado que las actividades de reparto favorecen el aprendizaje de la noción de fracción, a continuación se presenta una secuencia de actividades de reparto en las que se toma en cuenta el proceso de desarrollo de los niños.

Secuencia de los problemas de reparto

Para realizar la secuencia de actividades, se organiza al grupo en equipos. El número de integrantes de cada equipo debe estar formado por el número de niños entre los que se vaya a hacer el reparto. Es decir, si se va a repartir entre 3, el equipo debe estar integrado por tres niños.

Los "pasteles" que se repartan serán representados por hojas de papel del mismo tamaño para todos los equipos. Es importante que los niños hagan repartos desde el principio con más de un pastel.

En el punto 3, se dan algunas recomendaciones metodológicas importantes para llevar a cabo las situaciones que se proponen a continuación, y en el punto 4 se muestran algunos ejemplos de situaciones didácticas desarrolladas.

Situaciones de medición

Los procesos de medición de longitudes, superficie, volumen, capacidad, peso o tiempo con frecuencia, dan lugar al fraccionamiento de la unidad con la que se mide, para obtener mediciones más precisas.

En tercer grado se recomienda trabajar con mediciones de longitudes (la medición de superficies está implícita en el reparto de hojas de papel). Al igual que en el reparto, en la medición los niños siguen un proceso en el que inicialmente aprenden a fraccionar la unidad de medida en medios, cuartos y octavos, y posteriormente llegan a fraccionarla en 3, 5, 7 partes.

En este tipo de situaciones los alumnos se enfrentan a la necesidad de medir longitudes en las que no siempre las unidades de medida empleadas caben un número exacto de veces, por lo que se requiere utilizar unidades de medida más pequeñas que quepan un cierto número de veces en la unidad grande.

Al principio, para resolver el problema de la precisión, los niños tienden a incorporar unidades de medida extras, más pequeñas. Por ejemplo: "El lápiz mide dos tiras y tres dedos gordos" (ver Balbuena, 1988).

A partir de la necesidad de usar unidades de medida con las que todos estén de acuerdo, los alumnos empiezan a emplear fracciones de la unidad para medir con más precisión. "Arturo mide veinte tiras y un cuarto de otra tira".

Midiendo longitudes, trazando líneas u objetos a partir de medidas dadas, comunicándolas verbalmente o por escrito, los alumnos logran hacer fraccionamientos cada vez más precisos, al mismo tiempo que la noción de fracción se convierte por ello en una herramienta útil y con significado.

A continuación se presenta una secuencia de actividades de medición que propician el fraccionamiento de la unidad de medida, para cuantificar diversas longitudes.

Secuencia de actividades de medición

Al igual que en las actividades de reparto, es recomendable que el grupo se organice en equipos; en este caso el número de niños no afecta a la resolución del problema.

En cuanto al material, se utilizarán como unidad de medida tiras de cartoncillo de diversas longitudes. Con el objeto de que los niños tengan la necesidad de fraccionar la unidad de medida para hacer sus mediciones, es importante que no se permita el uso de instrumentos de medición como la regla graduada o cintas métricas.

Recomendaciones metodológicas para trabajar con las situaciones de reparto y medición

Situaciones problemáticas

Es común escuchar que los problemas a los que se debe recurrir en la enseñanza deben ser problemas de la vida real, con los que se dice, se logra captar el interés de los niños. Sin embargo, no sólo los problemas de la vida real suelen interesarlos, también las situaciones alejadas de la realidad pueden ser interesantes para ellos.

La condición que deben tener las situaciones para lograr centrar el interés del niño, es que signifique un reto para él y que este reto lo pueda enfrentar de alguna manera aunque ésta no sea la forma convencional; es decir, con "la operación" con que se suelen resolver los problemas en la escuela.

Cuando un alumno logra resolver un problema sin dificultad alguna, éste ya no es problema para él; entonces es necesario modificarlo, agregar alguna variable, obstaculizar el uso de la estrategia que ya domina, con el efecto de que el alumno se vea en la necesidad de buscar otra forma de resolverlo. En la medida que el niño busque nuevas formas de resolución, cada vez que logra dominar una, avanzará en su conocimiento y desarrollará su capacidad de razonamiento.

Por ejemplo, para las situaciones de reparto de superficies, un primer problema puede ser que los niños realicen repartos de uno o más pasteles (representados por hojas de papel del mismo tamaño para todos los niños) entre 2, 4, u 8 niños. Es probable que usted piense que este problema no es lo suficientemente interesante como para que los niños se involucren en él, sin embargo, lo interesante vendrá después, cuando usted favorezca las discusiones entre los niños en las que podrá notar, poco a poco, cómo defienden sus opiniones e intentan convencer a sus compañeros de lo que dicen buscando argumentos cada vez más contundentes.

> El reto para los alumnos, será en un primer momento, realizar repartos equitativos y exhaustivos y en un segundo momento, consistirá en explicar sus hipótesis y defenderlas hasta lograr convencer a sus compañeros de lo que ellos piensan.

Consigna inicial

La consigna inicial es en sí el problema que se plantea; éste debe ser claro y preciso, es decir, que los niños comprendan exactamente cuál es el problema, para que estén en posibilidad de abordarlo. Es conveniente cerciorarse de que todo el grupo ha comprendido lo que va a hacer, sin que esto quiera decir que usted deba indicarle cómo hacerlo. Puede pedir a algunos alumnos que expliquen en qué consiste el problema, sin permitir que ellos mismos digan a los demás como resolverlo.

Por ejemplo, al principio puede suceder que usted note que cuando da una consigna a los niños como "repartir 3 pasteles entre 4 niños", si los equipos no están formados por exactamente cuatro niños, los alumnos no atienden a la consigna y se reparten los pasteles entre ellos. Será necesario formar equipos de acuerdo con el número de niños entre los que se va a hacer el reparto.

Trabajo en equipo

Una vez que los alumnos han comprendido en qué consiste el problema, se les proporciona el material para que lo resuelvan. Aun cuando se trata de hojas de papel, los niños no tienen problema en aceptarlo y realizar la actividad cuando todos tienen el material, se les da un tiempo para que realicen el reparto.

> ¿Qué hace el maestro mientras tanto? Mientras los niños trabajan, se sugiere observar cómo hacen los repartos los diferentes equipos, escuchar sus comentarios e intentar hacer preguntas que le ayuden a entender lo que hacen. Si algún reparto no cumple con una de sus propiedades (equitatividad y exhaustividad), no trate de demostrarles que están mal. Deje que sus propios compañeros se lo demuestren más adelante.

Saber cómo repartieron sus alumnos le ahorrará tiempo en la revisión colectiva de los repartos, ya que tendrá presente los equipos que repartieron de la misma forma y quienes hicieron repartos diferentes.

Uso del material

Los materiales que se sugieren para llevar a cabo las actividades de reparto y medición, en general son tiras de cartoncillo o papel, fáciles de conseguir y diseñar. Sin embargo, es posible que en el lugar en donde usted trabaja no sea fácil obtenerlos. Puede usted sustituir los materiales que se proponen por otros que más o menos tengan las mismas propiedades o que se puedan utilizar de la misma forma como cartón o papel de desecho.

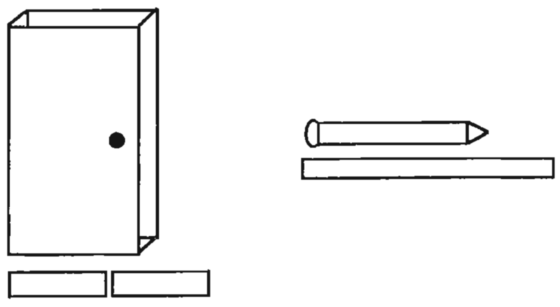
Es conveniente que usted tenga tiras suficientes para sustituir las que los alumnos echen a perder en los intentos que realicen al fraccionarlas.

En algunas situaciones, el material se usa para verificar las anticipaciones de una medida. Por ejemplo, cuando se comparan dos tiras obtenidas de unidades iguales como 3/4 y 5/20, los alumnos pueden pensar que la tira formada con 1/4 + 1/4 + 1/4 es menor que la tira formada con 1/20 + 1/20 + 1/20 + 1/20 + 1/20. El material les será útil para comprobar su hipótesis. Al fraccionar cada tira en cuartos y veinteavos y construir la tira que mide 3/4 y la tira que mide 5/20 se darán cuenta de su error. Probablemente note que algunos alumnos necesitan recurrir a la manipulación del material constantemente y que otros sin utilizarlo mayormente logren resolver el problema. En otros casos algunos alumnos necesitarán el material sólo para poder explicar cómo lo resolvieron o para fundamentar sus hipótesis. Permita que los alumnos se apoyen en el material en la medida en que lo necesiten.

> En el caso de las actividades de medida que se sugieren, *no es conveniente usar instrumentos de medición* como la regla graduada, metro, escuadras, cinta métrica, u otros, porque su uso puede obstaculizar el propósito de propiciar con estas actividades el fraccionamiento de las unidades de medida.

Por esta razón los materiales que se proponen en estas situaciones son tiras de cartoncillo (o de cualquier otro material susceptible de fraccionar), cuya longitud la determina el maestro dependiendo de lo que se va a medir.

Lo importante es que escoja los tamaños de la unidad de medida y de las longitudes que se van a medir, de tal forma que los alumnos se vean en la necesidad de fraccionar la unidad de medida, para medir con precisión. Tal unidad puede ser algunas veces más grande y otras más chica que lo que se va a medir.



Las tiras son las unidades de medida

Estrategias de resoluciones

Si se plantea a los alumnos averiguar la cantidad de chocolate que le toca a cada niño, cuando se reparten tres chocolates entre 2, no se debe esperar que los niños, para resolverlo, hagan una división o den una sola respuesta; por ejemplo, que a cada niño le tocó un entero un medio.

Probablemente, si se les da libertad para resolver el problema con sus propios recursos, los alumnos recurrirán a dibujos para encontrar la respuesta o tendrán necesidad de buscar tiras de papel que representen los chocolates para averiguarlo.

En las respuestas que los alumnos dan no incorporan en general el lenguaje convencional: dicen por ejemplo, "nos tocó un chocolate y un pedazo" o "tres pedazos" o "seis pedazos" o "un chocolate y dos pedazos" o "doce pedazos".... Todas estas respuestas pueden ser correctas, si el reparto que hicieron cumple con las condiciones de equitatividad y exhaustividad.

Cuando los alumnos han dado su respuesta, el problema ahora es del docente, ¿cómo lograr que los niños se den cuenta de que todas sus respuestas, aunque sean distintas son buenas? ¿Cómo propiciar que ellos mismos identifiquen y comenten los errores en caso de haberlos?

La ardua tarea de revisar el trabajo de cada niño, indicando si se equivocó o si lo hizo bien, con una "paloma" o un "tache", o en su defecto regresándolos a su lugar para que lo corrijan, muchas veces resulta poco productiva.

Al organizar sesiones de revisión colectiva, se puede lograr que los alumnos sigan aprendiendo y desarrollen otras capacidades importantes como reflexionar en el proceso de solución realizado por ellos y por sus compañeros, encontrar los errores, las razones del error, expresar sus ideas defendiendo sus resultados o justificándolos.

Poco a poco los niños irán manejando los nombres de las fracciones de manera verbal utilizando diversas formas para expresar sus resultados.

Por ejemplo, cuando los pedazos son de diferente tamaño pueden decir: "Me tocó un medio más un cuarto más un octavo", o si partieron todas las unidades en octavos probablemente contesten: "Me tocaron siete octavos", o pueden referirse a ellas de una en una, como: "Me tocó un octavo, más un octavo, más un octavo, más un octavo, más un octavo, más un octavo, más un octavo.

Todas estas respuestas son correctas, pero lo más importante es que el significado que le dan a las fracciones es el de medida en los casos de situaciones de medición y el de cantidad en las situaciones de reparto.

Revisión colectiva

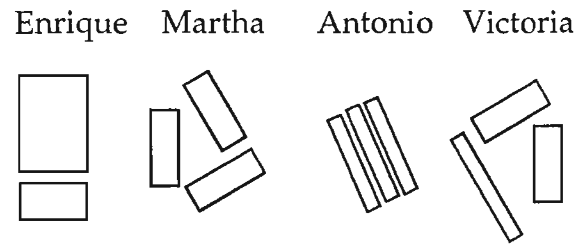
Para realizar la actividad de revisión del trabajo, se propone que el maestro organice una *confrontación colectiva*. Para lograr que ésta sea más provechosa, el maestro procura que los equipos que pasan a mostrar sus resultados tengan repartos distintos, y de preferencia que haya algunos con errores representativos.

Una vez que un equipo ha demostrado cómo repartió, el maestro preguntará al grupo si considera que lo que este equipo hizo es correcto.

Intentar que los niños expliquen por qué piensan que una respuesta o un procedimiento está bien o mal, propicia que los alumnos reflexionen en sus respuestas y hagan explícito lo que están pensando. En la medida en que se les permita expresarse, dejaran ver cómo conciben un buen reparto. De esta manera el maestro podrá conocer con mayor profundidad el proceso de sus alumnos, sus ideas, sus avances y las dificultades a las que se enfrentan.

En estas actividades, es muy probable que se obtengan en el grupo varias formas de reparto y que todas cumplan con las propiedades de equitatividad y exhaustividad. Sin embargo, es posible que los niños no logren explicar claramente por qué las formas y los tamaños de los pedazos son diferentes. Reflexionar sobre ello es muy importante, ya que de esta manera se puede iniciar el trabajo sobre la equivalencia de las fracciones.

Al preguntar a los alumnos si a los niños de un equipo les tocó lo mismo que a los de otro equipo, es probable que algunos piensen que no y que otros estén totalmente convencidos de que, aunque las formas y el número de los pedazos son diferentes, la cantidad es la misma.



Reparto de tres pasteles entre cuatro niños. A cada uno le tocó 3/4 de pastel pero de diferente forma.

Frente a esta probable diversidad de opiniones, se propone que sean los propios alumnos los que intenten convencer a sus compañeros de su postura y que no sea el maestro quien diga la última palabra. Para ello se les puede proporcionar el material necesario para que ellos mismos busquen la manera de demostrar la equivalencia o no equivalencia de las partes del pastel.

Es conveniente que el lenguaje que se utiliza para denominar las fracciones *sólo se maneje de manera verbal* y que éste se introduzca poco a poco a lo largo de las sesiones de trabajo, con el objeto de que el alumno se familiarice con él, descubra el significado de los nombres que se le dan a las partes y los aplique verbalmente para identificar aquellas que se obtuvieron como resultado de un reparto. De esta manera los vocablos con los que se denominan a las fracciones tendrán un significado.

Papel del maestro

Como se puede observar a través de las situaciones que se han descrito anteriormente, la actividad central del maestro, en este tipo de trabajo, no se reduce a dar información simple y llanamente, también organiza las actividades a través de las cuales los niños van a aprender, coordina las discusiones en las que los propios alumnos son los que van marcando sus avances y los siguientes objetivos por alcanzar, plantea nuevas preguntas para que los mismos alumnos logren ver sus errores o modifiquen sus estrategias y cuestionen sus hipótesis.

Coordinar las discusiones de los niños cuando verdaderamente se les ha dado confianza para opinar, propicia que se genere un aparente desorden en la clase; los niños hablarán al mismo tiempo y seguramente usted sentirá que así no es posible trabajar. Sin embargo, estas actitudes de los niños muestran el interés generado. Poco a poco si el docente fomenta el respeto a las distintas opiniones de sus alumnos, se acostumbrarán a guardar silencio para escucharlas, a respetar las ideas de los demás, a tomarlas en cuenta, a refutarlas con argumentos que demuestren lo contrario. Con esta metodología de trabajo, se necesita ser paciente.

LECTURA: ¿QUÉ SIGNIFICA MULTIPLICAR POR 7/4?*

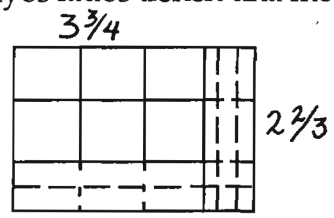
¿QUÉ SIGNIFICA MULTIPLICAR POR 7/4?

Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros

Como parte del programa "Metodología del Trabajo Intelectual", que corresponde al segundo semestre del plan de estudios de la licenciatura en educación indígena que se ofrece en la Universidad Pedagógica Nacional, hemos incluido el planteamiento de algunas situaciones didácticas sobre temas de Matemáticas. Las situaciones son resueltas por los estudiantes y posteriormente se hace un análisis de ellas en la misma clase. En primer lugar se analizan los procedimientos usados y las dificultades que se encontraron, y en segundo lugar las ventajas y limitaciones didácticas que tendrían las situaciones si fueran planteadas a los alumnos del nivel básico. Por lo general, después de haber trabajado para resolver un problema, los estudiantes maestros manifiestan espontáneamente sus puntos de vista en relación con lo que podrían hacer sus propios alumnos si les propusieran un trabajo similar al que ellos han realizado.

El aspecto que abordaremos en este artículo se refiere a una experiencia con los estudiantes sobre la multiplicación por una fracción.

Sabemos que la interpretación más socorrida de la multiplicación es la del área de un rectángulo cuyos lados tienen una medida fraccionaria.



$(3+3/4)X(2+2/3) = 3x2+3x2/3+2x3/4+3/4x2/3=$
$= 6+2+6/4+6/12= 8+2=10$
o bien $= 15/4x8/3=120/12=10$

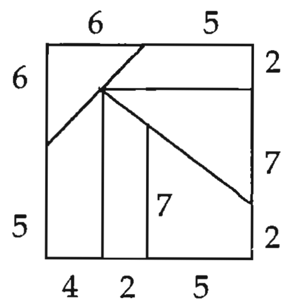
*Hugo Balbuena y David Block. "Que significa multiplicar por 7/4", en: *Cero en conducta*. Núm. 25, Mayo-Junio de 1991, México.

Esta interpretación, aunque permite ver con claridad y facilidad cómo se obtiene el resultado de la multiplicación de fracciones, es muy limitada en el sentido de que sólo da significado a la multiplicación en este problema muy específico: el cálculo del área de un rectángulo.

Hay un campo de problemas mucho más amplio en el que interviene la multiplicación por una fracción: lo constituyen los problemas de proporcionalidad en los que la fracción juega el papel de un operador multiplicativo (Brousseau, G. 1981; Kieren, T. 1976; Freudenthal, 1983).

El problema que se planteó a los estudiantes consiste en construir un rompecabezas semejante a otro pero más grande. Forma parte de una secuencia de situaciones didácticas diseñadas para el aprendizaje de los números racionales por Nadine y Guy Brousseau (1987).

Antes de proponer la situación, el maestro organizó al grupo en tres equipos de cinco a seis estudiantes, entregó a cada equipo una hoja en la que aparece, en tamaño real, un rompecabezas como el que se ve abajo.



Les entregó además reglas graduadas, tijeras y seis mitades de hoja tamaño carta. Enseguida les dio la siguiente consigna:

El dibujo que aparece en la hoja es un rompecabezas, se trata de que ustedes hagan un rompecabezas semejante al que está en la hoja pero más grande, de manera que la parte que mide 4, deberá medir 7 en el rompecabezas que ustedes harán. Primero pónganse de acuerdo en el procedimiento que van a usar y luego se reparten las piezas para que cada quien haga una o dos.

Al elegir esta situación teníamos la expectativa de que los estudiantes utilizarían, entre otros recursos, a la fracción como operador multiplicativo, al encontrar que multiplicando por 7/4 cada una de las medidas originales, se obtiene las nuevas medidas del rompecabezas. Las nuevas medidas guardan una relación proporcional con las medidas originales y el factor que hace pasar directamente de una a la otra es 7/4: 4 X 7/4=7.

7 siete 8 ocho 9 nueve
7 siete 8 ocho 9 nueve
7 siete 8 ocho 9 nueve
7 siete 8 ocho 9 nueve
7 siete 8 ocho 9 nueve

Ejercicio de 1er. grado de primaria

Antes de describir lo que hicieron los estudiantes para resolver la situación, destaquemos una cualidad importante de la misma: la situación permite validar los procedimientos utilizados por los alumnos: ellos pueden saber si sus procedimientos son correctos o incorrectos, porque al final ven si las nuevas piezas embonan o no para formar el nuevo rompecabezas. Esta cualidad marca una diferencia importante con otras situaciones en las que los estudiantes llegan a un resultado sin saber si es correcto o incorrecto. La validación en esos casos depende de la discusión entre los propios alumnos o incluso de la intervención del maestro.

Pasemos a los procedimiento de los alumnos. No sucedió lo que esperábamos. Los tres equipos lograron construir el nuevo rompecabezas pero a través de otros recursos que veremos a continuación.

Equipo 1: El primer intento para resolver el problema fue el uso de una estrategia aditiva. Todos los miembros del equipo estuvieron de acuerdo en sumar tres centímetros a cada una de las medidas originales, pero en cuanto hicieron las primeras piezas, uno de los integrantes dijo:

...pero...¿sabes qué?, no va a checar se deforma demasiado; como que no va a salir.

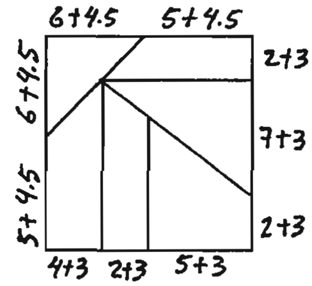
Probaron con las dos piezas que ya habían construido y se dieron cuenta que no embonaban. El mismo estudiante comentó nuevamente:

Nos fuimos con la finta de que como ésta aumentó tres, (se refiere a la longitud que mide 4 cm), a todas les teníamos que aumentar tres.

El maestro preguntó: *¿Y ahora cómo piensan hacerle?*

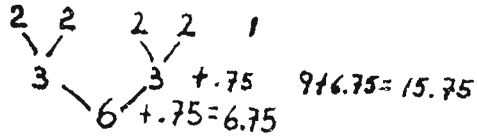
Vamos a checar para ver si están bien las medidas.

El segundo intento consistió en igualar las medidas de los lados que forman el cuadrado, pero conservando la estrategia aditiva: sabiendo que una de las medidas aumentó 3 cm, aumentaron lo mismo a las otras dos medidas en ese mismo lado y obtuvieron 20 cm. Entonces igualaron a 20 cm los 4 lados del cuadrado procurando conservar una regularidad: las medidas de dos lados aumentan siempre 3 cm mientras que las de los otros dos se incrementan en 4.5 cm.



Finalmente optaron por la idea de la proporcionalidad al establecer la siguiente relación: de 4 aumentó a 7, entonces de 2 aumenta a 3.5, es decir, que por cada 2 cm. se aumenta 1.5 cm.

Así, descompusieron las medidas originales en "doses" y de esa manera calcularon las respectivas imágenes. Por ejemplo, para encontrar la imagen de 9 hicieron lo siguiente:



2 X 3/4 =	6 X 3/4 =
4 X 3/4 =	7 X 3/4 =
5 X 3/4 =	9 X 3/4 =

A un lado de la lista anterior, el profesor anota lo siguiente:

2 X ?	= 3.5	6 X ?	= 10.5
4 X	= 7	7 X	= 12.25
5 X	= 8.75	9 X	= 15.75

Les dice que hay un factor que hace pasar directamente de la medida original a la medida incrementada y les propone que traten de encontrarlo. Uno de los estudiantes pregunta: *¿Los factores deben ser iguales o distintos?* El profesor simplemente devuelve la pregunta diciendo que ellos mismos determinen si son iguales o distintos. Las opiniones se dividen, algunos opinan que deben ser distintos factores y otros que debe ser el mismo. Otros incluso dudan de que pueda existir ese factor.

Después de algunos minutos de búsqueda uno de los estudiantes encuentra, por ensayo, el 1.75, lo multiplica por todas las medidas originales y comprueba que sí se obtienen las medidas del nuevo rompecabezas.

El profesor pregunta que si habría una manera directa de encontrar ese número, agrega que también se puede escribir como 7/4.

Algunos tratan de darle sentido a 7/4 mediante la suma de 4/4 + 3/4 = 7/4 pero no encuentran el sentido de esa relación y tampoco se discute.

Finalmente, el profesor hace notar que las relaciones de arriba son multiplicaciones incompletas en las que se conoce un factor y el resultado, por lo que el otro factor, que es 7/4 se puede encontrar directamente dividiendo el producto entre el factor que se conoce. No se pone mayor énfasis en el hecho de que el resultado de dividir 7 entre 4 es igual a 7/4.

Fueron las dificultades con las que nos enfrentamos al aplicar esta situación, las que motivaron las reflexiones y preguntas que planteamos a continuación.

Reflexiones y preguntas

El operador X 7/4 no aparece. Si bien los procedimientos muestran una riqueza de formas para abordar un problema de crecimiento proporcional, salta a la vista que ningún equipo logró, ni al principio, ni al final, construir o identificar al operador X 7/4 que asocia a cada medida de la figura original, su imagen en la figura ampliada.

Es decir, para los alumnos no existe un número que multiplicado por 4 dé como resultado 7 y por esta razón, no sienten necesidad de buscarlo. Esto se hizo más evidente aún al final de la sesión, cuando los alumnos ya han resuelto el problema y el profesor pone las distintas medidas, las originales y las transformadas,y plantea que encuentren un número que multiplicado por las medidas originales, dé las otras medidas. Los alumnos muestran no tener ninguna seguridad, incluso uno de ellos pregunta *¿tiene que ser el mismo número?*

No creemos que el origen de esta ausencia esté en la noción de proporcionalidad, ni en la de operador multiplicativo en general, dado que los alumnos sí identifican al operador cuando éste es entero. En una situación en la que una medida crece al triple, el operador es X 3, los alumnos saben que todas las medidas deben multiplicarse por 3.

Lo que se expresó aquí, en nuestra opinión, es la ausencia de significado de la multiplicación por una fracción, ausencia parcial en algunos alumnos y total en otros.

Parece que la multiplicación, como operación sigue estrechamente vinculada a la idea de número entero de veces más grande, y detrás de este sentido, al de suma iterada. Es el sentido que la multiplicación tiene en los números naturales, por lo tanto, 7 no es cierto número de veces más grande que 4, sí en cambio 8, que es 2 veces más grande que 4, o incluso 2, que es 2 veces más chico que 4.

Los procedimientos que produjeron los alumnos, por cierto creativos y acertados, pueden verse como la producción de alternativas que evitan justamente esta laguna. Veámoslos a la luz de esta hipótesis:

En el equipo 1, al no encontrar un operador multiplicativo entero para pasar de 4 a 7, regresan a la estrategia aditiva: sumar 3. La deformación que se produce en las piezas del rompecabezas los hace recapacitar nuevamente.

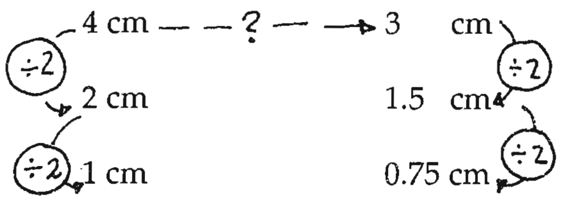
Los tres equipos terminan resolviendo el problema centrándose en lo que hay que *aumentar* a las medidas originales para obtener las imágenes. Todos logran considerar que ese aumento es proporcional: en un equipo proponen aumentar 1.5 cm a cada 2 cm, en otro el 75% de cada medida y en otro 75 mm por cada centímetro. Lo que llama la atención es justamente que se centren en cuánto hay que aumentar, y no en por cuánto hay que multiplicar la medida original para obtener directamente la imagen.

La idea de manejar el incremento parece estar cercana a la estrategia aditiva, en la que se aumenta una cantidad fija, sólo que, a diferencia de ésta, aquí los alumnos sí consideran la proporcionalidad en juego.

L + incremento = L′ en vez de L X factor = L′

Para encontrar los incrementos correspondientes a cada medida, el equipo 1 y el equipo 3, en su primer acercamiento al problema, se las arreglan para manejar operadores enteros y no el operador fraccionario:

Medida original Incremento

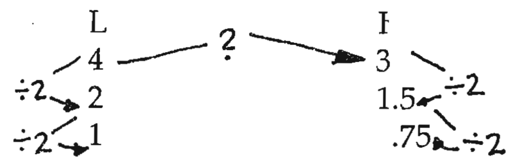


Es decir, manejan las relaciones verticales (internas) de la situación propocional: de 4 a 2 es la mitad, y entonces la imagen de 2 es la mitad de 3, y no la relación en sentido horizontal (externas): la relación de 4 a 3 debe ser la misma que de 2 a X, el número por el que hay que multiplicar al 2 para obtener su imagen, es el número que multiplicado por 4 da 3, pero, ¿existe ese número?

En el equipo 2 aparece un operador fraccionario para calcular el valor de cada incremento, pero aparece escondido en un porcentaje: 75%. Siguiendo un razonamiento preciso, los alumnos saben que el incremento debe ser proporcional a cada medida. Esto los lleva a pensar en el porcentaje que es el instrumento relacionado con la proporcionalidad con el que más familiaridad tenemos, por ser el que más se usa en la vida cotidiana.

Estos alumnos saben pues, que cada incremento es igual a un porcentaje fijo de cada medida, y disponen de un algoritmo para obtener ese porcentaje. Bien, pero nuestro operador fraccionario perdió otra oportunidad de explicitarse.

Finalmente, en el equipo 3, en el momento de la confrontación, un alumno saca a la luz un operador multiplicativo fraccionario para calcular los incrementos: *a cada cantidad debemos aumentarle tres cuartos de ella misma, 3/4 X4 = 12/4 = 3...* No les fue fácil llegar a él. Primero hicieron sus tablas relacionando cada medida (L) con su incremento (I), y utilizando un operador entero:



Observan que por cada centímetro deben aumentar 75 mm, y que éstos representan 3/4 de un centímetro. Después, probablemente razonan así: si a 1 cm se le aumentan 3/4 de él mismo, como a todas las medidas hay que aumentarles en la misma proporción, entonces a L se le aumenta 3/4 de L.

No obstante, cuando al final de la sesión el profesor intenta que los alumnos encuentren el operador que lleva directamente de las medidas originales a las transformadas, aún los miembros de este equipo dudan que dicho operador exista. ¿Qué diferencia hay entre el operador que ellos sí encontraron y el que el maestro quiero que encuentren? Algunas diferencias significativas pueden ser: encontraron este operador a partir de la relación 1------3/4 mientras que en los valores que el maestro presentó al final no aparece la imagen de uno.

Además, el operador X 7/4 tiene la función de pasar directamente de una medida a otra, agradando. El 3/4 en cambio no fue concebido desde la función agrandar-achicar directamente. Fue construido y usado como un medio para expresar la relación entre una medida y lo que se le aumenta (centramiento en el incremento) y como el operador que proporciona los aumentos, los cuales a su vez tendrán que sumarse a cada una de las medidas originales.

¿Qué es necesario para que los alumnos construyan el significado de X 7/4 como un operador multiplicativo?

La situación del rompecabezas tiene la cualidad muy importante: enfrenta a los alumnos a un hecho empírico observable por ellos que se resiste a sus hipótesis iniciales: un 4 se transformó en un 7. La situación misma les hace ver que la transformación no fue aditiva. Se genera un vacío creado precisamente por la ausencia de la noción X 7/4. La evidencia empírica aunada a la ausencia de una solución conceptual, ¿podría en este caso particular propiciar la construcción de ese concepto? Este es, planteando más situaciones similares, ¿podrían los alumnos llegar a construir el operador X 7/4?

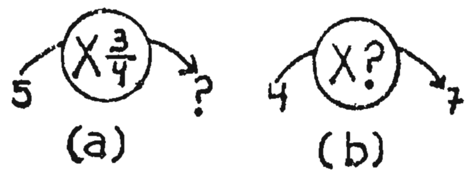
No lo sabemos. Lo que sí sabemos es que, si bien puede decirse que a pesar de su fuerza la situación "flaquea" al dejarse resolver por otras vías, a la vez, como acabamos de ver, propicia la generación de soluciones que indican posibles caminos hacia la noción que nos interesa. Es decir, las condiciones especiales en las que algunos alumnos lograron identificar al operador X3/4, posiblemente son parte de un proceso que los llevará a construir el operador X7/4.

No obstante, nos preguntamos si otras experiencias y otros conocimientos previos al planteamiento de situaciones como la del rompecabezas podrían ser necesarios para facilitar el paso de la noción *3 veces más grande a la noción 7/4 veces más grande.*

Distingamos dos casos:

Caso (a): cómo dar significado a situaciones en las que se aplica un operador multiplicativo.

Caso (b): situaciones en las que hay que encontrar dicho operador.



Para el primer caso una primera y sugestiva respuesta podría ser invertir los factores: 5[X 3/4] = 3/4 [X5]. De esta manera se evita el problema. El operador ahora es un entero, X 5, lo que permite interpretar la situación con el sentido bien adquirido de multiplicación, el de suma iterada:

3/4 [X5] = 3/4 + 3/4 +3/4 + 3/4 + 3/4 = 15/4

Esta solución sin embargo, no resuelve el problema de dar significado al operador X 3/4 y es además débil por dejar de funcionar cuando el otro factor también es una fracción:

2/3 X 3/4

Desde las primeras lecciones de fracciones en primaria, la fracción juego implícitamente el papel de operador: cuando los alumnos colorean 3/4 de un pastel, están, implícitamente, transformando una cantidad de pastel en otra, por la vía de aplicar la composición de operadores (÷ 4) (X3) (González, J. L. 1985).

Cuando aplican una fracción a un conjunto discreto, por ejemplo, 3/4 de 60 canicas, esta composición de operadores se hace un poco más explícita:

3/4 de 60 = (60 ÷ 4) X 3 = 15 X 3 = 45 canicas.

Destaquemos de esto varios hechos: uno, que en estas situaciones la multiplicación por una fracción está implícitamente definida como la transformación resultante de dos transformaciones con números enteros:

X 3/4 significa (X3) (÷ 4) ó (÷ 4 X3)

Z. P. Dienes (1972), por ejemplo, decide definir de entrada a la multiplicación de esta manera. No deja de ser sugestivo: aplicar los operadores (Xn), (÷ m) luego composiciones de 2 operadores y finalmente *definir* la composición (Xn) (÷ m) como (X n/m).

No obstante, sin definir necesariamente de entrada la multiplicación como lo hace Dienes, no deja de parecer interesante, cuando los alumnos determinan una fracción de una cantidad (3/4 de pastel, 7/4 de 60...) el propiciar en algún momento la explicitación de que están poniendo en juego la composición de las operaciones dividir-multiplicar.

Imaginemos situaciones de escala en las que los alumnos agrandan o achican figuras con los operadores (Xn) ó (m) (enteros). Pueden producir agrandamientos o achicamientos del doble, el triple, el cuádruple, etc. La aplicación de operadores fraccionarios como "5/3 de", ya interpretados como la composición (3) (X5), les permitiría producir agrandamientos y achicamientos "intermedios" como los que de hecho puede producir una fotocopiadora, un retroproyector, o una cámara fotográfica.

Un riesgo sin embargo, derivado de la insistencia en traducir X n/m en (m) (Xn), es dificultar el proceso de por sí arduo de concebir a la fracción como un número y no como dos números naturales aislados.

Destaquemos otro hecho: los alumnos pueden aprender sin mucha dificultad a extraer o determinar cantidades como 3/4 de pastel o 3/4 de 60 canicas. Suponemos que pueden incluso explicitar las dos operaciones implicadas en esas acciones. Pero no hay ningún motivo para que los alumnos, de entrada, identifiquen la operación "3/4 de" como una multiplicación.

¿En qué se parece esta composición de operadores a su noción de multiplicación que siempre agranda un número entero de veces?

H. Freudenthal (1983), acertadamente nos hace notar esta dificultad en las formas mismas con las que nos expresamos: decimos, por ejemplo, 3 veces, 4 veces, 8 veces, pero no decimos 3/2 veces, 7/4 veces.

Las fracciones, en su papel de operador multiplicativo, casi siempre están seguidas del término *de: "3/4 de* pastel, 7/4 *de* la longitud, 2/3 *de* la población", y casi siempre con una connotación "extractiva".

El problema, bien indicado por Freudenthal, es entonces: ¿Cómo pasar del *"de"* al *"veces"*? Él propone, entre otras cosas, el uso de número mixtos en situaciones en las que éstos funcionen como operadores multiplicativos: dos y media veces, tres y dos quintos veces... para destacar así un aspecto común a los enteros y a las fracciones: su papel como operadores multiplicativos.

Consideramos que la propuesta es buena, aunque por sí sola difícilmente propiciaría la necesaria reconceptualización de la noción de multiplicación. Digámoslo más directamente: pareciera que los alumnos construyen en paralelo dos nociones: la de multiplicación, asociada a los enteros y la expresión *"n veces"*, y otra operación sin nombre, asociada a las fracciones y a la expresión *'n/m de'*. El que diga a los alumnos que *'n/m de'* es, por definición, *'n/m por'*, puede no ser más que una arbitrariedad que *no* produzca, al menos en el corto plazo, una reconceptualización de la multiplicación. Se estarían designando con el mismo símbolo dos operaciones que, por lo menos durante un tiempo, son diferentes. No sabemos tampoco si esta homonimia sea un factor de aprendizaje.

Lo interesante es que, sin necesidad de asociar la operación *'n/m de'* a la multiplicación, los alumnos pueden dar un amplio uso y en consecuencia un amplio significado a la operación *'n/m de'*.

De hecho, algunos se lo dan. En la experiencia descrita anteriormente, un alumno del equipo tres termina afirmando que a cada medida hay que aumentarle 3/4 *de* ella misma. La fracción permite determinar una relación fija entre la parte y el todo, es decir, una razón, en un contexto de proporcionalidad.

Los niños también lo hacen un poco y lo podrían hacer mucho más. Frente a una expresión como "cada uno va a dar la mitad de las canicas que tenga" o bien, "te vendo todo a la mitad de lo que me costó", entienden perfectamente que las cantidades absolutas, el número de canicas que a cada niño da, por ejemplo, varía, pero que todos los niños dan en función de lo que tienen, todos dan la misma parte de lo que tienen. Es decir, dan proporcionalmente a lo que tienen.

Es posible y deseable entonces, enriquecer la expresión *`n/m de'* en tanto razón y en tanto operador, en situaciones de proporcionalidad. Este es, además, el caso general del muy utilizado porcentaje. Freudenthal propone también explorar otras situaciones como el "diezmar": uno de cada diez y en general, el de *`n* de cada *m'*.

Además con el operador *`n/m de'* se pueden hacer composiciones de dos o más operaciones, por ejemplo:

"Me dieron 3/4 partes del pastel, regalo la mitad, ¿qué fracción del pastel completo regalé?"

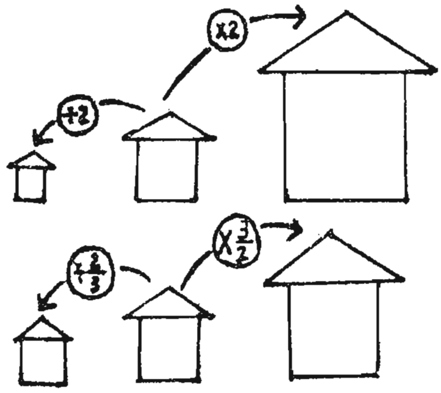
Es decir, se trata de encontrar el operador compuesto equivalente a 1/2 de 3/4 de uno.

Los alumnos pueden descubrir poco a poco que:

`n/m de p/q' equivale a `n X p / m X q de', sin que esto implique aún que esta composición sea para ellos una multiplicación.

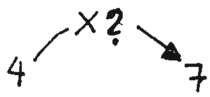
De lo anterior se desprenden dos decisiones posibles. Una es no pretender asociar prematuramente el operador *`n/m de'* con la multiplicación. Esperar a que los alumnos accedan a un nivel de reflexión más abstracto que les permita identificar a la multiplicación de enteros como un caso particular de la multiplicación de fracciones. Esto sin duda no es una tarea realizable en la primaria, y habría que ver si lo es en secundaria. Una decisión como ésta estaría de acuerdo en gran medida con el enfoque de enseñanza "realística" de la matemática, propuesto por la escuela holandesa de investigación en didáctica (Gravemeijer, K. 1990).

La otra decisión es intentar propiciar que esta identificación se dé antes y en un nivel más concreto. En este caso consideramos que deben multiplicarse las situaciones en las que los operadores (Xn) y (÷ m) por una lado y (*'n/m de'*) por el otro, tienden a comportarse de manera similar. Alternar dichos operadores, destacando que, finalmente, los tres "achican" y "agrandan", pero que el operador *'n/m de'* produce transformaciones "intermedias" que los otros no pueden producir. Además, el operador *'n/m de'* puede producir todas las transformaciones que producen los operadores (X n) ó (÷ m).



En este caso convendría recuperar las sugerencias. De Freudenthal acerca de los operadores mixtos. Está implicado también, por supuesto, un intenso trabajo previo sobre proporcionalidad y semejanza.

El caso (b):



¿Qué se necesita para poder saber que el operador implicado es 7/4?

Primero saber que puede existir, lo que quizás supone experiencias previas aplicando operadores multiplicativos fraccionarios.

Aún viendo una ampliación en la que una medida pasó de 4 a 7, es posible dudar de que exista un factor que transforme el 4 en 7. Esto nos mostró la experiencia aquí reseñada.

Una vía posible para encontrar el operador en juego, es a partir de la definición de (X n/m) como (÷ m) (Xn).

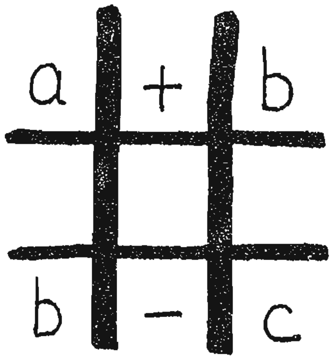
Los alumnos podrían pensar entonces en construir el operador buscado a partir de dos operadores. Uno que transforma al 4 en 1, (4) y otro que transforma al 1 en 7, (X 7). Por definición, el operador compuesto sería (X 7/4).

Otra vía es pensar en la división. Buscar el número que multiplicado por 4 da 7 no es otra cosa que dividir 7 entre 4. Enseguida, se abren dos caminos: uno consiste en dividir 7 entre 4 aplicando el muy enseñado algoritmo de la división. Se obtiene 1.75 y se aplica como operador multiplicativo para obtener las demás medidas.

Creemos que no es muy difícil que esto suceda dada la destreza que los alumnos adquieren en las mecanizaciones con decimales y la tendencia a abordar con ellas los problemas que implican a las fracciones.

Si bien en esta experiencia no sucedió, podría suceder si se manejan cantidades que inviten más a dividir, por ejemplo

14 X ——— =136



El que los alumnos llegaran a utilizar este operador decimal sería ya un paso importante, pero hay que tener cautela: las destrezas adquiridas en la operatoria con decimales suelen ser tan grandes como la incomprensión de su significado. Para muestra baste un botón: a un alumno de la Universidad después de que resolvió el problema de repartir 7 pasteles entre 4 niños por la vía de la división, encontrando que a cada niño le tocan 1.75 de pastel, se le preguntó que cuanto pastel era eso y contestó: *"Un pastel más un séptimo de pastel más un quinto de pastel"*.

El otro camino para encontrar el resultado de la división 7 entre 4 es, simplemente decir 7/4. Camino arduo, dado que a la dificultad de ver a la fracción como operador multiplicativo, se agrega la dificultad de concebirla como cociente de dos enteros.

Sabemos que la concepción de la fracción como cociente está tanto o más ausente que la de operador multiplicativo. La fracción 7/4 como cualquier otra está asociada a la idea de *una* cosa que se parte en 4 y de la que se toman 7 pedazos.

En este caso particular ya es necesario partir dos cosas y este solo hecho es causa de problemas. Pero la fracción 7/4 no es concebida como 7 cosas que se dividen entre 4. La concepción de cociente suele estar ausente a pesar de que en ciertos algoritmos se le utiliza implícitamente, por ejemplo, para pasar de una fracción a expresión decimal se divide el numerador entre el denominador:

$$\frac{7}{4} \rightarrow \begin{array}{r} 1.75 \\ 4\overline{)7} \end{array} \rightarrow \frac{7}{4} = 1.75$$

Este camino implica pues concebir a la fracción como cociente. Había que explorar antes las situaciones didácticas que la propicien (Brousseau, G. 1981; Block, D. 1987; Balbuena, H. 1988).

Para terminar: es claro que en estas reflexiones aún poco sistematizadas no proponemos soluciones. Esperamos, en cambio, contribuir un poco llamar la atención sobre un punto: la 'apuesta' a propiciar en el salón de clases el aprendizaje de una matemática con significado *para* los alumnos, con un significado que se origina en las situaciones en las que los contenidos matemáticos funcionan, en los problemas que resuelven, implica retos didácticos nada desdeñables: ¿qué interpretaciones o significados propiciar y en qué orden? ¿qué situaciones o problemas implican a esas interpretaciones? ¿cómo son los procesos a través de los cuales los alumnos construyen una interpretación?...

SÉPTIMA UNIDAD

GEOMETRÍA

LECTURA: LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA ELEMENTAL*

LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA ELEMENTAL

I. ¿.Dónde estamos?

La geometría en la escuela elemental se redujo durante mucho tiempo a la enseñanza del sistema métrico decimal además de una descripción sintética de algunas figuras u objetos simples (cuadrado, rectángulo. cubo. etc.)

El estudio del sistema métrico se limitaba a ejercicios de conversión en realidad más próximos a la numeración que a actividades propiamente geométricas o de medición. No se planteaban cuestiones a propósito de la conservación de cantidades ni de la conceptualización de las magnitudes físicas.

El estudio de las figuras geométricas se orientaba al enunciado de propiedades observables sin establecer vínculos entre ellas. La enseñanza se realizaba bajo el mismo espíritu de las *lecciones de cosas*: enseñanza de una descripción y de un vocabulario convencionales, sin interés explicativo.

En el marco de los programas de 1970, que ponían el acento sobre la actividad propia de los niños y la manipulación de objetos, la presentación de la geometría se modificó. Es así que se vio aparecer un gran número de actividades sobre cuadrículas: puntos en el plano, trayectos, y transformaciones geométricas, tales como traslaciones, agrandamientos y simetría.

En realidad, la geometría implica más aspectos que los evocados arriba. Es una verdadera teoría física que propone un modelo explicativo de una parte del mundo que nos rodea: círculos, caras planas, líneas, desplazamientos, agrandamientos, etc. En este sentido, la geometría presenta dos aspectos esenciales:

- uno consiste en actuar sobre los objetos reales y obtener información
- el otro consiste en organizar esas informaciones a fin de prever la posibilidad o imposibilidad de realizaciones materiales (construcciones, dibujos, etc.)

Esos dos aspectos interactúan constantemente el uno sobre el otro (véase, por ejemplo, el inciso dedicado a la construcción de figuras).

Los nuevos programas ponen el acento en el aspecto de la obtención y organización de información la cual está, de hecho, en el centro de las preocupaciones de los niños ya desde los primeros grados.

Desafortunadamente, las investigaciones didácticas sobre este tema estan menos avanzadas que las concernientes a las estructuras numéricas. Por otro lado, siendo la geometría por naturaleza más compleja que el número, es más difícil de precisar un orden de los procesos intelectuales de los niños, lo cual excluye la producción de una progresión prevista en todos sus detalles.

II. La geometría, una actividad de despertar

No obtante, es necesario preguntarse sobre eso que se desea obtener con la enseñanza de la geometría, tanto en lo que concierne a las actitudes y aptitudes de los niños, como en lo que concierne a las conceptualizaciones de sus conocimientos.

En este nivel de la enseñanza, la geometría debe ser incluida como una actividad de despertar y los siguientes fragmentos de las *Instrucciones Complementarias* relativas a esas actividades son del todo adecuadas:

... "el camino de base debe ser la exploración efectiva del entorno del niño...

...este tipo de procedimientos debe estar organizado en función de cuestiones tan precisas

**La geometría en la enseñanza elemental.* Tomado y adaptado de A.P.M.E.P. Aides pédagogiques pour le cours élémentaire. No 29 COPIRELEM: IREM de Paris- Sur. Francia. s/f. Trad. Alicia Ávila.

como posible sea que los niños se planteen con la conducción del maestro...

... organizar los procedimientos significa entre otras cosas que los niños son invitados a dirigir sus observaciones seleccionando y clasificando sus constataciones...

... seleccionar y organizar (las informaciones) en función, no de realizar un inventario o una nomenclatura detallados, sino de responder a las cuestiones que motivaron las actividades."

Si la geometría consiste en plantearse cuestiones y, para responderlas, combinar y organizar las informaciones recogidas, ello implica un aspecto complementario: la posibilidad de justificar, sin nuevos recursos experimentales, concordancias o imposibilidades. Por ejemplo: para construir sobre una cuadrícula la imagen de un motivo por desplazamiento de n cuadrados hacia la derecha, y de p cuadrados hacia arriba, se comienza por proceder punto por punto. Pero si n y p son grandes en relación a las dimensiones del motivo, los niños recurren espontáneamente al procedimiento que consiste en ubicar los últimos puntos de la imagen basándose únicamente sobre sus posiciones relativas a los puntos ya dibujados. Así, ellos utilizan la definición de desplazamiento y de una de sus propiedades, lo cual plantea un problema de justificación que ellos son capaces de resolver.

III. Dos ideas importantes

La conceptualización de conocimientos puede organizarse alrededor de dos ideas generales particularmente importantes. No se trata evidentemente de enseñarlas, sino de hacerlas practicar en situaciones diversas.

En primer término una situación geométrica implica simultáneamente objetos y acciones (o transformaciones) sobre esos objetos.

Ciertas propiedades de esos objetos son modificadas en el curso de las acciones, otras no. Desde este punto de vista se puede:

- clasificar objetos según la forma en las que ellos se comportan frente a una acción dada, o
- clasificar las acciones que se realizan sobre un cierto tipo de objetos

La segunda idea que nos parece fundamental consiste en enriquecer simultáneamente los dominios numérico y geométrico mediante el estudio de situaciones donde uno de estos aspectos sirve de instrumento o de soporte al otro. Por ejemplo, en la situación mencionada antes, la justificación necesaria utilizaría números (n, p y las coordenadas de los puntos).

IV. Algunas condiciones didácticas

Sobra decir que no se esperará que se logren los objetivos precedentes mediante situaciones:

- donde sólo se contemplen objetos (lecciones de cosas)
- donde se hayan dado uno o varios objetos a los niños, y se les solicita lo que se puede hacer o decir
- donde se imponga a los niños la ejecucion de una tarea de acuerdo con un plan de trabajo que se ha detallado previamente

En el primero y el segundo caso, el niño está en plena incertidumbre. El no sabe qué es lo que se espera de él. En el primer caso, el maestro elimina la incertidumbre precisando lo que debe observarse. En el segundo caso si los niños reaccionan no es en función del material, sino por aceptar el deseo del maestro. En el tercer caso, los niños no pueden tomar ninguna iniciativa.

Para escapar de estos inconvenientes, las situaciones que se han de proponer nos parece que deben satisfacer a las siguientes condiciones:

- objetos o dibujos son efectivamente presentados desde el principio
- objetos, dibujos, mensajes, vocabulario, deberán ser construidos en el curso de la actividad
- una pregunta debe ser formulada de tal suerte que:

— su respuesta no sea evidente
— movilice un sector de conocimientos anteriores del niño
— permita considerar tareas intermedias y poner en marcha recursos para responderla

Esto exige en particular que los niños tengan a su disposición objetos variados (triángulos, cuadrados, cubos, etc.) e instrumentos (tijeras, pegamento, papel, instrumentos de geometría, etc.)

ALGUNAS ACTIVIDADES

1. *Juego de descripción*

Esta actividad está fuertemente inspirada en un artículo de Pierre Gagnaire publicado en el boletín de la A.P.M.E.P. No. 292.

1.1 Objetivos

Descubrir elementos característicos de un poliedro (sólido constituído exclusivamente por caras planas), introducir un vocabulario común para describir los poliedros.

Una observación importante:

El objetivo de esta actividad no es hacer que los alumnos se aprendan el nombre de cada uno de los poliedros utilizados. Ese nombre sería suficiente para determinar cada uno de los poliedros propuestos y las actividades perderían todo su sentido.

1.2 Descripción de la actividad

Situación de comunicación con intercambio de mensajes

Cada alumno o grupo de alumnos recibe un ejemplar de cada uno de los poliedros que seleccione el maestro. Se escoge uno de los poliedros y se debe enviar un mensaje escrito a otro niño o equipo a fin de que éste reconozca el sólido de entre todos los que tiene a su disposición. Después de que el poliedro sea reconocido, el compañero que envió el mensaje deberá mostrar el poliedro (validación de la comunicación).

Para cada alumno o grupo de alumnos, la consigna es:
— escoger un objeto
— elaborar un mensaje para identificar el ob jeto
— enviar el mensaje a otro niño o equipo
— recibir el mensaje de otro niño o equipo
— descifrar el mensaje
— mostrar, si se puede, el objeto que corresponde al mensaje

Es indispensable repetir esta actividad un cierto número de veces, solicitando que, cada vez, se seleccione un objeto diferente, con el fin de que los niños mejoren sus descripciones.

En efecto, ciertos mensajes no son correctamente elaborados, algunos alumnos escogen poliedros parecidos a objetos familiares y escriben mensajes como: "Se parece a una zanahoria" o realizan descripciones como "Tiene dos puntas grandes y tres chiquitas" (esto último para describir el hexaedro).

En fin, ciertos mensajes contienen informaciones notoriamente insuficientes, corren el riesgo, sin embargo, de ser validadas. Por ejemplo, se vio a un equipo recibir el mensaje "Tiene orillas" y reconocer el prisma triangular, que era, por cierto, el objeto escogido por el equipo que escribió el mensaje.

A lo largo de estas actividades, los alumnos son conducidos a tomar conciencia de ciertas informaciones que permiten describir sin ambigüedad un poliedro dado: número de aristas, vértices, caras, forma de las caras, pero también de apreciaciones cualitativas (grande, pequeño) que preludian la medida. Esto porque, por ejemplo, el hexaedro y el cubo tienen seis caras, pero no el mismo número de aristas ni de vértices; el cubo y el octaedro tienen 12 aristas pero no el mismo número de caras, etc.

2. *Construcción de patrones*

2.1 Objetivos

Tomar conciencia de la necesidad de medir.

Reflexionar sobre la cantidad de información necesaria.

Inventar técnicas y utilizar instrumentos para realizar las construcciones.

2.2 Descripción de la actividad

Se trata de hacer un forro, pero el poliedro que se va a forrar no está directamente accesible a los niños. Se puede decidir, por ejemplo, que sólo un niño, encargado de solicitar el forro, puede manipular el poliedro.

No es indiferente que los otros niños puedan o no ver el poliedro, puesto que se puede señalar que la mayoría de ellos utilizan informaciones visuales que no han sido explicitadas para intentar realizar sus construcciones. Por ejemplo, para construir un triángulo (visible para todos) en el que ellos aprenden que los tres lados miden 6 centímetros, muchos de ellos logran hacer bien la construcción "casi correcta" utilizando únicamente dos datos es decir, trazando a partir de un punto común dos segmentos de 6 centímetros estimando "a ojo" la apertura entre las líneas. Ellos terminan el triángulo, o bien uniendo las los extremos libres, sin medir el tercer lado (fig. 1), o bien construyendo un tercer lado de 6 centímetros, que no siempre da un triángulo cerrado (fig. 2).

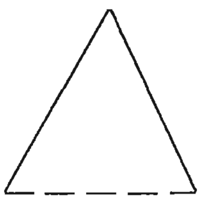


figura 1

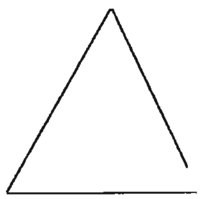


figura 2

Es entonces importante imponer restricciones, por ejemplo, esconder todos los poliedros que se van a forrar, desde el principio de la actividad, o sólo algunos de entre ellos. Se hace aparecer así ciertos problemas fundamentales, teóricos y técnicos:

Naturaleza y número de informaciones indispensables

Construcción de un patrón conociendo esa información

Mediciones sobre los objetos

Por ejemplo:

¿Qué es necesario conocer para construir (de la misma forma y la medida exacta) un triángulo o un rombo que forman una de las caras del poliedro?

¿Cómo utilizar los datos para para realizar el dibujo?

¿El niño que tiene el poliedro ha tomado bien las medidas?

¿Cómo puede un niño evaluar su trabajo en el transcurso de la realización?

Todas las personas que trabajan con sus manos (costureras, cocineras, albañiles, etc.) proceden por una sucesión de ensayos que mejoran la calidad de su producto. Uno hace ensayos, otro prueba la salsa, otro usó la plomada o el metro, etc.

Es indispensable mostrarse estricto en lo que concierne a la construcción de un triángulo, un rombo, o cualquier otra figura. Parece fundamental aceptar la "pérdida de tiempo" en fracasos, luego en tanteos, en reflexiones sobre los fracasos, porque en contrapartida, uno puede esperar un mejoramiento en la calidad del aprendizaje.

DIBUJO Y GEOMETRÍA

Objetivos del ciclo elemental.

- Saber utilizar... regla, escuadra, compás y otros instrumentos geométricos para estudiar, construir o reproducir figuras planas.

I. Necesidad de practicar el dibujo geométrico

La geometría implica el estudio de las propiedades de ciertos objetos del espacio usual. Esas propiedades aparecerán más fácilmente si las actividades geométricas derivan de la construcción efectiva de tales objetos.

Por ejemplo: se decide construir una caja de cartón (sin cubierta) para poner objetos. Una primera observación conduce a los niños a constatar que, para realizarla, hacen falta cinco piezas (el fondo y las cuatro "paredes"), que cada una de esas piezas tiene cuatro lados y que las medidas de esos lados no pueden ser escogidas arbitrariamente. Después de haber construido por tanteo una maqueta en papel, los niños estarán en posibilidades de pasar a la construcción efectiva de la caja, la cual se descompone en tres etapas: el trazo de las piezas, el recorte y el armado.

Cada una de estas etapas necesita el empleo de útiles apropiados, en particular la regla, la escuadra, el compás para realizar el trazo.

La precisión del dibujo y del recortado es sancionado por la calidad de la caja armada.

Los textos citados párrafos atrás invitan a utilizar los instrumentos geométricos tanto en el desarrollo de actividades de trabajo manual (realización de maquetas) o de actividades estéticas (frisos, mosaicos) como en el curso de actividades geométricas (estudiar, construir o reproducir figuras planas).

Los instrumentos geométricos son útiles de precisión y la calidad de las realizaciones que permiten depende de la habilidad manual del dibujante. Para los niños pequeños, su manejo se integra, por lo tanto, en una educación general que pone en marcha otras técnicas (recorte, doblado, pegados armado, etc.).

LECTURA: LA GEOMETRÍA, LA PSICOGÉNESIS DE LAS NOCIONES ESPACIALES Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA ELEMENTAL*

LA GEOMETRÍA, LA PSICOGÉNESIS DE LAS NOCIONES ESPACIALES Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA ELEMENTAL**

LA GEOMETRÍA

Las historias de la geometría localizan su origen en Egipto, ligado a un problema práctico: la reconstitución de los límites de los terrenos después de las crecidas del Nilo. De allí es exportada a Grecia, posibilitando a Thales de Mileto la vuelta a Egipto para calcular la altura de la gran pirámide a partir de la medición de su sombra. La geometría surge, pues, como una ciencia empírica, en la que los esfuerzos de teorización están al servicio del control de las relaciones del hombre con su espacio circundante. "El plano de Thales es el desierto, donde la luz hace todos los dibujos posibles" (Serres, 1981).

Esta geometría empírica, o física, constituye una teoría de la estructura del espacio físico, que "no puede nunca, desde luego, darse por válida con certeza matemática, por amplias y numerosas que sean las pruebas experimentales a que se someta; como cualquier otra teoría de la ciencia empírica, puede sólo conseguir un grado mayor o menor de confirmación" (Hempel, 1974).

Es esta versión de la geometría sobre la que están basadas una serie de actividades humanas que requieren el control de relaciones espaciales y de cuya vigencia actual nadie duda, entre las que se pueden mencionar el diseño y construcción de todo tipo de objetos físicos (desde productos y máquinas industriales hasta edificios, ciudades y carreteras), la elaboración de mapas, el cálculo de distancias astronómicas, etcétera.

El momento culminante en el desarrollo de la geometría, en tanto rama de las matemáticas, se produce cuando Euclides escribe *Los elementos* (siglo III a. C.), sintetizando el saber geométrico de su época. En esta obra se parte de un número reducido de axiomas, postulados y definiciones para construir, por vía de la deducción, el conjunto de las proposiciones geométricas vigentes, las que aparecen como consecuencias necesarias de las afirmaciones primitivas.

La geometría euclidiana constituyó, durante muchos siglos, un paradigma para el resto de las matemáticas e incluso para el resto de las ciencias. [1] En efecto, fue la primera axiomatización en la historia de las matemáticas.

Serres (1981) hace un análisis etimológico de los términos empleados en la geometría euclidiana, mostrando su origen físico y dinámico: el triángulo isósceles se llama así porque posee "dos piernas iguales", a diferencia del escaleno, cuyo nombre alude a su inclinación, debido a que "está cojo"; el rombo deriva su designación de uno de los objetos más dinámicos que es posible imaginar: el trompo. Habría pues, una mecánica oculta tras el léxico utilizado por Euclides. Sin embargo, el hecho es que en la geometría griega se razona rigurosamente sobre trazados cualesquiera; no se está hablando de un dibujo en particular sino de cualquier dibujo que posea las propiedades consideradas en el enunciado. Y, de esta manera, constituye un hito fundamental en el proceso de separación de lo sensible, de estatización (en el sentido de volverse estáticos) de los conceptos geométricos. Proceso que culmina ya en nuestra época con Hilbert, quien reformula los axiomas euclidianos y valoriza el sistema deductivo, la sintaxis, planteando que el contenido semántico puede ser reemplazado por otro cualquiera.

En síntesis, la aportación de la geometría euclidiana es el uso de la demostración, que está referida a las propiedades de un espacio puro,

*Grecia Gálvez. "La geometría, la psicogénesis de las naciones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental", en: PARRA, Cecilia e Irma Sainz (Comps.). *Didáctica de matemáticas*. Paidós, Argentina, 1994. pp. 273-299.

formal. "La geometría de las matemáticas no es el estudio del espacio y de nuestras relaciones con el espacio sino el lugar en que se ejercita una racionalidad llevada a su excelencia máxima" (Laborde, 1984). A diferencia de la física, en la que se busca una aproximación a la realidad cada vez más precisa (por ejemplo, a través de mediciones más exactas), la matemática es inexacta, sus verdades son abstractas, necesarias, sin referencia a la realidad. Lo que no impide el empleo de modelos matemáticos en la construcción de teorías físicas.

En el siglo XVII, Descartes y Fermat reemplazan los puntos de un plano por pares de números y las curvas por ecuaciones. "De tal manera, el estudio de las propiedades de las curvas será reemplazado por el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes" (Piaget y García, 1982). [2] La geometría se "reduce" al álgebra y se beneficia del uso de los métodos generales y uniformes para resolver problemas inherentes a esta última. Una sola fórmula basta para establecer propiedades generales de familias enteras de curvas. Los razonamientos no se ven limitados por las dificultades para imaginarse o representar figurativamente sus consecuencias.

Pero los geómetras no están contentos e intentan utilizar los métodos propios de la geometría para razonar acerca de valores indeterminados, obteniendo el mismo grado de generalidad que la geometría analítica de Descartes. Son Chasles y Poncelet, en el siglo XIX, quienes incorporan los sistemas de transformaciones como método fundamental de la geometría a fin de dotarla de la generalidad, flexibilidad y fecundidad propias de la geometría analítica. Ciñéndose al modelo de ésta aceptan, por ejemplo, la existencia de elementos "imaginarios" en geometría.

Un momento fundamental en el desarrollo de la geometría lo constituye el surgimiento de las geometrías no euclidianas. Intentando demostrar la necesidad del V postulado de Euclides [3] por reducción al absurdo, aparecen cuerpos teóricos coherentes que pasan a constituir nuevas geometrías; la de Lobatchevski, la de Riemann. La idea de que la geometría euclidiana es el único modelo posible del espacio físico sucumbe, y los físicos comienzan a aprovechar los nuevos modelos, que se adecuan mejor a la descripción de fenómenos que tienen lugar en escala astronómica. El espacio, como realidad física, se escapa definitivamente del control de una sola teoría geométrica para caer en perversas vinculaciones con el tiempo, dentro de la concepción einsteniana. La geometría queda fragmentada en una pluralidad de teorías alternativas, en función de los axiomas seleccionados, que pueden dar cuenta de diferentes clases de problemas planteados en el espacio físico.

Klein (en su Programa de Erlangen, en 1872) logra la síntesis de las geometrías, basándose en la noción de grupo de transformaciones, que le permite introducir distinciones precisas entre los diferentes tipos de geometrías existentes. El grupo principal de transformaciones del espacio está constituído por el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariantes las propiedades geométricas de las figuras. Diversos grupos de transformaciones caracterizan a las diversas geometrías, permitiendo estudiar los entes que las integran desde el punto de vista de las propiedades invariantes en las transformaciones de cada grupo. Las geometrías quedan subordinadas a un grupo único, del que llegan a ser casos particulares.

Pero entonces la geometría ha muerto, absorbida por la teoría de las estructuras, de naturaleza algebraica. Actualmente se considera que la geometría está agotada, en tanto teoría matemática independiente. Mientras las relaciones de la geometría con el resto de las matemáticas tuvieron un *status* claro, no había problemas en la enseñanza de la geometría. Actualmente resulta mucho más complejo definir el *status* de la enseñanza de la geometría. Freudenthal (1964), lamentando esta situación, constata un hecho:

> En el sistema bourbakista la geometría no existe. En las revistas de crítica bibliográfica lo que se incluye bajo el nombre de geometría comprende menos del 5 % del total de los artículos de investigación registrados. En los programas universitarios de todo el mundo, la palabra

geometría es apenas mencionada y los investigadores que podrían llamarse a sí mismos "geómetras" evitan el término por parecerles fuera de moda.

Al respecto, Revuz (1971) hace una distinción entre situación, modelo y teoría, afirmando que muchas teorías matemáticas, importantes y en boga en la investigación matemática actual, tienen su origen en la abstracción de modelos geométricos, los que, a su vez, constituyen esquemas de situaciones espaciales. Se abre así una brecha para la justificación de la enseñanza de la geometría, al menos en la profesionalización de los nuevos matemáticos.

No obstante, la ausencia de una comunidad científica que se identifique a sí misma como comunidad de geómetras incide, indudablemente, en la toma de decisiones oficiales respecto a la enseñanza de la geometría. Estas decisiones no pueden ser controladas (criticadas, rectificadas, apoyadas) por un grupo de presión que tome posición frente a los problemas de la enseñanza en función de las necesidades de su propio desarrollo, como sucede en el resto de las ciencias vivas.

LA PSICOGÉNESIS DE LAS NOCIONES ESPACIALES

Para abordar este tema nos basaremos en los trabajos de Piaget, quien irrumpe en la vieja polémica filosófica relativa al carácter objetivo o subjetivo de la idea de espacio para demostrar, por medio de estudios psicogenéticos, cómo es que los conceptos espaciales se van construyendo progresivamente a partir de las experiencias de desplazamiento del sujeto. Poincaré había afirmado: "Para un sujeto inmóvil no existe ni espacio ni geometría", y también: "Localizar un objeto es representarse los movimientos que habría que hacer para alcanzarlo". Con estas hipótesis, Piaget realiza un cuidadoso trabajo de observación y experimentación sobre sujetos en desarrollo.

En la construcción de lo real en el niño (Piaget, 1937) encontramos una notable descripción del desarrollo de las categorías básicas de objeto, espacio, causa y tiempo, en los primeros años de vida del niño, correspondientes al desarrollo de la inteligencia sensoriomotriz. Con respecto al espacio, Piaget muestra que, inicialmente, el sujeto elabora espacios específicos para cada dominio sensoriomotor, heterogéneos y no coordinados entre sí. Por ejemplo, el niño no puede dirigir su vista hacia los objetos que toca, ni orientar su aprehensión hacia los objetos que motivan su atención visual. El espacio está conformado por haces perceptivos, altamente inestables e incontrolables por el sujeto, a los cuales acomoda los escasos desplazamientos que puede realizar. Progresivamente, el niño va logrando una mayor coordinación de sus actividades en el espacio: puede retomar un objeto que ha dejado caer, reanudar una actividad interrumpida, anticipar el desplazamiento de un móvil oculto tras una pantalla, diferenciar los objetos que están a su alcance de los que no lo están.

Piaget (1937) recurre a la siguiente imagen, para ilustrar el proceso de estructuración de la profundidad del espacio:

> ...podemos comparar el "espacio lejano" del niño de este estadio, es decir, el espacio situado más allá del campo de la aprehensión, con lo que es el espacio celeste para el adulto no instruido o para la percepción inmediata. En efecto, el cielo se nos aparece como una gran cubierta esférica o elíptica, sobre cuya superficie se mueven imágenes sin profundidad que se interpenetran y se destacan alternativamente: el sol y la luna, las nubes, las estrellas, así como las manchas azules, negras o grises que llenan los intersticios... El "espacio lejano" permanece análogo a lo que es el cielo en la percepción inmediata, mientras que el "espacio próximo" se asemeja a nuestra percepción del medio terrestre, en el cual los planos de profundidad se ordenan en función de la acción. Pero el ciclo debe concebirse aquí como rodeando de cerca al sujeto y no retrocediendo sino muy paulatinamente. Antes de la aprehensión de los objetivos visuales, el niño está en el centro de una espe-

> cie de esfera móvil y coloreada, cuyas imágenes lo aprisionan sin que él se haya apoderado de ellas de otra manera que haciéndolas reaparecer gracias a esos movimientos de la cabeza y de los ojos. Luego, cuando comienza a tomar lo que ve, la esfera se dilata poco a poco, y los objetos tomados se ordenan en profundidad en relación con el cuerpo propio: el "espacio lejano" aparece simplemente como una especie de zona neutra en la que la prehensión no se ha arriesgado todavía, en tanto que el "espacio próximo" es el dominio de los objetos para tomar.

A medida que el niño progresa en la posibilidad de desplazarse y de coordinar sus acciones, va apareciendo el espacio circundante a estas acciones como una propiedad de ellas. Inicialmente, el sujeto no concibe a los objetos como dotados de trayectorias independientes de su acción.

De manera paulatina el sujeto va organizando sus desplazamientos: descubre caminos equivalentes, aprende a evitar obstáculos. Llega a concebir al objeto como permanente y puede disociar claramente sus propios desplazamientos de los del objeto. El espacio es exteriorizado, aparece como el marco inmóvil en el que se sitúan tanto los objetos como el sujeto. La siguiente observación ilustra cómo el niño va siendo capaz de componer sistemáticamente sus desplazamientos, constituyendo lo que Piaget denomina grupo objetivo:

> Obs. 108
> I. (1;3 [13]) está sentado, coloca un guijarro delante de él, luego lo desplaza hacia la derecha, corrige su propia posición para colocarse delante del guijarro, lo desplaza nuevamente hacia la derecha y así sucesivamente, hasta describir, casi, un círculo completo (Piaget, 1937).

Finalmente, el sujeto llega a concebirse como un objeto más, dentro de un espacio homogéneo, pudiendo representarse sus desplazamientos en relación con los desplazamientos y las posiciones de los objetos. La génesis de la representación, para Piaget, pasa por la interiorización de la imitación de la acción personal sobre los objetos, en el proceso general de construcción de la operaciones intelectuales vía la internalización de las acciones.

En *La representación del espacio en el niño,* Piaget y otros (1947) estudian la intuición como factor en la constitución de la geometría objetiva del espacio. Para ello recurren a su exteriorización a través de representaciones gráficas (dibujos). La intuición geométrica es considerada como de naturaleza operatoria, según una distinción entre elementos figurativos (imágenes) y operativos (acciones internalizadas) en el curso del pensamiento. Son los aspectos operativos los que, progresivamente, otorgan movilidad a las imágenes, permitiendo la representación de sus transformaciones. Por ejemplo, cuando se pide a los niños que identifiquen objetos sólo mediante el tacto (percepción estereognósica), la sistematicidad de los movimientos exploratorios constituye un buen índice de la calidad de la imagen que el sujeto se forma del objeto. La motricidad (sea perceptual o manual) aparece como un componente necesario en la elaboración de las imágenes, puesto que el niño reconoce sólo las formas que es capaz de construir con su propia actividad: "La intuición de una recta surge de la acción de seguir con la mano o la mirada, sin cambiar de dirección".

Consecuentemente con esta concepción, gran parte de las situaciones experimentales consisten en presentar al niño una configuración (estado inicial) y pedirle que anticipe y dibuje la configuración resultante (estado final) tras la aplicación de una transformación determinada.

La tesis fundamental de Piaget en esta obra es que, en el dominio de la geometría, el orden genético de adquisición de las nociones espaciales es inverso al orden histórico del progreso de la ciencia. El niño considera primero las relaciones topológicas de una figura, y sólo posteriormente las proyectivas y euclidianas, que son construidas casi de modo simultáneo. [4] En efecto, las primeras relaciones que el niño puede reconocer y representar gráficamente son las de vecindad, separación, orden, entorno *(enclosu-*

re) y continuidad. Muy tempranamente logra distinguir entre figuras cerradas y abiertas, diferenciar el espacio interior del exterior a una frontera dada o determinar posiciones relativas al interior de un orden lineal. Las relaciones topológicas permiten la constitución de una geometría del objeto, en singular.

El dominio de las relaciones proyectivas permite la constitución de una geometría del espacio exterior al sujeto, quien lo contempla desde cierta distancia. La descentración del sujeto respecto a su perspectiva actual le permite coordinar distintos puntos de vista posibles y construir una representación del espacio con el que está interactuando en la que los ejes adelante-atrás y derecha-izquierda dejan de ser absolutos.

La construcción del espacio euclidiano, el espacio que contiene tanto objetos móviles como al sujeto, es abordada por Piaget y colaboradores básicamente en *la geometría espontánea del niño* (1948). Uno de los problemas fundamentales que Piaget trata de resolver a lo largo de gran parte de su obra es el del tránsito del conocimiento experimental, contingente, al conocimiento deductivo, necesario. En el caso del espacio, de la inducción empírica e intuitiva a la generalización operatoria e iterable característica, por ejemplo, de los lugares geométricos (donde se trata de encontrar el conjunto de *todos* los puntos que cumplen con determinadas condiciones).

En la base del conocimiento matemático se encuentra, según Piaget, un proceso de abstracción reflexiva, que se origina en las propias acciones del sujeto sobre los objetos, a diferencia de la abstracción empírica, que permite la aprehensión de las propiedades de los objetos.

Piaget distingue las operaciones lógicas, que implican la manipulación de clases y relaciones establecidas a partir de elementos discretos, y las operaciones infralógicas, equivalentes a las anteriores pero cuyo punto de partida son las partes de un todo continuo (objeto o infraclase). Las relaciones espaciales son, por lo tanto, de índole infralógica.

La característica fundamental del espacio euclidiano, para Piaget, está constituida por la métrica, que posibilita la estructuración de un sistema tridimensional de coordenadas y, en consecuencia, la matematización del espacio. La métrica implica el uso de dos operaciones que determinan el tránsito del manejo cualitativo del espacio al manejo cuantitativo: la de partición de un todo en sus partes, para construir una unidad de medida, y la de desplazamiento, para aplicar esa unidad de medida en forma reiterada, cubriendo la extensión del objeto (iteración). La medición de longitudes en el espacio euclidiano supone que la longitud de un objeto se conserva cuando éste se desplaza, puesto que, en caso contrario, la unidad de medida perdería su carácter de patrón estable. [5]

En un volumen de los *Estudios de Epistemología Genética* dedicado a la *Epistemología del espacio* (1964), Piaget alude a la dificultad para diferenciar significante y significado en el caso de la imagen mental visual, puesto que ambos son de carácter espacial. Esta homogeneidad entre significante (por ejemplo, la imagen de un cuadrado) y significado (la idea de un cuadrado) explica la importancia histórica de la intuición geométrica cuyo valor heurístico sigue vigente, aun cuando su valor demostrativo fue sustituido por el manejo de sistemas formales, axiomatizados. Piaget insiste en la naturaleza operatoria de la intuición geométrica, que permite superar el estatismo propio de las imágenes. Por otra parte, diferencia el espacio físico, considerándolo como abstraído de los objetos, del espacio lógico-matemático, abstraído a partir de las acciones ejecutadas sobre los objetos, acciones que pueden imitar y sobrepasar las configuraciones y transformaciones del objeto.

En el volumen sobre el pensamiento matemático de la *Introducción a la Epistemología Genética* (1949), Piaget hace un interesante paralelo entre las operaciones lógico-aritméticas de clases y de relaciones asimétricas (seriación), que generan la noción de número, y las operaciones espaciales de partición y de desplazamiento, que generan la posibilidad de medición (cuantitativa) del espacio. Describe una vez más el desarrollo de las operaciones espaciales, partiendo del nivel perceptual, caracterizado por espacios heterogéneos. Este es seguido por el nivel sensoriomotor en el que los desplazamientos, unidos a las percepciones, permiten ciertas coordinaciones, que se organizan en un espacio próximo, con conservación práctica del objeto pero sin espacio representativo más allá de los límites de la acción. A continuación, viene el nivel del pensamiento intuitivo preoperatorio, en el que se constituyen imágenes espaciales estáticas y la imaginación de algunas acciones relativas a las posibles transformaciones de los objetos, pero sin conservación ni reversibilidad. El nivel siguiente es el de las operaciones concretas, en el que se organizan las primeras operaciones transitivas y reversibles, aplicadas a objetos presentes o imaginados. La posibilidad de descentrarse del sujeto permite la coordinación lógica del espacio desde múltiples puntos de vista. Finalmente, se constituye el nivel de las operaciones formales en el que tanto las transformaciones espaciales como las numéricas quedan subsumidas en el interior de sistemas formales, de naturaleza hipotético-deductiva. Las operaciones espaciales se desligan de las acciones y objetos del espacio físico, pudiendo abarcar todo el universo de posibilidades espaciales. El sujeto se mueve (intelectualmente) en el ámbito de lo posible, de lo hipotético, del infinito.

Para terminar esta sintesis haremos una breve referencia a las consecuencias pedagógicas que el propio Piaget deriva de su concepción de la psicogénesis de las nociones espaciales. En una intervención sobre la educación matemática (Piaget, 1973), después de hacer referencia a cómo es que el pensamiento lógico deriva de una fuente profunda, de la lógica implícita en las coordinaciones generales de la acción, afirma:

> En los alumnos jóvenes la acción sobre los objetos resulta totalmente indispensable para la comprensión, no sólo de las relaciones aritméticas, sino también de las geométricas.

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA ELEMENTAL

Los programas oficiales para la escuela primaria mexicana (SEP, 1982) incluyen los siguientes temas de geometría: propiedades y localización de objetos, propiedades de líneas, identificación y trazado de figuras geométricas, medición de longitud, área, volumen y capacidad, simetría axial y de rotación, ángulo, plano cartesiano y dibujo a escala.

El breve análisis que intentaremos a continuación se basa exclusivamente en la información obtenida de textos y programas. Es seguro que la observación de clases agregaría valiosos elementos, pero no tuvo cabida en el marco de nuestra investigación.

La introducción de conceptos geométricos, de acuerdo con los programas, debe organizarse en tres momentos:

1. Presentación del "nuevo objeto" a los alumnos, quienes lo ven, lo distinguen de otros objetos que ya conocen y aprenden su denominación científica (geométrica).
2. Ejercitación en el trazado de este nuevo objeto, siguiendo la secuencia: trazado sobre el piso mediante desplazamiento corporal o empleo de cuerdas, trazado sobre el mesabanco manipulando objetos longuilíneos (como pajitas) y trazado con lápiz sobre papel.
3. Aplicaciones en actividades que suponen que el objeto nuevo ya ha sido asimilado.

La presentación se apoya en los conocimientos previos de los alumnos (véase la enseñanza del círculo en 1o. grado, Apéndice) y recurre con frecuencia a analogías (véase Apéndice, introducción de la noción de rectas paralelas, en 3o. grado).

El énfasis de la actividad de los alumnos está puesto en el trazado, para el que recurren a técnicas usadas por los albañiles en la construcción[6] y al uso de instrumentos como regla, escuadra y compás. La secuencia sugerida probablemente facilite la corrección del trazado en el momento en que deba hacerse sobre el cuaderno, pero no garantiza la apropiación de la significación del objeto estudiado, la que queda sujeta a los vaivenes de la experiencia de cada alumno, puesto que el trazado no agota el conocimiento de las propiedades de una figura ni contribuye necesariamente a su adecuada jerarquización.

Las aplicaciones pueden consistir en el uso de los objetos que acaban de aprender como elementos decorativos, en los primeros grados, o en la resolución de problemas, en los últimos grados.

En los comentarios metodológicos al programa de primer grado (SEP, 1982) se propone que el niño "llegue por sí mismo a los conceptos matemáticos y los exprese en su propio lenguaje". La insistencia posterior, a lo largo del programa, en el uso de los términos geométricos desde el primer acercamiento al objeto correspondiente y casi como sustituto de la caracterización de dicho objeto según sus propiedades, nos parece contradictoria con el planteamiento metodológico inicial. Un breve ejemplo: al clasificar objetos tridimensionales por forma, en primer grado, se sugieren las categorías "redondo", "no redondo", que seguramente corresponden al lenguaje cotidiano del niño. Pero al pasar al plano se impone el término "círculo" frente a figuras que, sin lugar a dudas, seguirán apareciendo como "redondas" para el niño. Con este comentario no pretendemos abogar por el uso a destajo del lenguaje natural de los niños en el tratamiento de los temas escolares sino por su incorporación, aceptación y vinculación a un lenguaje técnico que se supone adquirirán progresivamente.

En La epistemología del espacio Piaget (1964) plantea que uno de los problemas básicos del conocimiento geométrico es la homogeneidad relativa entre significante y significado. Las relaciones espaciales se representan mediante imágenes que son también espaciales, cosa que no sucede, por ejemplo, en el terreno de la aritmética. Esta homogeneidad lleva a concebir la intuición geométrica como un producto directo de la percepción. [7] Durante mucho tiempo, dicha concepción ha fundamentado la organización de la enseñanza escolar de la geometría elemental, dotándola de un carácter ostensivo. Basta mostrar los objetos geométricos, que los alumnos los vean, para que los conozcan; basta enunciar sus propiedades para que los alumnos se las apropien. Pero, ¿qué ven los niños cuando se les muestra, por ejemplo, una figura geométrica? Los psicólogos soviéticos han puesto en evidencia, desde hace varias décadas, que los alumnos incluyen rasgos no esenciales de las figuras geométricas al conceptualizarlas, en función de las condiciones en que tiene lugar su aprendizaje. Así, si los lados de un cuadrado no son paralelos a los bordes del papel o pizarrón en que ha sido trazado, la figura corre el riesgo de ser vista como rombo, debido a que la orientación ha adquirido el rango de atributo básico. En la actualidad estos fenómenos continúan atrayendo la atención de investigadores interesados en la didáctica de la geometría. Gallo (1984) los encuentra en una situación de comunicación entre alumnos de 14 años, asignándoles la denominación de "modelos estandar" de los objetos geométricos. El programa oficial mexicano intenta superar estos problemas presentando las figuras geométricas en múltiples posiciones y secuenciando su introducción desde lo general hacia lo particular (primero el cuadrilátero, luego el rectángulo y sólo después el cuadrado). Sin embargo, la dirección opuesta está tan afianzada en la tradición pedagógica que la finalidad de la secuencia del texto oficial probablemente resulte de difícil comprensión incluso para los maestros. Por otra parte, la proposición de utilizar la simetría axial o de rotación como criterio de clasificación y de definición de clases de polígonos regulares resulta un tanto exótica, haciendo perder la perspectiva de una progresión armónica en la introducción de las figuras geométricas.

El complejo tránsito desde la constatación empírica de propiedades hasta su integración a un sistema deductivo, con carácter necesario, es buscado a través de la reiteración de experiencias de verificación de propiedades. Como ejemplos, remitimos al Apéndice, donde incluimos las actividades propuestas para que los alumnos aprehendan la constancia del radio de un círculo (pág. 293), y las relaciones recíprocas entre rectas paralelas y perpendiculares (pág. 293). De la misma manera se aborda, en 6o. grado, la relación entre diámetro y circunferencia.

Una estrategia que se utiliza con frecuencia en el texto oficial para la enseñanza de algoritmos es la del *fading* o desvanecimiento de algunas de las características del objeto en las que el procedimiento se apoyaba originalmente. Véase cómo se enseña la fórmula del área de un rectángulo desvaneciendo el cuadriculado (Apéndice, págs. 294), con la ilusión de que esto genera la comprensión de la fórmula que permite evaluar un área (bidimensional) a partir de la medida de dos longitudes. [8]

Mencionaremos una última característica de los libros de texto mexicanos, que consiste en sustituir la experiencia directa de los alumnos por la lectura del relato de la experiencia de otros. Por ejemplo, en sexto grado se pretende enseñar por este procedimiento cómo medir la altura de un objeto físico de gran tamaño, utilizando el teorema de Thales. Con esto se busca la economía de la explicación para el maestro, bajo el supuesto de que la comunicación autorniño será mejor si no se ve perturbada por el "ruido" que puede introducir la mediación del maestro. Sin embargo, se cae en la falacia de homologar experiencia vivida con experiencia leída, en la que la solución del problema surge fluidamente del texto escrito. [9]

En los programas de los primeros grados se propone la realización de actividades de tipo tecnológico que bien podrían proporcionar un contexto funcional para desarrollar el conocimiento de las figuras geométricas a través de procesos de anticipación y de verificación. Entre éstas mencionaremos forrar una caja, construir muebles o juguetes, hacer la maqueta de una casa, etc. Un caso particularmente interesante es el de la construcción de una matraca, en 1o. grado, para lo cual la ilustración del libro sugiere al niño forrar una lata con papel de color.

Probablemente será la maestra quien deba cortar los papeles del tamaño adecuado, puesto que los alumnos, según el programa sólo podrían hacerlo en 6o. grado, después de aprender a calcular el" área total" de un cilindro. [10]

La reflexión sobre la enseñanza de la geometría en la escuela elemental nos ha llevado a delimitar una serie de problemas que nos limitaremos a enunciar:

1. Cómo preparar el tránsito de la geometría de observación, de comprobación empírica de relaciones, a la geometría deductiva, en la que la validez de las proposiciones es sustentada por la coherencia del razonamiento. Por ejemplo, cómo pasar de la verificación de que al yuxtaponer los tres ángulos internos de un triángulo se obtiene un ángulo de 180° a la conclusión de que eso debe pasar necesariamente en cualquier triángulo.
2. Cómo compatibilizar el carácter variable, aproximado, de los resultados obtenidos empíricamente, con el carácter único, exacto, de los resultados logrados a través del cálculo. Por ejemplo, *los* valores obtenidos para *el* área de un triángulo contando cuadritos, con el valor obtenido aplicando la fórmula, a partir de medidas dadas de base y altura. Dicho de otra forma, lo que aquí nos cuestionamos es el rol de la medición en la verificación de equivalencias matemáticas. Por ejemplo, en el texto oficial (2o. grado) se pide a los niños que anticipen el valor de un perímetro a través de un cálculo y luego que lo midan para verificar la exactitud de su anticipación. ¿Qué sucede si los resultados de cálculo y de medición no coinciden? ¿Qué sucede si el cálculo se repite varias veces? ¿Y si la medición se repite varias veces?
3. Cómo garantizar la comprensión de los procedimientos algoritmizados que los alumnos deben aprender. Resulta evidente que la repetición de su ejecución, hasta memorizar la secuencia de acciones constitutivas, no es suficiente. Pero, ¿con qué sustituir esta estrategia de enseñanza?
4. Cómo coordinar la conceptualización dinámica de los objetos geométricos (ligados, por ejemplo, al trazado de figuras) con su conceptualización estática (ligada a su presentación ostensiva).
5. Cómo organizar el pasaje desde el lenguaje natural, para referirse a las relaciones espaciales, hasta el lenguaje matemático, sin generar rupturas violentas y posibili-

tando la apropiación sintáctica y semántica del lenguaje matemático, de manera que los alumnos puedan utilizarlo para expresar sus conocimientos.

6. Cómo ir relacionando las adquisiciones en el ámbito de las relaciones espaciales con las adquisiciones en el dominio de las relaciones numéricas. En qué medida los progresos en uno de estos campos pueden facilitar u obstaculizar aprendizajes en el otro.

Nuestra revisión de textos y programas para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria mexicana nos proporcionó una base suficiente para avalar los planteamientos de Brousseau, en el sentido de que en la escuela primaria no se enseña geometría para contribuir al desarrollo, por parte de los alumnos, del dominio de sus relaciones con el espacio, sino que se reduce el aprendizaje de la geometría al conocimiento de una colección de objetos definidos como parte de un saber cultural. Este saber cultural se opone al saber funcional. El primero, en ausencia del segundo, sólo sirve para mostrar a otros que uno sabe, elicitando términos, definiciones y hasta demostraciones almacenadas en la memoria, ante la demanda explícita de ese saber (que también puede tratarse de un "saber hacer", no sólo de un "saber decir"). El saber funcional, en cambio, es aquel al que se recurre con la finalidad de resolver un problema; son los esquemas o modelos que utilizamos para enfrentar una situación y tratar de adaptarnos a ella desde un punto de vista cognitivo (búsqueda de explicaciones, intentos de previsión de resultados, análisis de factores intervinientes, esfuerzos de control del curso de los procesos reales). Forman parte de un saber funcional las teorías que los científicos aplican para dar cuenta de los fenómenos que estudian, sujetas a reajustes periódicos a raíz de su confrontación con el acaecer real. Forman parte de un saber exclusivamente cultural esas mismas teorías, repetidas por eruditos que no recurren a ellas para orientar su actividad práctica.

> La enseñanza de la geometría en nuestras escuelas primarias se reduce a intentar que nuestros estudiantes memoricen los nombres de las figuras, los mapas geométricos y las fórmulas que sirven para calcular áreas y volúmenes...,

afirma J. Alarcón (1978), con cuyo punto de vista concordamos plenamente.

Brousseau ha observado cómo, después de que los alumnos han estudiado las figuras geométricas elementales durante varios años en la escuela primaria, si se les pide que describan, por ejemplo, un cuadrilátero dado, para que otro alumno pueda, a partir de esa descripción, construir un cuadrilátero que coincida con el primero al superponerlos, se comprueba que tienen grandes dificultades para llevar a cabo esta tarea. Saben designar los vértices mediante letras (saber cultural) pero no se les ocurre emplear este conocimiento para simplificar su descripción. Saben definir qué es un ángulo, pero no explicar al receptor de su mensaje qué debe hacer para reproducir los ángulos de su figura. Lo que mejor saben hacer es medir la longitud de los lados (que no siempre son llamados lados, en ocasiones han sido descritos como *écart,* esto es, "separación" entre dos vértices adyacentes). Con frecuencia la información que proporcionan sobre medidas de lados y de diagonales resulta redundante. Los alumnos, concluye Brousseau, no han desarrollado un lenguaje para describir las características de las figuras ni han aprendido a seleccionar un conjunto de características pertinentes (necesarias y suficientes) para su reproducción.

Brousseau plantea que este aprendizaje de la geometría, puramente cultural, basado en la ostensión de los nombres y propiedades de los objetos geométricos, constituye un verdadero escándalo, que es preciso denunciar públicamente. El escándalo consiste en que, precisamente en la época en que los alumnos están intentando adquirir el dominio de sus relaciones con el espacio, la escuela no hace nada para ayudarlos. Piaget habría dicho que eso está muy bien, puesto que es preferible dejar que el niño construya, a través de su interacción espontánea con el medio, las estructuras que le permitirán desenvolverse con propiedad en el espacio, antes que imponerle ejercicios escolares que no contribuirán a hacer evolucionar sus concepciones y que sólo servirán para generar sentimientos de fracaso y de minusvalía en los niños que aún no están en condiciones de efectuarlos correctamente. Nuestra hipótesis es la de que es posible, en un contexto escolar, generar situaciones en las que los alumnos se planteen problemas relativos al espacio e intenten resolverlos basados en sus concepciones "espontáneas", introduciéndose en un proceso en el que deberán elaborar conocimientos adecuados y reformular sus concepciones teóricas para resolver los problemas planteados. Reconocemos que el diseño e implementación de tales situaciones no es tarea fácil, pero por eso mismo lo hemos planteado como objeto de nuestro estudio experimental, como tema de una intensa búsqueda, antes de lanzarnos a hacer proposiciones que serán utilizadas en condiciones escolares absolutamente fuera de nuestro control.

Por otra parte, estamos convencidos de que hay gran cantidad de adultos que, a través de su interacción extraescolar con el ambiente, no han logrado desarrollar una concepción del espacio que les permita un control adecuado de sus relaciones espaciales, control que les posibilite orientar autónomamente sus desplazamientos en ámbitos de cierta magnitud[11].

APÉNDICE

Materiales de los programas y textos oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP), México (1982), sobre la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.

Actividades

Que el alumno:

Distinga y forme círculos

— Localice en el salón superficies en forma de círculos.
— Mencione otros objetos que no estén en el salón y que tengan forma circular.
— Repita después del maestro el nombre de la figura.
— Recorte un circulo, lo pegue en su cuaderno y escriba el nombre de la figura.
— Haga un ejercicio de papiroflexia, utilizando un círculo (R. pág. 69)
— Forme un círculo acostándose en el suelo con otros compañeros.
— Dibuje círculos en el patio, con distintos colores.
— Salte dentro de los círculos del color que nombre el maestro (sólo podrán colocarse tres niños por círculo).
— Dibuje círculos alternados con figuras, colocados uno enseguida de otra.
— Corra pisando únicamente los círculos.

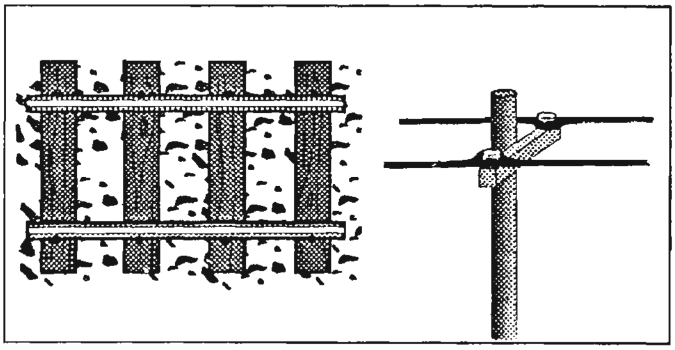
(Libro para el maestro, Primer grado, pág. 159.)

Como las vías del tren.

Observa en estas ilustraciones las vías del tren y los cables de la luz.

¿En qué se parecen?

Dibuja aquí dos rectas como las vías del tren o los cables de la luz.



Las rectas como éstas que dibujaste son *paralelas*. Representa rectas paralelas con cordones, con popotes o con palitos.

(Libro para el niño, Tercer grado, pág. 99.)

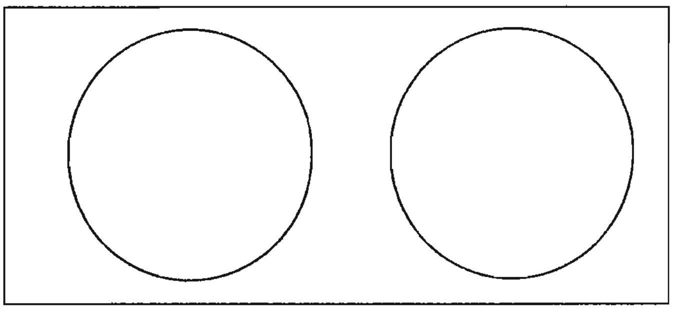
¿Cómo se dibuja un triángulo?

Juega a los albañiles en el patio.

(Mi libro de primero, Parte 2, pág. 338.)

Con el compás

Descubre algunas propiedades de los círculos haciendo lo que se indica.



Traza seis radios en el círculo azul. Mide esos radios con la regla y anota sobre cada uno su medida. ¿Todos esos radios tienen la misma medida?

Traza ochos radios en el círculo naranja y mídelos. ¿Todos esos radios tienen la misma medida?

Compara los radios de los dos círculos. ¿Miden lo mismo los radios del círculo azul que los del círculo naranja?

Traza en un papel un círculo que tenga el mismo radio que los dos círculos dibujados arriba. Luego recórtalo, y colócalo sobre cada uno de ellos. ¿Los tres círculos son iguales?

(Libro para el niño. Tercer grado, pág. 172.)

Haz en cada cuadro lo que se indica y después contesta las preguntas.

1. Traza una paralela a la recta roja.
2. Traza una recta verde que sea perpendicular a la paralela que trazaste.

¿La recta verde es perpendicular a la recta roja?__________________
Usa tu escuadra para comprobarlo.

1. Traza una perpendicular a la recta azul.
2. Traza otra perpendicular a la misma recta.

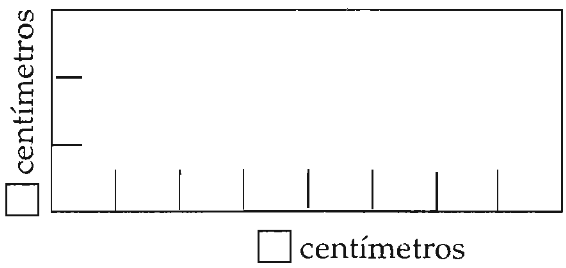
¿Son paralelas las dos rectas que trazaste?

Compruébalo con tu escuadra

(Libro para el niño, Tercer grado pág. 109.)

Cuadritos en columnas.

Observa este rectángulo. Anota las medidas de sus lados.



Cuadrícula el rectángulo y pinta de distinto color cada columna.

¿Cuántas columnas hay?

¿Cuántos centímetros mide la base del rectángulo?

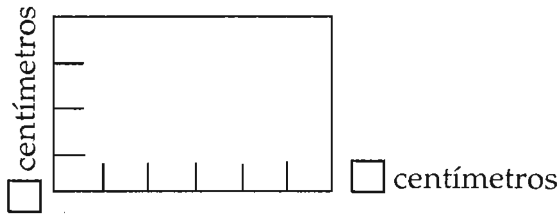
¿Cuántos cuadritos hay en cada columna?

¿Cuántos centímetros mide la altura del rectángulo?

El área de este rectángulo se puede expresar como 9 x 3, pues hay 9 columnas de 3 centímetros cuadrados cada una.

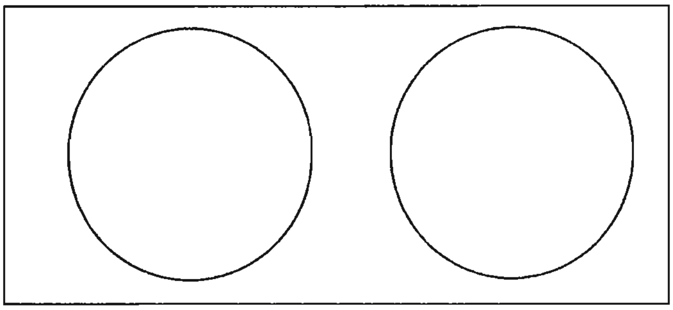
Cuenta los centímetros cuadrados que hay en la cuadrícula para ver si hay 9 x 3, o bien 27.

En este rectángulo haz lo mismo que en el de arriba. Completa lo que falta.



Con el compás

Descubre algunas propiedades de los círculos haciendo lo que se indica.



Traza seis radios en el círculo azul. Mide esos radios con la regla y anota sobre cada uno su medida. ¿Todos esos radios tienen la misma medida?

Traza ochos radios en el círculo naranja y mídelos. ¿Todos esos radios tienen la misma medida?

Compara los radios de los dos círculos. ¿Miden lo mismo los radios del círculo azul que los del círculo naranja?

Traza en un papel un círculo que tenga el mismo radio que los dos círculos dibujados arriba. Luego recórtalo, y colócalo sobre cada uno de ellos. ¿Los tres círculos son iguales?

(Libro para el niño. Tercer grado, pág. 172.)

Haz en cada cuadro lo que se indica y después contesta las preguntas.

1. Traza una paralela a la recta roja.
2. Traza una recta verde que sea perpendicular a la paralela que trazaste.

¿La recta verde es perpendicular a la recta roja?__________________________

Usa tu escuadra para comprobarlo.

1. Traza una perpendicular a la recta azul.
2. Traza otra perpendicular a la misma recta.

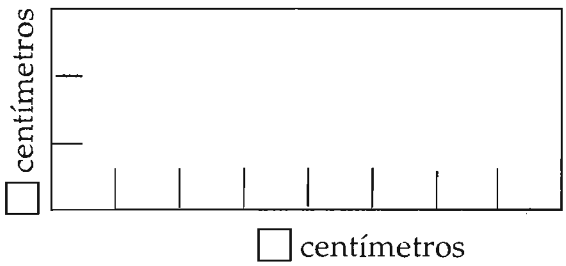
¿Son paralelas las dos rectas que trazaste?

Compruébalo con tu escuadra

(Libro para el niño, Tercer grado pág. 109.)

Cuadritos en columnas.

Observa este rectángulo. Anota las medidas de sus lados.



Cuadrícula el rectángulo y pinta de distinto color cada columna.

¿Cuántas columnas hay?

¿Cuántos centímetros mide la base del rectángulo?

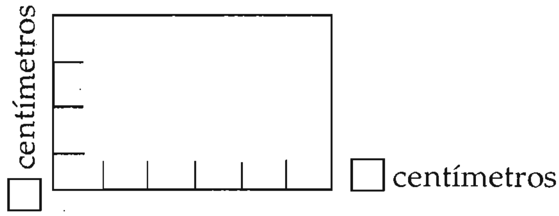
¿Cuántos cuadritos hay en cada columna?

¿Cuántos centímetros mide la altura del rectángulo?

El área de este rectángulo se puede expresar como 9 x 3, pues hay 9 columnas de 3 centímetros cuadrados cada una.

Cuenta los centímetros cuadrados que hay en la cuadrícula para ver si hay 9 x 3, o bien 27.

En este rectángulo haz lo mismo que en el de arriba. Completa lo que falta.



El área de este rectángulo se puede expresar como □ x pues hay □ columnas de □ centímetros cuadrados cada una.
Su área es de □ x □, o sea, centímetros cuadrados.

Libro para el niño. Tercer grado, pág. 202.)

Cuadricula los siguientes rectángulos. Pinta de diferente color cada columna de cuadritos. Después completa lo que falta.

La base mide □ centímetros y la altura □ centímetros.
Hay □ columnas de cuadritos cada una.
Hay □ x □ cuadritos en total.
El área es de □ x □, o sea, centímetros cuadrados.

La base mide □ centímetros y la altura □ centímetros.
Hay □ columnas de cuadritos cada una.
Hay □ x □ cuadritos en total.
El área es de □ x □, o bien centímetros cuadrados.
Discute con tus compañeros cómo encontrar el área de los rectángulos, sin cuadricularlos.

(Libro para el niño. Tercer grado, pág. 203.)

Notas de lectura:

**Capítulo II de la tesis "El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria", presentada por la autora, para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la Especialidad de Educación en el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, en 1985. El director de tesis fue el profesor Guy Brousseau.

[1] Veinte siglos más tarde Newton toma *Los elementos* de Euclides como modelo para la organización de sus *Principia,* en los que expone su teoría de la gravitacion.

[2] En gran parte de lo que sigue nos guiaremos por este texto para reseñar el desarrollo histórico de la geometría.

[3] Postulado que afirma que, en un plano, sólo se puede trazar una paralela por un punto exterior a una recta.

[4] Según R. García esta inversión es válida solamente para el dominio de las relaciones intrafigurables (de una figura aislada) y no para los dominios de las relaciones interfigurables (entre figuras) o transfigurables, en el sentido en que éstas son definidas en Piaget y García (1982).

[5] Sin embargo, Obujova (1972) utilizó con éxito un método para acelerar la adquisición de la conservación de longitudes y de otras dimensiones físicas enseñando a los niños a recurrir a la medición para contrarrestar la impresión perceptual de igualdad o desigualdad de dos cantidades. Resta explicar qué significa para un niño medir los desplazamientos en ausencia de la idea de que la dimensión que está midiendo es invariante.

[6] A veces la descontextualización conduce a equívocos como en la página del libro de primer grado que reproducimos en el Apéndice, donde pareciera, que, para hacer un triángulo cualquiera, los albañiles se dan el trabajo de marcar con nudos..., ¡doce longitudes iguales!

[7] Piaget afirma, por el contrario, que la imagen espacial se elabora a partir de imitaciones interiorizadas, que son las que posibilitan la representación de las transformaciones espaciales.

[8] Para un análisis de las dificultades conceptuales de los alumnos de primaria, en el terreno de la medición de áreas remitimos al trabajo de R. Domínguez (1983).

[9] Hemos propuesto a alumnos de 6o. grado (*cours moyen 2* en Francia), junto con Brousseatl, un problema similar: estimar el tercer lado de un triángulo del que sólo podían medir dos lados. en el patio de la escuela (con distancias del orden de los 10 metros). La solución del problema no resultó nada evidente. Los niños podían concebir el traslado de las medidas lineales a una representación a escala pero no disponían de métodos para reproducir ángulos. Un equipo logró resolver este problema doblando un papel para "medir" el ángulo comprendido entre los lados conocidos del triángulo, en el terreno, y trasladando luego dicha medida a su dibujo a escala, procedimiento similar a los que encuentra Piaget en los primeros peldaños de la medición espontánea de longitudes (reproducción y traslación de la longitud de medir). Otra observación interesante fue la ineptitud de algunos niños para esquematizar en un dibujo las relaciones espaciales percibidas en el terreno (hubo incluso casos de no conservación de tramos rectilíneos).

[10] Hemos organizado una experiencia de forrado de una lata, en 1o. grado, comprobando que una buena parte de los alumnos eran capaces de anticipar la forma rectangular del forro; otros propusieron una forma elíptica (puesto que se trataba de cubrir una superficie curva, la figura debía poseer también un límite curvo) y, finalmente, hubo quienes se limitaron a representar las diferentes perspectivas conocidas del cilindro. La posibilidad de confrontar la validez de estos modelos, aplicando los trozos de papel recortado sobre la superficie de la lata, constituyó un fuerte estímulo para hacerlos evolucionar.

[11] E. Ferreiro y D. Taboada (comunicación personal), en el contexto de un estudio sobre adultos analfabetos, encontraron en la ciudad de México empleadas domésticas de extracción rural que no se atrevían a salir en sus días libres por temor a extraviarse.

MEDICIÓN

LECTURA: INTRODUCCIÓN AL CURSO DE SISTEMAS DECIMALES DE MEDICIÓN*

INTRODUCCIÓN AL CURSO DE SISTEMAS DECIMALES DE MEDICIÓN

1. Introducción

Históricamente, la medición ha sido utilizada en todas las actividades de la vida cotidiana unida al desarrollo de instrumentos de medición.

En el contexto escolar, la medición ocupa un lugar preponderante. (...)

Los maestros pueden encontrar múltiples y variadas situaciones que proporcionan datos susceptibles de medición. Este tema brinda una oportunidad muy frecuente de integración de varias disciplinas de la enseñanza, ya que la medición no sólo se utiliza en matemáticas y en ciencias naturales, sino también en ciencias humanas a partir de la mediciones y relevamientos estadísticos que se realizan en las poblaciones; en música, donde la variación en la longitud de las cuerdas de un instrumento hace variar el sonido producido; en educación física, donde se utiliza la medición para establecer la ficha antropométrica de un individuo o para delimitar una cancha o para cuantificar los resultados de un partido. Por lo tanto, hay gran cantidad de situaciones a partir de las cuales se puede introducir el aprendizaje de la medida sin tener que inventar situaciones artificiales para ese aprendizaje. Fuera del salón escolar podría decirse que la medición es aún más importante. Todos los días tenemos ocasión de efectuar una u otra medición, ya sea de tiempo, capacidad, longitud o superficie.

Cada país tiene definidas sus unidades de medida convencionales que a lo largo del tiempo, se ha unificado hasta convertirse en medidas internacionales. Por ejemplo, países como Canadá o Inglaterra conservaban su sistema de medidas hasta hace poco tiempo, en que introdujeron el uso del sistema decimal de longitud que nosotros utilizamos desde hace largo tiempo.

2. *Medición*

Efectuamos una medición cuando contamos el número de veces que una unidad, previamente fijada, puede ser trasladada sobre el objeto a medir.

Esto es lo que sucede cuando medimos la longitud de una habitación y obtenemos, por ejemplo, 5 metros. En ese caso la unidad de medida es el metro y puede ser trasladado 5 veces sobre el lado de la habitación que estemos midiendo.

Cuando decimos que el horario es de 6 horas, estamos tomando como unidad de medida la hora y contando cuántas veces, ese lapso de tiempo, transcurrió mientras los niños estaban en la escuela. Si bien decimos que contamos el número de veces que la unidad de medida cabe en el objeto a medir, podríamos obtener números decimales, por ejemplo, obtener 3.500 kg al pesar un objeto. En este caso tres pesas de 1 kg no son suficientes para equilibrar la balanza y necesito tomar una unidad más pequeña, por ejemplo, una pesa de 1/2 kg lo que aumenta la precisión en la medición.

Podría decirse que en el aprendizaje de la medición se pasa de lo cualitativo a lo cuantitativo, entendiendo que se parte de la percepción de la magnitud a medir realizando comparaciones entre los objetos, que podríamos llamar directa, sin intervención de otros objetos ni unidades de medida.

Esta comparación ya no es útil en el caso de objetos que se encuentra alejados o que no son comparables directamente. Se utiliza entonces un elemento exterior.

Finalmente se fijará una unidad de medida que sea pertinente y podrá construirse un instrumento graduado.

Es decir, que a partir de la comparación global y física, el aprendizaje lleva al niño a precisar la

*Irma Sáiz e Irma Fuenlabrada. "Introducción al curso de sistemas decimales de medición", en: BLOCK, David (Coord.). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* SEP, México, 1995. pp. 147 -156.

magnitud por medir, decidir la unidad más adecuada y elegir convenientemente el instrumento graduado.

a) Percepción de la magnitud

El primer contacto del niño con la medición estará dado por la percepción de la magnitud a medir. Deberá ver la magnitud como otra propiedad de los objetos. Así como los clasificó de acuerdo a su color o a su forma, podrá clasificarlos de acuerdo a su longitud o a su peso.

Es necesario que el niño haya abstraído la idea de la magnitud que se desea medir en un objeto, independientemente de otras propiedades que pueda presentar. Para ello, la variedad del material que se utiliza, así como la diversidad de las acciones del niño, es fundamental. Encontrar cuál camino es más largo, clasificar varillas de acuerdo a su longitud, ordenar lápices de menor a mayor tamaño, construir un listón más grande que otro, etc., son actividades útiles para la percepción de la longitud, como lo es cubrir una mesa con cuadernos, ordenar superficies de forma semejante en orden creciente o decreciente para la percepción del área de una figura.

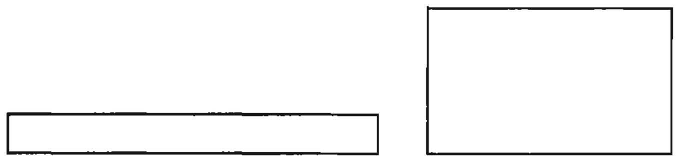
Puede pensarse en crear una situación en la que los niños puedan diferenciar distintos tipos de medidas en el mismo objeto. Por ejemplo, utilizando una caja, puede preguntarse ¿es grande? (volumen); ¿es pesada? ¿un niño puede levantarla? (peso); ¿alcanza el hilo que tiene Mario para rodearla? (longitud); ¿le entran más o menos carritos que a esta otra caja? (capacidad); si tengo cajas iguales y las coloco a lo largo del salón de clase ¿cuántas necesito para llegar de una pared a la otra? (longitud); ¿cuántas cajas como ésta necesito para cubrir la mesa (área).

b) Comparación directa

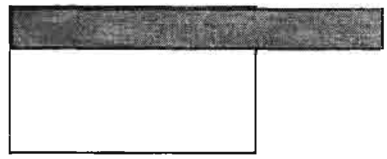
Hay situaciones donde la vista o el tacto pueden decidir sobre la comparación de dos objetos y en ese caso no es necesario recurrir al uso de unidades de medida de un instrumento graduado.

Es lo que hacemos cuando sopesamos dos objetos y afirmamos que uno pesa más que el otro, o colocamos dos varillas de tal manera que sus extremos coincidan y mirando el otro extremo, decidimos cual varilla es más larga. Lo mismo sucede para comparar el área de ciertas figuras, cuando superponiéndolas, se puede decidir cuál tiene mayor área.

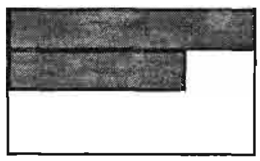
Por ejemplo, si comparamos el área de los dos trazos de cartón siguientes



puede colocarse el de la izquierda sobre el de la derecha:



y la parte restante, otra vez:



viendo así que el cartón de la derecha tiene mayor área. En este caso no se utilizó otro objeto distinto a los dos campos por comparar.

Esta comparación no nos permite cuantificar ni expresar cuánto éste es más grande o más chico que el otro.

Para efectuar este tipo de comparaciones es necesario trabajar con objetos que sean factibles de manipular, superponer, sopesar, etc. y no sólo con dibujos en un cuaderno, libro o pizarrón.

c) Comparación indirecta

Si quiero saber si un librero puedo colocarlo en otra habitación y el librero está lleno de libros, es seguro que no lo trasladaré antes de saber si el librero entra o no en el lugar asignado.

Más bien, buscaré un hilo, una varilla u otro objeto que me permita realizar la comparación de los anchos respectivos. Este objeto sirve como unidad intermediaria entre los dos objetos por comparar.

El cuerpo de un niño puede servir, en cierto momento, para comparar la altura de dos mesas. El cuerpo del niño actúa como elemento exterior para establecer la comparación entre las mesas.

d) Uso de unidades de medida

Hay situaciones en que este tipo de comparación global no es suficiente y necesito cuantificar la diferencia entre las magnitudes de dos objetos o simplemente medir un objeto.

Pueden aparecer aquí unidades de medida convencionales o no. Por ejemplo, en las actividades cotidianas muchas veces preferimos utilizar como unidad de medida una cuchara o una taza y no las medidas convencionales o no. Por ejemplo, en las actividades cotidianas muchas veces preferimos utilizar medidas no convencionales. Para hacer un pastel, utilizamos como unidad de medida una cuchara o una taza y no las medidas convencionales de capacidad como son el milímetro o el litro, o a veces mezclamos unas y otras en una misma situación.

Pero si la situación requiere mayor precisión o necesitamos transmitir una medida, utilizamos medidas convencionales, por ejemplo, para hacer cortar un vidrio o para comprar un tapete.

Una unidad de medida que se utiliza frecuentemente para medir longitudes es el pie. Colocamos un pie a continuación del otro y contamos cuántas veces podemos hacerlo. Esta unidad de medida que es tan útil en algunas situaciones, resulta imprecisa si, por ejemplo, se requiere comunicar una medición a otra persona, cuyo pie no mide necesariamente lo mismo que el pie de la primera persona.

Se requiere por lo tanto, de medidas convencionales que no varíen según las personas o situaciones y que permitan la comunicación entre distintas personas.

(En el punto 4 meses discutirá el uso de las unidades de medida convencionales o no en el aprendizaje de la medición en la escuela).

Puede aparecer entonces, el centímetro como unidad convencional para medir longitudes, pero se trata de una unidad evidentemente poco práctica para medir, por ejemplo, el ancho de una habitación; surgen entonces otras unidades de medida, de menor a mayor valor según las necesidades, pero con una relación clara con las anteriores para permitir efectuar cálculos y equivalencias.

Por ejemplo, si sabemos que una varilla mide 2 metros, 15 decímetros, 54 centímetros y otra mide 1 metro, 34 decímetros y 81 centímetros, pero no sabemos qué relación existe entre los centimetros, decímetros, y metros, difícilmente podremos establecer cuál de las varillas es más larga.

Para la medición de superficies pueden comentarse aspectos similares. Utilizando cuadrados de 1 cm. de lado, cuya área es de 1 cm^2, puedo cubrir la superficie, y el área estará dada por la cantidad de cuadritos de 1 cm^2 de área que puedo colocar (o marcar). Pero para medir superficies más grandes, esta unidad de medida no es práctica y aparecen así otras unidades como el dm^2 o m^2. La necesidad de establecer una relación entre las unidades es clara, lo que da origen a un sistema de unidades de medida.

Pero, cuando calculamos áreas, raramente contamos el número de cuadritos que pueden colocarse sobre una superficie. Por ejemplo, si se trata de un rectángulo medimos las longitudes de sus lados y multiplicamos esos dos números. Nos remitimos a una fórmula que nos proporciona el área del rectángulo. (...)

e) Estimación

La estimación es una de las actividades más comunes. Decimos por ejemplo, alrededor de 120 personas vinieron a la fiesta; es un armario de 2 metros aproximadamente, etc.

En estas situaciones, decidimos por estimación un cierto encuadramiento. Al decir que 120 personas vinieron a la fiesta, estamos diciendo que al menos vinieron 100 y en el caso del armario estamos afirmando que mide, por ejemplo, entre 1.8 y 2.2. metros.

En cada caso se hace una interpretación sobre el significado de la estimación. Se trata de una medición aproximada, pero suficientemente precisa en la mayoría de los casos.

El desarrollo de la habilidad de estimar es muy importante en la escuela primaria ya que a veces es suficiente para expresar un resultado, además permite detectar errores que podrían producirse por efecto de los cálculos, permite al maestro detectar la comprensión del niño en la elección de una unidad de medida y en la organización de un sistema de medidas.

Esta capacidad para estimar se desarrollará en el niño en la medida en que se le presenten abundantes situaciones donde sea posible efectuarlas.

f) Precisión en la medición

Una medida es buena cuando da claramente un cota inferior y una superior de la medida de un objeto. Si decimos que Juanito mide entre un metro y un metro y medio, es una medición suficientemente precisa; pero si queremos comprarle ropa será mejor conocer sus medidas con mayor precisión.

Es la situación misma en la que se mide, la que indica la precisión en la medida. Si compramos un tapete, será inútil indicar la medida de la sala en milímetros.

No debe olvidarse que la medición es siempre aproximada y que depende del instrumento utilizado. No es aconsejable llegar al niño a precisar cada vez más sus mediciones sin relación alguna con el problema concreto que provocó la medición.

3. Relación entre el sistema de numeración y de medida

Cuando trabajamos con números decimales y utilizamos la expresión 4.6. entendemos que se trata de 4 unidades y 6 décimos, estamos utilizando las unidades como unidad de medida. Hay aquí un problema de vocabulario ya que en el sistema decimal de numeración hablamos de unidades, decenas, décimos, etc., y en medición hablamos de unidades de medida.

Estamos acostumbrados a utilizar el punto decimal (en los números) para indicar las unidades, pero no es raro ver en los últimos años informes económicos donde se especifica que las cantidades están dadas "en miles" y luego se indica como se ve en el ejemplo.

Alimentación	**$ 49.3**
Viajes	**124.8**
Vestido	**30.0**
Total	**$ 204.1**

Por lo tanto el número $49.3. se refiere $49 300 y no a $ 49 con 30 centavos, y aún expresiones del tipo:

5.328 en millones

indicando así el número 5 328 000 (cinco millones trescientos veintiocho mil).

Los niños que se enfrentan por primera vez a un sistema de numeración no verán inmediatamente que quince unidades es equivalente a una decena y cinco unidades, y deberían poder comprobarlo para comprender esta equivalencia.

Si tenemos doscientos treinta y cuatro objetos podemos contarlos utilizando como unidad de medida la decena, esto es agrupando los objetos de a diez y contamos cuántos grupos formamos. Obtenemos así 23 decenas y 4 décimos de decenas lo que se escribe:

23.4 decenas

Podríamos haber contado los objetos utilizando la centena como unidad de medida y hubiéramos obtenido 2 centenas y 34 centésimos de centena. Se escribiría:

2.34 centenas

Si bien esta escritura no es muy usual, (salvo en casos como el que vimos anteriormente) sirve para constatar la similitud entre el sistema de numeración y los sistemas de medida, exige la comprensión de la escritura de nuestro sistema de numeración ya que utiliza la misma notación con valor posicional. (...)

5. Enfoque didáctico de la medición

Para efectuar una medición, un niño debe saber elegir un instrumento, saber utilizarlo, saber leer una graduación, comprender la notación utilizada, percibir un intervalo, etc. Medir involucra una serie de operaciones difíciles y complejas.

a) Uso de material concreto

En el punto 2, se platicó del proceso que en principio se sigue en el aprendizaje de la medida, desde una comparación global y física, hasta que el niño selecciona una unidad de medida y elige cuidadosamente el instrumento de medición.

En la escuela primaria generalmente se sigue este proceso, pero con frecuencia se desfasa del desarrollo y posibilidad de comprensión del niño para seguir un ritmo más rápido impuesto por el maestro, memorizando ciertas unidades privilegiadas o calculando medidas con ayuda de fórmulas.

El uso de material concreto es fundamental para la comprensión de la medición. Tanto si se habla de peso, como de superficie longitud o volumen, es necesario proporcionar al niño gran variedad de objetos con los cuales pueda efectuar las manipulaciones necesarias.

La variedad en el material es importante para ayudar a la comprensión de los conceptos, como también es importante la diversidad de acciones efectuadas por el niño con el material.

Y cuando hablamos de material concreto no nos referimos solamente a dar al niño por ejemplo, tiras de papel y reglas. La regla aparecerá como un recurso más para medir longitudes y no como el único que puede ser utilizado. La medición efectuada con una regla, será privilegiada si se trata de una situación donde se necesite gran precisión y especialmente, si se desea comunicar a otros una medición. Y aún cuando se esté trabajando con las medidas convencionales, será necesario el uso del material concreto apropiado. Antes de utilizar una regla donde ya están indicados milímetros, centímetros, decímetros y metros, será conveniente utilizar tiras de papel o maderas cuyas longitudes sean de un metro, otras cuya longitud sea de un decímetro y otras con longitud de un centímetro, etc. De esta manera puede comprenderse por qué primero fijarse en la graduación de metros, luego en centímetros, y si el caso lo requiere, en milímetros. Lo mismo puede decirse con otras magnitudes, por ejemplo, utilizar pesas de distinto peso antes de una balanza donde la graduación ya está marcada.

b) Unidades de medida convencionales o no

Llamamos unidades de medida no convencionales a aquellas que pueden ser utilizadas sin que exista un convenio generalizado (por lo menos, a nivel del país) sobre su valor. Por ejemplo, un lápiz para medir el ancho de una silla o la capacidad de un jarrito para medir la capacidad de una cubeta. Medir la altura de una mesa o el tiempo transcurrido entre dos acontecimientos, puede ser objeto de una discusión en el salón de clase, hasta llegar a la elección de una unidad de medida, sin que ésta sea necesariamente el centímetro para el primer caso o la hora para el segundo caso.

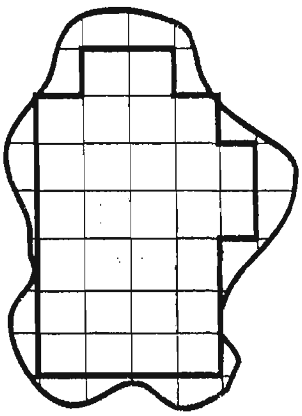
Tal vez en medición de superficies es donde menos se utilizan unidades no convencionales. Rápidamente se pasa a utilizar las fórmulas, que es en recurso eficaz para el cálculo, pero demasiado abstracto para los niños.

Y sin embargo, la variedad de unidades de medida no convencionales es muy grande. No sólo pueden utilizarse cuadritos para cubrir una superficie. Pueden utilizarse desde papeles recortados sin una forma común, hasta triángulos, círculos, rectángulos, etc., o distintas unidades a la vez. (...)

Además, el geoplano (madera con clavos donde se colocan ligas de hule) es muy buen recurso para el aprendizaje de la medición de superficies. (...)

Tampoco debe restringirse el aprendizaje a calcular áreas de figuras regulares, deben calcularse áreas de figuras como la siguiente:

Fig. A



donde colocando cuadritos sobre la figura o bien cuadriculándola, se obtiene que el área es mayor que 28 cuadritos. Un cuadriculado más fino permitirá aproximar aún más la medición.

c) Uso de fórmulas

La capacidad para efectuar mediciones difiere básicamente de la capacidad para aplicar fórmulas. Por lo tanto, la aplicación de fórmulas no puede servir como evaluación de la capacidad de medir.

Ya dijimos anteriormente que para medir, el niño debe ser capaz de aislar la magnitud a medir, elegir una unidad de medida y el instrumento adecuado. Estas actividades no las realiza cuando aplica una fórmula.

El aprendizaje de la medición debe proporcionar al niño variados recursos para efectuar una medición. La aplicación de una fórmula parece ser uno de los recursos más astractos y que no siempre los niños están en condiciones de comprender.

También puede comentarse el uso de símbolos convencionales como kg, dm^2, etc., ya que forma parte de un aprendizaje más formal de la medida que debe aparecer posteriormente. No es conveniente utilizar símbolos sin relación con un significado concreto. Los símbolos convencionales puedan aparecer como otra forma de representar las unidades de medida, después que los niños hayan tenido oportunidad de inventar sus propios símbolos.

Un último comentario sobre las conversiones de medidas, actividad que resulta bastante frecuente en este tema en la escuela primaria. Para nosotros, adultos, es muy claro que si la mesa mide 1.25 m. esa medida es equivalente a 12.5 dm. y aún a 125 cm pero ¿qué significados tiene para los niños?

Si utilizo un metro como unidad de medida, podrá colocarlo una sola vez y después utilizar veinticinco centímetros para completar la medición. Si la unidad de medida es el decímetro, podrá colocarlo doce veces y sólo necesitaré ciento veinticinco para cubrir el ancho de la mesa.

Efectuar mediciones del mismo objeto con distintas unidades, analizar la relación entre ellas y comprender la estructura del sistema de numeración con su notación posicional, es lo que permite a los niños llegar a entender claramente la función del "punto decimal" y el por qué haya que cambiarlo de lugar cuando se cambian la unidad de medida.

Notas de lectura

[1] Tomado de Documento Interno, DIECIN-VESTAV, México, 1981.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

A.P.M.E.P. *Aides pedagogiques pour le cours élémentaire.* No. 29, COPIRELEM: IREM de París-Sur, Francia, s/f. Trad. Alicia Ávila.

ÁVILA, Alicia. *Los niños también cuentan.* SEP, Col. Libros del Rincón, México, 1993.

BALBUENA, Hugo y David Block. *Cero en conducta.* Núm. 25, Mayo-Junio de 1991, México.

DÁVILA, Martha, Olimpia Figueras y Gonzalo López Rueda. *Guía para el maestro. Tercer grado.* SEP, México, 1992.

FIGUERAS, Olimpia, Gonzalo López Rueda y Rosa Ma. Ríos. *Guía para el maestro. Segundo grado.* SEP, México, 1992.

FIGUERAS, Olimpia, Gonzalo López Rueda y Simón Mochón. *Guía para el maestro. Quinto grado.* SEP, México, 1992.

KAMII, Constance. *Reinventando la aritmética II.* Aprendizaje-visor, Madrid, 1992.

PARRA, Cecilia e Irma Sainz (Comps.). *Didáctica de matemáticas.* Paidós, Argentina, 1994.

PELTIER, Marie-Lise. *Educación matemática.* Vol. 7, Núm. 2, Agosto de 1995.

SEP. Plan y programas de estudio. *Educación básica primaria.* México, 1993.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA ESCUELA
ANTOLOGÍA BÁSICA

PARTICIPARON EN SU ELABORACIÓN

ALICIA ÁVILA STORER
Unidad Ajusco

ANTONIO ACOSTA ESQUIVEL
Unidad UPN 141 Guadalajara

G. ALONSO RAMÍREZ SILVA
Unidad Ajusco

OSCAR SAN MARTÍN SICRE
Unidad UPN 161 Hermosillo

COORDINACIÓN DEL PROGRAMA
XÓCHITL LETICIA MORENO FERNÁNDEZ

Esta Obra se imprimió en
Corporación Mexicana de Impresión, S.A. de C.V.
en Febrero de 1996, con un
tiraje de 6,169 ejemplares
Gral. Victoriano Zepeda No. 22 Col. Observatorio
C.P. 11860, México, D.F.

NOVIEMBRE 1994.